

변동성지수의 미래예측력에 대한 연구

엄영호* · 지현준** · 장운옥***

— 국문초록 —

변동성지수는 옵션가격에 내재되어 있는 미래 변동성에 대한 기대를 지수화하여 표현한 것이며 미국, 독일 등의 증권거래소에서는 변동성지수의 발표뿐만 아니라 지수관련 파생상품도 거래되고 있다. 국내의 경우에는 아직까지 변동성지수를 공식적으로 발표하지 않고 있으나, 장외파생상품시장의 성장에 따른 변동성 헤지수요의 증가와 새로운 상품에 대한 수요의 증가 등으로 인해 변동성지수에 대한 관심이 크게 증가하고 있다. 변동성지수는 변동성에 대한 헤지기능과 함께 시장위험에 대한 지표의 기능을 할 수 있으며 미래 실제변동성에 대한 예측치의 역할을 할 수 있다.

미래 실제변동성에 대한 예측치로서 변동성지수 혹은 내재변동성의 유용성에 대한 기존연구들에서는 일별 자료를 이용하여 변동성지수가 실제변동성의 불편추정량은 아니지만 실제변동성에 대해 예측력을 갖는 것으로 설명하고 있다. 그러나 실제 2차적률에는 위험중립 2차적률 뿐만 아니라 고차적률까지 포함될 수 있다는 Bakshi, Kapadia and Madan(2003)의 연구를 고려할 경우 계량경제학적으로 중요변수 누락문제(omitted variable problem)가 발생할 수 있으며, 이는 변동성지수의 불편성(unbiasedness) 및 예측력 검증과정에 영향을 미칠 수 있다.

이에 본 연구에서는 1999년부터 2006년까지의 KOSPI200 지수옵션자료를 이용하여 변동성지수를 월별로 산정하고 실제변동성에 대한 예측력을 살펴보았다. 연구결과 측정오차를 고려하거나 고차적률을 고려할 경우 변동성지수의 실제변동성에 대한 불편성을 기각하지 못하고 실제변동성의 과거변수에 비해서도 높은 예측력을 나타냈다.

핵심단어 : 변동성 지수, 실현 변동성, 역사적 변동성, KOSPI200 지수

JEL 분류기호 : G14

* 연세대학교 경영학과 교수(Tel : +82-2-2123-4193, E-mail : yeom@base.yonsei.ac.kr)

** RBS GBM(Tel : +81-3-6266-3584, E-mail : wolken74@gmail.com)

*** 연세대학교 경영학과 박사과정(Tel : +82-2-2123-3584, E-mail : zara2k@yonsei.ac.kr)

I. 서론

변동성지수는 옵션에 내재되어 있는 변동성에 대한 정보를 이용하여 지수화한 것으로 1993년 미국의 CBOE(Chicago Board Options Exchange)에서 처음으로 산출하기 시작했으며 현재에는 미국, 독일, 스위스, 호주 등의 거래소에서 주가지수에 대한 변동성지수가 발표되고 있다. 뿐만 아니라 미국의 경우에는 변동성지수 선물과 옵션이 각각 2004년 및 2006년 이후 상장되어 거래되고 있으며, 선물거래의 경우 2007년 5월 기준으로 약 80,000계약 이상 거래되고 있다. 국내의 경우에는 거래소에서 공식적으로 변동성지수를 산출하지는 않고 있으나, 국내 장외파생상품시장의 성장에 따라 변동성위험에 대한 헤지 수요가 증가하고 새로운 상품개발 등에 대한 수요로 인해 변동성지수에 대한 관심이 매우 높은 것으로 생각된다.

이와 같이 해외 시장에서 널리 사용되고 있는 변동성지수는 관련 파생상품의 거래를 통해 변동성위험에 대한 헤지 수단을 제공할 수 있으며, 변동성지수와 기초자산간의 음의 상관관계로 인해 시장위험에 대한 지표역할을 할 수 있다. 특히, 2003년 이후 변동성지수 산출에 주로 사용되고 있는 공정분산스왑방식의 경우 기존의 블랙-숄즈 내재변동성을 이용한 변동성지수와 달리 옵션포트폴리오를 이용하여 복제(replication)가 가능하며 이는 변동성지수 관련 파생상품 거래를 촉진시키는 요인이 되고 있다. 뿐만 아니라, 변동성지수는 거래옵션에 내재되어 있는 정보를 이용함으로써 미래 변동성에 대한 기댓값으로써 기능할 수 있다. 이와 관련하여 외국과 국내에서는 변동성지수 혹은 내재변동성의 미래 예측력에 대한 많은 연구들이 이루어졌다.

해외의 변동성지수 혹은 내재변동성의 미래 실제변동성에 대한 예측력을 검증한 결과는 크게 두 가지로 나누어진다. 먼저 Day and Lewis(1992), Lamoureux and Lastrapes(1993)는 S&P100 지수옵션에 대한 자료를 이용하여 내재변동성이 실제변동성에 대해 편의를 갖는 비효율적 추정치이며, 실제변동성의 예측력에 있어 역사적 변동성에 비해 나은 결과를 나타내지 못한다고 결론지었다. 그리고 Canina and Figlewski(1993)는 내재변동성이 미래 실제변동성과 상관관계가 없으며 역사적 변동성의 정보를 반영하지 못하고 있다고 밝히고 있다. 반면, Christensen and Prabhala(1998)은 실제변동성의 예측에 있어 내재변동성이 역사적 변동성에 비해 우월한 성과를 나타내고 있음을 보였으며, Canina and Figlewski(1993) 등의 연구와 다른 결과를 얻은 중요한 이유로 중첩된 자료를 사용하지 않은 점을 들고 있다. 한편, 변동성지수의 실제변동성에 대한

예측력을 검증한 연구로는 Fleming(1998)의 연구가 대표적인데, Fleming(1998)은 변동성지수가 실제변동성에 대한 불편추정량(unbiased estimator)의 성질을 갖지는 못하지만 역사적 변동성이나 ARCH 모형 등에 비해 나은 예측력을 나타내는 것을 보였다. 또한 Aboura and Villa(1999)는 미국, 독일 그리고 프랑스 시장을 대상으로 변동성지수와 GARCH 모형의 미래 변동성 예측력을 비교하였다. 이 연구에서는 GARCH 모형에 블랙-숄즈 내재변동성 방법으로 산출된 변동성지수를 외생변수로 추가하여 실제 변동성에 대한 설명력을 살펴보았는데, 내재변동성의 예측력에 비해 GARCH 모형은 설명력이 없다고 보고하였다.

공정분산스왑 방법을 통해 산출한 변동성지수와 GARCH 모형의 미래 실제 변동성의 설명력을 검증한 연구로는 S&P500 지수 옵션을 이용한 Carr and Wu(2006)와 Becker, Clements and White(2006)의 연구가 있다. Carr and Wu(2006)는 Aboura and Villa(1999)의 연구에서처럼 변동성지수는 미래 실제 변동성에 대한 예측력이 있는데 비해 GARCH 모형은 변동성지수에 내재된 정보를 넘어서는 새로운 정보를 주지 못한다고 보고하였다.¹⁾ Becker, Clements and White(2006)의 연구는 변동성지수와 미래 실제 변동성간에는 유의한 양의 상관관계가 있지만 변동성지수가 비효율적인 추정치임을 밝히고 있다.

변동성지수 혹은 내재변동성의 미래 실제변동성에 대한 예측력 검증은 Christensen and Prabhala(1998)가 지적한 자료중첩으로 인한 문제 이외에도 여러 가지 계량경제학적 문제를 내포할 수 있다. 이에 본 연구에서는 KOSPI200 지수에 대한 변동성지수를 산출하여 실제변동성에 대한 예측력을 검증하고자 한다. 이를 위해 1999년부터 2006년까지의 옵션거래자료를 이용하여 월별 KOSPI200 변동성지수를 산출하고 다음의 네 가지 문제들을 고려하여 변동성지수의 예측력을 살펴보았다.

첫 번째로는 실제변동성에 대한 추정치로 일간수익률 자료(daily return)를 이용한 표본표준편차(sample standard deviation; SV)와 일중수익률 자료(intraday return)를 이용한 실현변동성(realized volatility; RV)을 함께 사용하여 예측력을 검증하였다.²⁾ 대

1) 본 연구에서도 GARCH와 변동성지수의 미래 실제 변동성에 대한 예측력을 비교하였으나 GARCH 모형과 변동성지수를 다룬 기존의 문헌의 결과와 같이 GARCH 모형은 변동성지수에 비해 설명력이 없다는 결론을 보였기 때문에 본문의 내용에는 포함하지 않았다.

2) 기존의 문헌에서는 일반적으로 미래 특정기간동안의 실현된 변동성을 “실현변동성”이라고 표현하고 있으나, 본 연구에서는 일중수익률 자료를 이용한 실현변동성(Realized Volatility)과의 구분을 위해 미래의 실현된 변동성을 “실제변동성(Actual Volatility)”이라고 명명하였다. 즉, 변동성지수의 미래예측력

부분의 연구에서는 표본표준편차를 실제변동성에 대한 추정치로 사용하고 있으나, Andersen, Bollerslev, Diebold and Ebens(2001), Barndorff-Nielsen and Shephard(2002), Meddahi(2002), Andersen, Bollerslev, Diebold and Labys(2003) 등의 연구에서는 일증자료를 이용한 실현변동성이 실제변동성을 더 잘 반영한다고 보고하고 있다. 이에 본 연구에서는 실제변동성에 대한 추정치로 표본표준편차와 실현변동성을 사용한 경우로 나누어 변동성지수의 예측력을 검증하였다.

두 번째로는 변동성지수의 산정에 있어 측정오차(measurement error)가 있는 경우를 고려하여 변동성지수의 예측력을 검증하고 변동성지수 산정에 사용되는 자료와 산정방식에 따라 예측력에 차이가 있는지 살펴보고자 한다. 일반적으로 변동성지수를 산정하는 방식은 근월물과 차근월물의 옵션거래자료를 이용한다. 그러나 지수산정에 사용되는 옵션의 거래량이 작아 시장상황을 적절히 반영하지 못하거나 옵션과 기초자산의 거래시간 불일치(non-synchronization) 등으로 인해 변동성지수에 측정오차가 존재할 수 있다. 이에 본 연구에서는 대변수 회귀분석(instrumental variable regression)을 이용하여 변동성지수에 측정오차가 있는 경우의 예측력에 대해 살펴보았다. 또한, 변동성지수 수준, 변동성지수 산정방법 및 사용자료에 따른 예측력의 강건성(robustness)을 검증하였다. 먼저 변동성지수 수준에 따른 예측력 차이를 살펴보기 위해 KOSPI200 지수의 변동성수준이 높았던 시기와 낮았던 시기로 나누어 예측력을 분석하였다. 그리고 지수산정방법에 따른 차이를 살펴보기 위해 공정분산스왑방식에 의한 변동성지수와 블랙-숄즈 내재변동성 방식을 이용한 변동성지수를 비교하였으며 공정분산스왑방식에서도 Jiang and Tian(2005)이 제안한 스플라인 방법(spline method)을 이용한 경우와 그렇지 않은 경우를 구분하였다. 마지막으로 변동성지수 산정에 사용되는 옵션자료에 따른 예측력의 차이를 살펴보기 위해 호가자료와 체결가 자료 사용에 따른 차이를 비교하였으며, 근월물 옵션자료만을 이용한 경우의 예측력을 추가로 검증하였다.

세 번째로는 고차적률을 고려하는 경우의 변동성지수의 예측력을 살펴보았다. Bakshi, Kapadia and Madan(2003)은 위험중립확률과 실제확률에서의 비중심적률의 관계를 살펴보고 실제확률의 2차 비중심적률에는 위험중립확률의 2차 비중심적률 뿐만

을 검증하기 위해서는 미래의 “실제변동성”에 대한 추정이 필요한데 본 연구에서는 기존의 문헌에서 일반적으로 사용하는 일정기간동안의 일간수익률을 이용한 표본표준편차(sample standard deviation)와 더불어 일간수익률 자료를 이용한 “실현변동성” 두 가지의 실제 변동성에 대한 추정치를 이용하였다.

아니라 고차적률이 영향을 미칠 수 있음을 보였다. 따라서 변동성지수의 실제변동성에 대한 예측력 검증에 고차적률을 고려하지 않을 경우에는 중요변수의 누락으로 인한 문제(omitted variable problem)가 발생할 수 있다. 이에 본 연구에서는 KOSPI200 지수의 위험중립 비중심 고차적률을 계산하고 이를 고려할 경우의 변동성지수 예측력에 대해 살펴보았다.

국내 내재변동성의 미래예측력을 검증한 연구결과로는 박영규·정창완(1999)의 연구와 이재하·권상수(2001)의 연구 등이 있으며, 변동성지수에 대한 예측력을 검증한 연구로는 김명직(1999), 장국현(2001) 및 이재하·정제련(2006)의 연구가 있다. 박영규·정창완(1999)의 연구는 1997년부터 1998년까지의 옵션자료를 이용하여 등가격옵션의 내재변동성과 베가에 의해 가중평균한 내재변동성의 예측성과를 역사적 변동성과 비교하였는데, 등가격옵션의 내재변동성이 다른 변수에 비해 높은 예측력을 보이고 있다. 이재하·권상수(2001)의 연구에서는 내재변동성 중 외가격옵션의 예측력이 뛰어난 것으로 나타났으며, 월별자료를 이용한 경우에는 내재변동성의 예측력이 향상되는 것으로 나타났다.

김명직(1999)의 연구에서는 근월물 옵션자료만을 이용한 내재변동성과 GARCH 모형에 의한 변동성을 비교하였으며, 장국현(2001)의 연구에서는 변동성에 대한 통계적 모형인 EWMA 모형이나 GARCH 모형과 내재변동성 및 블랙-숄즈 방식의 변동성지수를 이용하여 예측력을 비교하였다. 한편, 이재하·정제련(2006)의 연구에서는 변동성지수를 산출하고 이를 역사적 변동성과 비교하였다.

이러한 기존의 국내 연구들은 대부분 실제변동성에 대한 추정치로 표본표준편차를 사용하고 있다는 공통점을 가지고 있다. 반면, 본 연구는 측정오차를 고려하는 경우나 실현변동성을 실제변동성의 추정치로 사용하는 경우 및 다양한 지수산정방식에 따른 예측력을 비교하였으며, 1999년부터 2006년까지의 기간 동안의 자료를 사용함으로써 추정의 효율성을 높이하고자 하였다. 또한, 일종의 특정시점 가격자료를 이용함으로써 종가를 사용함에 따른 비동시성 문제(non-synchronization problem)를 해결하고자 하였으며, Bakshi, Kapadia and Madan(2003)이 제시한 위험중립 및 실제 확률측도하에서의 비중심적률의 관계식을 고려하여 위험중립확률에서의 3차 비중심적률이 실제 2차 비중심적률에 미치는 영향에 대해서 살펴보았다.

아래의 제 II장에서는 변동성지수와 실제변동성에 대한 추정치의 이론적 배경에 대해서 살펴보고 제 III장에서는 실증분석결과에 대해서 살펴보겠다.

II. 이론적 배경

1. 변동성지수의 계산

변동성지수의 계산방법은 블랙-숄즈 내재변동성을 이용한 계산방법(이하 VXO 지수)과 공정분산스왑을 이용한 계산방법(이하 VIX 지수)으로 나뉜다. 블랙-숄즈 내재변동성을 이용한 방법은 미국의 CBOE 거래소에서 1993년부터 계산하였으며 블랙-숄즈 옵션평가모형에 따른 내재변동성을 이용하는 특징을 가지고 있다. 반면, 공정분산스왑방식의 경우 특정의 옵션평가모형을 사용하지 않고 옵션의 가격을 이용하여 추정하는 방법으로 2003년 이후 변동성지수산출에 사용되어왔다. 공정분산스왑방식은 분산스왑(variance swap) 거래에 대한 이론적 가격으로 블랙-숄즈 내재변동성을 이용한 방법에 비해 이론적 근거가 명확하고 특정 옵션평가모형에 의존하지 않으며, 옵션포트폴리오를 이용하여 변동성지수를 복제할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 이에 본 연구에서는 공정분산스왑방식에 따른 변동성지수를 바탕으로 미래 실현변동성에 대한 예측력을 검증하고자 한다.

(1) CBOE 변동성지수의 계산방식

본 절에서는 CBOE에서 발표하는 변동성지수의 계산방식에 대해서 살펴보도록 하겠다. CBOE는 1993년부터 변동성지수를 발표하기 시작하였는데 초기에는 블랙-숄즈 내재변동성을 이용한 변동성지수인 VXO지수를 발표하였다. VXO지수는 30일 만기의 지수산정을 위해 근월물과 차근월물의 옵션자료를 이용하며 현재주가를 기준으로 인접한 두 개의 콜옵션과 풋옵션을 사용한다. 따라서 VXO지수에서는 총 8개 옵션의 내재변동성을 이용하여 변동성지수를 산정하게 되며 이를 정리하면 <표 1>과 같다.

<표 1>의 8가지 내재변동성에 대해 식 (1)과 같이 각각의 행사가격에 따른 내재변동성을 콜옵션과 풋옵션의 내재변동성 평균으로 구하고, 이를 현재주가와 행사가격을 이용하여 각 만기의 등가격 기준 내재변동성을 산정하게 된다.

$$\sigma_i^{X_{l(u)}} = \frac{\sigma_{c,i}^{X_{l(u)}} + \sigma_{p,i}^{X_{l(u)}}}{2} \quad (1)$$
$$\sigma_i = \sigma_i^{X_l} \left(\frac{X_u - S}{X_u - X_l} \right) + \sigma_i^{X_u} \left(\frac{S - X_l}{X_u - X_l} \right), \quad i = 1, 2$$

그리고 거래일 기준 22일 만기의 내재변동성을 구하기 위해 식 (1)을 통해 구한 각 만기의 내재변동성을 선형보간법(linear interpolation)으로 근사하여 VXO 지수를 산정하게 된다. 이 때 VXO 지수는 22거래일 기준의 지수산정을 위해 각 변동성을 거래일 기준으로 변환하게 되므로 산정된 지수는 상향편의(upward bias)를 갖게 된다.³⁾ 이러한 VXO 지수는 가상 만기의 등가적 옵션에 내재되어 있는 변동성을 블랙-숄즈 모형과 시장에서 거래되는 옵션자료를 이용하여 근사(approximation)한 것으로 볼 수 있다.

<Table 1> Black-Scholes implied volatilities used in the VXO construction

In the VXO index, 8 Black-Scholes implied volatilities of the nearest and the second-nearest option are used. These implied volatilities are weighted to represent the implied volatility of a 30-calendar day(22 trading day) at-the-money option.

Exercise Price	Nearest Contract		Second-Nearest Contract	
	Call	Put	Call	Put
$X_i (< S)$	$\sigma_{c,1}^{X_i}$	$\sigma_{p,1}^{X_i}$	$\sigma_{c,2}^{X_i}$	$\sigma_{p,2}^{X_i}$
$X_u (\geq S)$	$\sigma_{c,1}^{X_u}$	$\sigma_{p,1}^{X_u}$	$\sigma_{c,2}^{X_u}$	$\sigma_{p,2}^{X_u}$

반면, 2003년 이후 CBOE에서 발표하고 있는 VIX지수는 블랙-숄즈 내재변동성을 사용하는 VXO 지수와 달리 공정분산스왑방식을 사용하여 산정되고 있는데, 공정분산스왑방식에 따른 VIX지수는 30일 만기의 옵션에 내재되어 있는 변동성을 측정하는 것으로 이를 위해 가장 인접한 2개 만기의 옵션가격을 사용한다. 지수산정을 위해 사용되는 옵션은 외가격 옵션(out-of-the-money option)이며 이를 구분하기 위한 기준가격인 선도가격은 식 (2)와 같이 설정한다.

$$F_i = K_i^{ATM} + e^{rT_i} [C(K_i^{ATM}) - P(K_i^{ATM})], \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

여기서 K_i^{ATM} 은 T_i 만기의 콜옵션과 풋옵션의 가격차이가 가장 작은 행사가격이며 $C(K_i^{ATM})$ 와 $P(K_i^{ATM})$ 는 해당 행사가격의 콜옵션과 풋옵션의 가격이다. 이와

3) Carr and Wu(2006) 참조.

같이 2개 만기에 대해 선도가격이 정해지면 식 (3)을 이용하여 각 만기의 변동성지수를 산출한다.

$$\sigma_1^2 = \frac{2}{T_1} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT_1} Q(K_i) - \frac{1}{T_1} \left[\frac{F_1}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (3)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{2}{T_2} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT_2} Q(K_i) - \frac{1}{T_2} \left[\frac{F_2}{K_0} - 1 \right]^2$$

여기서 $Q(K_i)$ 는 행사가격이 K_i 인 옵션의 매수 및 매도호가의 평균값이며 ΔK_i 는 행사가격 사이의 간격으로 $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$ 로 정의된다. 그리고 각 만기의 변동성지수 산출에 사용되는 옵션은 선도지수보다 작은 행사가격 중 최대값인 K_0 를 기준으로 외가격 옵션⁴⁾과 K_0 가 행사가격인 콜옵션과 풋옵션의 평균값이다. 이와 같이 2개 만기의 변동성지수를 산출한 후 식 (4)와 같은 선형보간법을 이용하여 30일 만기의 변동성지수로 변환한다.

$$\sigma = \sqrt{\left\{ T_1 \sigma_1^2 \left[\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] + T_2 \sigma_2^2 \left[\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right] \right\} \times \frac{N_{365}}{N_{30}}} \quad (4)$$

공정분산스왑방식을 이용한 VIX지수의 경우 블랙-숄즈 내재변동성을 사용한 VXO 지수와 달리 특징의 옵션가격결정모형을 가정하지 않는 장점을 가지고 있다. 또한, 변동성지수가 옵션 등의 포트폴리오로 이기 때문에 변동성지수 관련 파생상품의 거래에서 장점이 될 수 있다. 공정분산스왑방식에 따른 변동성지수는 분산스왑에 이론적 기반을 두고 있는데 다음 절에서는 공정분산스왑방식에 의한 변동성지수의 이론적 배경에 대해서 살펴보도록 하겠다.

(2) 공정분산스왑을 이용한 변동성지수의 이론적 배경

공정분산스왑방식을 이용한 VIX지수는 분산스왑에 대한 공정가격에 대한 분석에 기반을 두고 있다. 본 절에서는 Demetri, Derman, Kamel and Zou(1999)와 Bakshi,

4) 즉, $K_i > F$ 인 경우에는 콜옵션이 사용되며 $K_i < F$ 인 경우에는 풋옵션이 사용된다.

Kapadia and Madan(2003)의 논의를 중심으로 VIX지수의 이론적 배경에 대해 살펴보도록 하겠다.

먼저 분산스왑이란 미래 일정기간 동안에 실현된 분산에 대한 선도계약으로 만기시점에 식 (5)와 같은 지급액을 지급한다.

$$(\sigma_R^2 - K_{VAR}) \times N \quad (5)$$

여기서 N 은 분산스왑에서의 액면금액(notional amount)을 의미하며, σ_R^2 과 K_{VAR} 는 각각 실현된 실제분산 및 분산스왑의 행사가격을 의미한다. 이러한 분산스왑의 거래시점에서의 공정가치는 0이므로 식 (6)이 성립한다.

$$E^Q[e^{-rT}(\sigma_R^2 - K_{VAR})] = 0 \Leftrightarrow K_{VAR} = E^Q[\sigma_R^2] \quad (6)$$

이 때 주가의 확률과정을 식 (7)과 같이 가정하면 식 (6)은 식 (8)과 같이 표현될 수 있으며, 식 (8)을 Demetri, Derman, Kamel and Zou(1999)의 논의에 따라 전개하면 식 (9)와 같이 분산스왑의 공정가치가 0이 되는 행사가격을 구할 수 있다.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(\cdot)dt + \sigma(\cdot)dW_t \quad (7)$$

$$K_{VAR} = E^Q[\sigma_R^2] = E^Q\left[\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(\cdot)dt\right] = \frac{2}{T} E^Q\left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \ln \frac{S_T}{S_0}\right] \quad (8)$$

$$K_{VAR} = \frac{2}{T} \left[rT - \ln \frac{S^*}{S_0} - \left\{ \frac{F}{S^*} - 1 \right\} + e^{rT} \int_0^{S^*} \frac{1}{K} P(K) dK + e^{rT} \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K} C(K) dK \right] \quad (9)$$

여기서 F 는 선도지수이며 $P(K)$ 와 $C(K)$ 는 각각 행사가격이 K 인 풋옵션과 콜옵션의 가격을 의미한다. VIX지수를 계산하는 식인 식 (3)은 식 (9)에서 $S^* = K_0$ 로 두고 $\ln \frac{F}{S^*}$ 를 2차 테일러 전개(Taylor expansion)한 후 이산화함으로써 얻어진다. 이 때 특정의 행사가격에 대한 옵션만이 실제 거래되기 때문에 실제 거래옵션가격을 이용하여 VIX지수를 계산하기 위해 $S^* = K_0$ 로 두고 적분을 이산화한다.

만약 모든 행사가격의 옵션이 모두 거래되고 있다면 식 (9)에서 $S^* = S_0 e^{rT}$ 로 둘 수 있으며 이 경우에는 식 (9)은 식 (10)과 같이 간단히 표현될 수 있다.

$$K_{VAR} = \frac{2}{T} \left[e^{rT} \int_0^{S^*} \frac{1}{K} P(K) dK + e^{rT} \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K} C(K) dK \right] \quad (10)$$

Bakshi, Kapadia and Madan(2003)에 따르면 식 (10)는 위험중립확률에서의 2차 중심적률(central moment)을 의미한다. 이를 살펴보기 위해 먼저 위험중립확률에서의 2차 중심적률을 비중심적률로 표현하면 식 (11)과 같다. 여기서 μ_i 와 $\tilde{\mu}_i$ 는 i 차 비중심적률과 i 차 중심적률을 의미하며 $R(T)$ 는 $R(T) \equiv \ln S(T) - \ln S_0$ 으로 정의된다.

$$\tilde{\mu}_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = E^Q[R(T)^2] - [E^Q(R(T))]^2 \quad (11)$$

식 (11)에서 i 차 비중심적률을 구하기 위해서는 유계인 기댓값을 갖는 임의의 지불함수는 외가격 유러피언 콜옵션과 풋옵션으로 스패(span) 될 수 있다는 Carr and Madan(2001)의 논의를 이용할 수 있다. Carr and Madan(2001)은 임의의 2차까지 미분가능하고 연속인 함수, $H(S) \in C^2$ 는 식 (12)과 같이 스패 가능함을 보였다.

$$\begin{aligned} H(S) = & H(S^*) + (S - S^*)H_S(S^*) + \int_{S^*}^{\infty} H_{SS}(K)(S - K)^+ dK \\ & + \int_0^{S^*} H_{SS}(K)(K - S)^+ dK \end{aligned} \quad (12)$$

그리고 식 (12)의 양변에 위험중립 가치평가 이론을 적용하면 가상의 증권의 무차익조건(no arbitrage condition)에서의 평가식을 식 (13)과 같이 구할 수 있다. 아래에서 $C(K)$ 와 $P(K)$ 는 각각 만기시점까지 남은 시간이 T , 행사가격 K 인 콜옵션과 풋옵션의 현재시점에서의 가치이며, $H_S(S^*)$ 와 $H_{SS}(K)$ 는 임의의 주식 가격 S^* 와 행사 가격 K 에서의 지불함수 $H(S)$ 의 S 에 대한 1차 및 2차 미분값이다.

$$\begin{aligned} E^Q[H(S)] = & H(S^*) - S^* H_S(S^*) + H_S(S^*) S(t) e^{rT} \\ & + e^{rT} \int_{S^*}^{\infty} H_{SS}(K) C(K) dK + e^{rT} \int_0^{S^*} H_{SS}(K) P(K) dK \end{aligned} \quad (13)$$

이러한 Carr and Madan(2001)의 논의를 이용하여 위험중립확률하에서의 1차 및 2차 비중심적률을 표현하면 식 (14)와 같다. 그리고 식 (14)의 비중심적률에 대한 식과 식 (11)의 2차 중심적률에 대한 정의를 이용하면 식 (15)와 같이 2차 중심적률을 표현할 수 있으며 이는 분산스왑의 공정행사가격과 동등한 표현이다.

$$E^Q[R(T)] = rT - e^{rT} \left[\int_F^\infty \frac{1}{K^2} C(K) dK + \int_0^F \frac{1}{K^2} P(K) dK \right] \quad (14)$$

$$\begin{aligned} E^Q[R(T)^2] &= (rT)^2 + 2e^{rT} \left[\int_F^\infty \frac{1}{K^2} \left(1 - \ln \frac{K}{S_0} \right) C(K) dK \right. \\ &\quad \left. + \int_0^F \frac{1}{K^2} \left(1 - \ln \frac{K}{S_0} \right) P(K) dK \right] \\ \tilde{\mu}_2 &= 2e^{rT} \left[\int_F^\infty \frac{1}{K^2} C(K) dK + \int_0^F \frac{1}{K^2} P(K) dK \right] \end{aligned} \quad (15)$$

따라서 미국 VIX지수의 계산방식은 위험중립확률하에서의 2차 중심적률 혹은 분산스왑의 가치를 0으로 만들어주는 행사가격을 실제 VIX지수 산정에 사용가능한 옵션으로 이산화하여 표현한 것으로 볼 수 있다.

2. 변동성지수의 수치적 계산

앞 절에서 살펴본 바와 같이 VIX지수는 실제 거래옵션으로부터 변동성지수를 산정하기 위해 이산화방법을 사용하고 있으며 이로 인해 이론적인 전개에서는 나타나지 않는 항이 VIX지수의 계산식에 나타나게 된다. 뿐만 아니라 이론적으로는 전체 행사가격의 옵션가격을 사용하여야 하지만 실제로 거래되는 옵션은 제한적이기 때문에 일정범위를 넘어서는 행사가격의 옵션가격은 사용할 수 없다. Jiang and Tian(2005)은 이러한 이산화와 절단화로 인해 VIX지수의 계산에 오차가 발생할 수 있다고 주장하였다. Jiang and Tian(2005)에 따르면 확률적 변동성(stochastic volatility)과 점프(jump)현상을 고려한 모형을 이용하여 시뮬레이션을 한 결과 -198~+79bp(basis point)의 오차를 나타내었다. 이러한 오차를 극복하기 위해 Jiang and Tian(2005)은 스플라인(spline)방법을 이용한 변동성지수 산출방식을 제안하였다. 본 절에서는 Jiang and Tian(2005)의 스플라인 방법에 따른 변동성지수 산출방식에 대해 살펴보도록 하겠다.

Jiang and Tian(2005)은 시장에서 거래되는 외가격 옵션의 블랙-숄즈 내재변동성을 추정하고 스플라인 방법으로 행사가격에 대한 내재변동성 함수를 추정하였다. 그리고, 행사가격에 따른 내재변동성 함수를 이용하여 모든 행사가격에서의 내재변동성을 추정하고, 블랙-숄즈 공식을 통해 이를 다시 옵션 가격으로 변환시킴으로써 모든 연속적인 행사가격에서의 옵션 가격을 얻었다. 따라서 변동성지수 산출에 있어 행사가격의 제한에 따른 오차를 스플라인 방법을 통해 해결함으로써 모든 행사가격의 옵션가격을 이용하여 변동성지수를 산출할 수 있다.

보다 상세히 스플라인 방법을 통한 계산방법을 살펴보면 다음과 같다. 우선 주어진 잔존만기 T 에 대하여 N 개 행사가격의 옵션이 거래되고 있다고 가정하자. 이 N 개의 행사가격 중 가장 작은 값과 큰 값을 각각 K_L, K_U 라 하고 $0 < K_L = K_1 < K_2 < \dots < K_N = K_U < \infty$ 라 하자. 그리고 N 개의 행사가격의 옵션들 중 콜옵션과 풋옵션의 가격 차이가 제일 작은 옵션 가격을 이용하여 선도 지수 수준 F_0 를 계산한다. 이는 VIX지수를 산정하기 위해 선도지수를 계산할 때 사용한 방식과 동일한 방식이다.⁵⁾

이 선도 지수 수준 F_0 를 등가격 옵션의 행사가격으로 설정하여 콜옵션과 풋옵션에 대해 각각의 외가격 옵션들의 행사가격을 추출한다. 즉, 계산에 사용되는 풋옵션은 행사가격이 $0 < K_L = K_1 < K_2 < \dots < K_n = K^*$ 인 옵션들이며 콜옵션은 $K_{n+1} < \dots < K_N = K_U$ 를 행사가격으로 갖는 옵션들이다. 여기서 K^* 는 F_0 보다 작은 행사가격 중 가장 높은 행사가격이다.

다음으로는 이렇게 추출된 외가격 풋옵션과 콜옵션의 블랙-숄즈 내재변동성을 계산한다. 그리고 식 (15)의 적분에 필요한 연속적인 행사가격의 옵션 가격 자료를 만들기 위해 콜옵션과 풋옵션의 내재변동성들을 2차 스플라인을 통해 내삽하여 풋옵션과 콜옵션 행사가격에 대한 내재변동성의 함수 $I_p(K)$ 와 $I_c(K)$ 를 도출 한다.⁶⁾ 이렇게 내삽된 내재 변동성함수를 이용하여 블랙-숄즈 옵션평가식을 통해 옵션 가격으로 전환하면 2차적률 계산에 필요한 연속적인 행사가격에 대한 외가격 옵션 가격을 얻을 수 있다.

5) 식 (2) 참조.

6) 2차 스플라인을 사용할 경우 동일 만기에서 3개 이상의 옵션 가격 자료가 있어야 한다. 만약 이를 만족시키지 못할 경우 본 연구에서는 내가격 옵션의 내재변동성을 포함하여 내재변동성 함수를 추정하였다. 다른 대안으로는 풋콜패리티(put-call parity)를 이용하여 내가격 콜옵션으로 외가격 콜옵션자료를 만들어 내는 방안이 있으나 실제 자료를 통해 적용해본 결과 이 방법으로는 자료문제를 개선시키지 못하였다.

본 연구에서는 식 (15)의 적분 계산은 수치적분(numerical integration)을 이용하였으며 구체적으로는 트라페조달 방식(trapezodal rule)을 적용하여 식 (16)과 같이 계산하였다.

$$V(T) \approx \frac{2}{\tau} e^{rT} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\Delta K_i}{2} \left[\frac{\hat{P}(K_i)}{K_i^2} + \frac{\hat{P}(K_{i-1})}{K_{i-1}^2} \right] + \sum_{i=1}^m \frac{\Delta K_i}{2} \left[\frac{\hat{C}(K_i)}{K_i^2} + \frac{\hat{C}(K_{i-1})}{K_{i-1}^2} \right] \right\} \quad (16)$$

여기서 $\hat{P}(K)$ 과 $\hat{C}(K)$ 는 각각 주어진 행사가격 K 에 대하여 내재변동성 함수 $I_p(K)$ 와 $I_c(K)$ 를 통해 얻어진 변동성을 이용하여 계산된 블랙-숄즈 옵션가격이며 $\Delta \hat{K}_i = \hat{K}_i - \hat{K}_{i-1}$ 이다.

3. 실제변동성의 측정

변동성지수의 미래예측력을 검증하기 위해서는 실제변동성에 대한 추정이 필요하다. 일반적으로 실제변동성은 식 (17)과 같이 일정기간동안의 일간수익률을 이용한 표본분산(sample variance)으로부터 얻어질 수 있다.

$$SV_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}, \quad \bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i \quad (17)$$

여기서 R_i 는 일정기간 동안의 일간수익률로 $R_i \equiv \ln(S_i/S_{i-1})$ 로 정의되며 n 은 일간수익률의 개수이다. 따라서 SV_n 은 n 기간동안의 표본분산에 제곱근(square root)을 취하여 변동성지수와 같이 표준편차의 개념으로 나타낸 것이다.⁷⁾

실제변동성을 측정하는 방법에는 앞에서 설명한 표본표준편차(sample standard deviation)의 개념을 이용한 방법 이외에 일중자료를 이용한 실현변동성(realized vola-

7) 이러한 표본표준편차는 실제로는 표준편차에 대한 불편추정량이 아니며, 일간수익률의 정규분포를 가정에서 불편성을 보장하기 위해서는 수정계수(correction factor)가 필요하다(Fleming(1998) 참조).

tility)의 개념으로 실제변동성을 측정하는 방법이 있다. Andersen, Bollerslev, Diebold and Labys(2003)는 2차변량(quadratic variation)의 개념을 이용하여 일중 자료의 정보를 효율적으로 반영할 수 있는 방법을 고안하였는데, 아래에서는 이에 대해 살펴보고자 한다. 먼저 준마팅게일 확률과정(semi-martingale process)을 따르는 임의의 변수 $X(t)$ 의 2차변량의 확률과정은 식 (18)과 같이 정의된다.

$$[X, X]_t \equiv X(t)^2 - 2 \int_0^t X(s_-) dX(s), \quad 0 < t \leq T \quad (18)$$

여기서 시구간인 $[0, T]$ 를 임의 분할하는 증가하는 수열 $0 = \tau_{m,0} \leq \tau_{m,1} \leq \dots$ 을 가정하고 이 수열이 $\sup_{j \geq 1} \tau_{m,j} \rightarrow T$ 과 $\sup_{j \geq 0} (\tau_{m,j+1} - \tau_{m,j}) \rightarrow 0$ 을 만족한다고 하면 1의 확률로 식 (19)이 성립한다.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j \geq 1} [X(t \wedge \tau_{m,j}) - X(t \wedge \tau_{m,j-1})]^2 \rightarrow [X, X]_t \quad (19)$$

이러한 2차변량의 특성을 이용하여 식 (20)과 같은 실현 변동성의 정의가 가능하다. 여기서 $r(t, h) = p(t) - p(t-h)$, $0 \leq h \leq t \leq T$ 이고 $p(t)$ 는 가격에 자연로그를 취한 값이다. 따라서 일정기간동안의 일중수익률 자료를 이용하는 경우 실제변동성의 추정치인 실현변동성은 식 (21)과 같이 표현될 수 있다.

$$v^2(t, h; n) \equiv \sum_{i=1, \dots, n} r\left(t - h + \frac{i}{n}h, \frac{h}{n}\right)^2 \quad (20)$$

$$= r\left(t - h + \frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right)^2 + \dots + r\left(t - \frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right)^2 + r\left(t, \frac{h}{n}\right)^2$$

$$RV = \sqrt{\sum_{j=1}^n R_j^2} \quad (21)$$

식 (21)에서 R_j 는 일중자료를 이용한 연속수익률을 의미하며 n 은 일중수익률의 개수를 의미한다. 이와 같이 추정된 실현변동성은 일간자료를 이용하여 계산한 표본 표준편차에 비해 실제변동성을 더 정확히 추정한다고 알려져 있다.

Ⅲ. 변동성지수의 측정 및 실증분석

1. KOSPI200 변동성지수의 예측력 검증

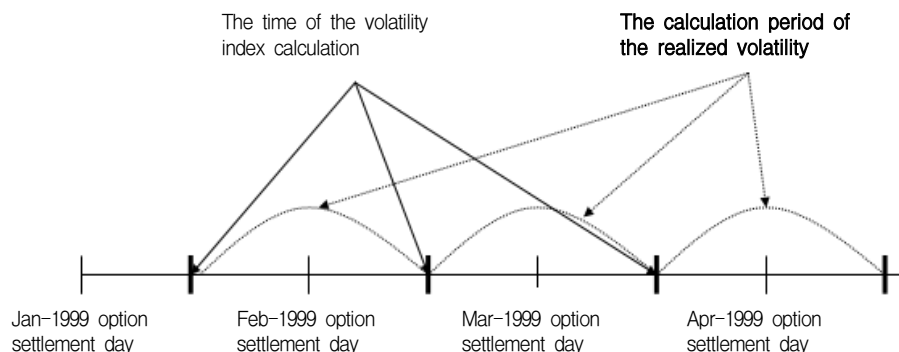
(1) 변동성지수와 실제변동성의 기초통계량

변동성지수는 시장에서 거래되는 옵션가격을 이용하여 계산할 수 있다. 본 연구에서는 실제 국내에서 활발히 거래되는 KOSPI200 지수옵션의 1999년부터 2006년까지의 거래 자료를 이용하여 변동성지수를 계산하였으며, 변동성지수의 계산을 위해서는 스플라인 방법에 의해 추정된 내재변동성 함수를 이용하였다.

일반적으로 변동성지수는 근월물과 차근월물 옵션자료를 이용하여 각각의 만기에 해당하는 변동성지수를 추정하고 이를 내삽하여 30일 만기의 변동성으로 산정한다. 그러나 일별로 산출된 특정기간의 변동성지수와 실제변동성을 이용하여 예측력을 검증할 경우 추정기간의 중첩으로 인해 오차항(error term)의 자기상관관계가 높게 나타나는 문제점을 가지고 있다. 실제로 Christensen and Prabhala(1998)는 일별자료를 이용하여 내재변동성의 실제변동성에 대한 예측력을 검증할 경우 오차항의 자기상관관계가 높아지지만 월별자료를 이용할 경우에는 이러한 현상이 발생하지 않는다는 것을 보였다. 오차항의 자기상관관계가 높아지게 되면 회귀계수에 대한 일치추정량(consistent estimator)을 얻을 수 없으며 의사회귀분석(spurious regression)의 가능성이 높아지게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 본 연구에서는 추정기간이 중첩되지 않도록 월별 변동성지수와 월별 실제변동성을 추정하였다. 구체적으로는 <그림 1>과 같이 매월의 옵션만기일 중간시점을 기준으로 근월물과 차근월물 옵션의 2시 기준 체결가를 이용하여 다음 중간시점까지의 변동성지수를 산출하고 동일한 기간의 실제변동성을 추정하였다. 이 때 매월 산출된 변동성지수의 만기는 실제변동성을 계산하는 기간과 일치하도록 하였다. 따라서, 매일 일정만기의 변동성지수가 산출되는 미국 VIX지수와 달리 본 연구에서 추정된 변동성지수의 만기는 지수계산시점에 따라 달라진다.

그리고 실제변동성의 추정치는 일간자료를 이용한 표본표준편차와 일중자료를 이용한 실현변동성을 사용하였다. 표본표준편차의 경우 실제변동성 산정기간의 일별 2시의 기초자산가격을 이용하여 추정하였으며, 실현변동성의 경우에는 동일한 기간동안의 10분 단위 수익률을 이용하여 추정하였다.

<Figure 1> Calibration of non-overlapping volatility index and actual volatilities(Actual volatilities indicate realized volatilities and sample standard deviations)



<Table 2> Descriptive statistics of non-overlapping volatility index and actual volatilities

<Table 2> presents the sample average(Mean), standard deviation(Std.), skewness, excess kurtosis, Jarque-Bera statistic(JB statistic), and first-order autocorrelation(1st autocorr.) on the levels and first-order differences of the volatility index(constructed from KOSPI200 index options data), the sample standard deviation, and the realized volatility of Andersen et al.(2003) (constructed from KOSPI200 index return). The sample period covers from the year 1999 to 2006.

1	Volatility Level			First-order difference		
2	Volatility Index	Sample Standard deviation	Realized volatility	Volatility Index	Sample Standard deviation	Realized volatility
Mean	0.3122	0.2883	0.2980	-0.0046	-0.0029	-0.0029
Std.	0.1043	0.1216	0.1176	0.0527	0.0943	0.0797
Skewness	0.5101	0.6931	0.5723	0.5301	0.5035	0.0543
Kurtosis	-0.3456	0.01194	-0.4770	2.1582	1.0898	2.7318
JB statistic	4.5928	7.6069**	6.0858**	22.8867*	8.7141**	29.5860*
1st autocorr.	0.8235	0.6887	0.7566	-0.1551	-0.3114	-0.3366

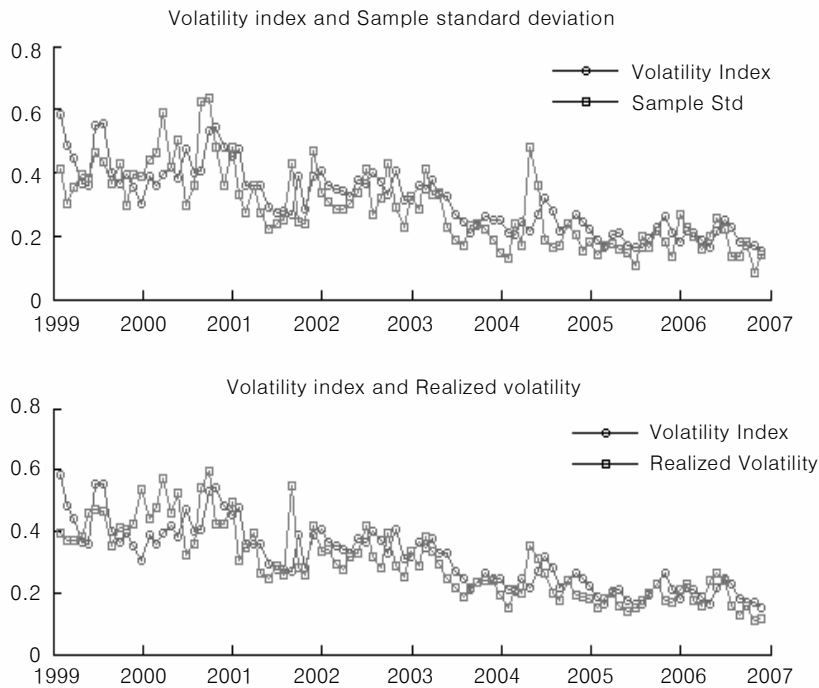
Note) * : 1% significance level, ** : 5% significance level.

<그림 2>은 KOSPI200 지수에 대해 1999년부터 2006년까지 월별로 계산된 변동성지수와 실제변동성의 추이를 나타낸 것이며, 변동성지수와 실제변동성 추정치에 대한 기초통계량은 <표 2>에 나타나 있다. <그림 2>에서 알 수 있듯이 1999년 이후의 변동성지수와 실제변동성은 지속적으로 감소하는 모습을 나타내고 있다. 또한, 변동

성지수는 실제변동성에 비해 평균적으로 약 2% 높게 나타나고 있으며 이는 실제변동성의 추정치에 따라서 큰 차이를 나타내지 않는다. 한편, 실제변동성의 추정치인 표본 표준편차와 실현변동성의 수준변수는 비슷한 통계량을 나타내고 있으나, 차이변수에 있어서는 실현변동성의 표준편차와 왜도가 낮고 첨도는 크게 나타나고 있다. 그리고 변동성지수와 실제변동성의 1차 자기상관계수는 0.68~0.82의 수준을 나타내고 있다.

<Figure 2> History of the volatility index and actual volatilities of KOSPI200 index.

The volatility index is constructed from KOSPI200 index options data. The sample standard deviation and the realized volatility of Andersen et al.(2003) are used as proxies for the actual volatility on KOSPI200 index return. The sample period covers from the year 1999 to 2006.



(2) 변동성지수의 실제변동성 예측력

본 절에서는 앞에서 구한 월별 변동성지수와 실제변동성의 추정치인 실현변동성 및 표본표준오차를 이용하여 실제변동성에 대해 변동성지수가 예측력을 갖는지를 검증하고자 식 (22)와 같은 회귀분석을 수행하였다.

$$\begin{aligned}
SV_t &= \alpha + \beta IV_t + \gamma SV_{t-1} + \epsilon_t \\
RV_t &= \alpha + \beta IV_t + \gamma RV_{t-1} + \epsilon_t
\end{aligned}
\tag{22}$$

여기서 IV_t 는 t 시점의 변동성지수이며 SV_t 와 RV_t 는 각각 일간 수익률자료를 이용한 표본표준편차와 10분 단위 일중 수익률자료를 이용한 실현변동성을 의미한다. 그리고 식 (22)의 회귀식에서 α 와 β 계수가 각각 0과 1인 귀무가설을 기각하지 못한다면 변동성지수는 실제변동성에 대한 불편추정량(unbiased estimator)으로 볼 수 있기 때문에 이에 대한 검증을 수행하였다.

<Table 3> Predictability test of the volatility index(total period)

<Table 3> presents the regression results of equation (22) where IV_t is the volatility index at time t ; SV_t (Sample Std.) is the sample standard deviation of daily KOSPI200 index returns; RV_t (Realized Volatility) is the realized volatility based on intra-day ten-minute KOSPI200 index returns. The sample period covers from the year 1999 to 2006.

Actual Volatilities	α	β	γ	$adj. R^2$	F^*	F^*
Sample Std.	0.0190 (0.0268)	0.8626* (0.0813)		0.5425	5.44*	2.85
Realized Volatility	0.0290 (0.0248)	0.8617* (0.0754)		0.5797	3.33**	3.36
Sample Std.	0.0240 (0.0267)	0.6379* (0.1624)	0.2240 (0.1405)	0.5500	2.59	4.97**
Realized Volatility	0.0329 (0.0239)	0.4494* (0.1571)	0.4258* (0.1439)	0.6120	6.21*	12.29*

Note) * : F statistic on $H_0: \alpha = 0, \beta = 1$, † : F statistic on $H_0: \beta = 1$,

*: 1% significance level, **: 5% significance level.

<표 3>은 1999년부터 2006년까지의 전체기간에 대한 회귀분석결과를 나타낸 것이다. 먼저 실제변동성의 과거변수를 포함하지 않은 회귀분석에서는 표본표준편차에 비해 실현변동성에 대한 설명력이 높게 나타났으며, 두 경우 모두 변동성지수의 불편성은 기각되는 것으로 나타났다. 따라서 변동성지수는 실제변동성에 대한 불편추정치의 성질은 가지고 있지 않지만 회귀계수의 수준과 설명력으로 볼 때 예측력을 가지고 있는 것으로 판단할 수 있다. 한편, 실제변동성의 과거변수를 포함한 회귀분석 결과에서는 실제변동성에 따라 다른 결과를 나타내고 있다. 먼저 표본표준편차를 사

용한 경우에는 과거 표본표준편차의 회귀계수는 비유의적이지만 변동성지수의 회귀계수는 유의적으로 나타나 역사적 변동성에 비해 변동성지수가 설명력이 높은 것으로 나타났다. 그러나 실현변동성을 사용한 경우에는 두 변수에 대한 회귀계수가 모두 유의적으로 나타났으며, 회귀계수의 수준도 비슷한 모습을 나타내고 있다.

전체적으로 변동성지수의 실제변동성에 대한 설명력과 회귀계수의 수준으로 볼 때 변동성지수는 실제변동성에 대해 예측력을 가지고 있는 것으로 판단된다. 특히, 실제변동성이 표본표준편차인 경우에는 변동성지수가 표본표준편차의 과거변수에 비해 높은 예측력을 가지고 있는 것으로 나타났다. 그러나 실현변동성을 실제변동성의 추정치로 사용하는 경우에는 실현변동성의 과거변수와 비슷한 수준의 예측력을 나타내는 것으로 나타났다.

(3) 변동성지수 수준에 따른 예측력 검증

앞에서의 변동성지수의 실제변동성에 대한 예측력 검증결과에 따르면 변동성지수는 실제변동성을 예측하는데 있어 유용한 수단이 될 수 있는 것으로 나타났다. 그러나, <그림 2>의 변동성지수 추이를 살펴보면 1999년 이후의 변동성지수는 지속적으로 하락하는 모습을 나타내고 있어 분석기간의 초기와 후기의 변동성지수 수준에 차이가 있다. 이에 본 절에서는 변동성지수 수준에 따라 변동성지수의 예측력에 차이가 나타나는지 살펴보기 위해 전체기간을 초기와 후기로 나누고 각각의 기간에 대한 회귀분석을 통해 변동성지수 수준에 따라 실제변동성 예측력에 차이가 있는지 살펴보고자 한다.

이를 위해 전체기간을 변동성수준이 높았던 1999년부터 2002년까지와 변동성수준이 낮았던 2003년부터 2006년까지로 나누고 각각의 기간에 대해 식 (22)와 같은 회귀분석을 수행하였으며 그 결과는 <표 4>와 같다.

회귀분석결과를 살펴보면 변동성수준인 높았던 초기에 비해 변동성수준이 낮은 후기의 변동성지수의 실제변동성에 대한 설명력이 높게 나타나며 회귀계수도 증가하는 것을 확인할 수 있으나, 변동성지수의 불편성은 모든 기간에 대해 기각되는 것으로 나타났다.

하지만, 변동성수준이 높았던 시기가 국내 옵션시장의 초기에 해당하고 변동성수준이 낮았던 시기가 최근의 국내 옵션시장이었다는 점을 고려해 볼 때 이러한 결과가 반드시 변동성수준에 따라 변동성지수의 예측력이 달라지는 것을 의미하지는 않는

것으로 생각된다. 즉, 국내 옵션시장의 초기에는 유동성이 충분히 확보되지 않아 옵션 시장이 시장상황을 정확히 반영하지 못하였다면 변동성지수에 측정오차가 포함되었을 가능성이 높으며 이것이 설명력을 떨어뜨리는 결과로 나타났을 수 있다.

<Table 4> Predictability test of the volatility index(sub-period)

Table 4 presents the regression results of equation (22) with sub-periods (the total sample period covers from the year 1999 to 2006) where IV_t is the volatility index at time t ; SV_t (Sample Std.) is the sample standard deviation of daily KOSPI200 index returns; RV_t (Realized Volatility) is the realized volatility based on intra-day ten-minute KOSPI200 index returns.

sub-period	Actual Volatilities	α	β	γ	adj. R^2	F^\dagger	F^\ddagger
1999~2002	Sample Std.	0.1493** (0.0695)	0.5629* (0.1743)		0.1671	4.50**	6.29**
	Realized Volatility	0.2301* (0.0674)	0.3951** (0.1691)		0.0867	6.54*	12.80*
	Sample Std.	0.1492** (0.0691)	0.3386 (0.2501)	0.2374 (0.1910)	0.1769	3.62**	6.99**
	Realized Volatility	0.2115* (0.0668)	0.1325 (0.2229)	0.3238 (0.1844)	0.1263	8.06*	15.14*
2003~2006	Sample Std.	0.0342 (0.0426)	0.7393* (0.1793)		0.2582	4.66**	2.11
	Realized Volatility	0.0318 (0.0274)	0.7680* (0.1153)		0.4851	8.16*	4.05
	Sample Std.	0.0441 (0.0441)	0.5294 (0.2950)	0.1838 (0.2049)	0.2549	1.34	2.54
	Realized Volatility	0.0399 (0.0278)	0.4135 (0.2831)	0.3520 (0.2572)	0.4949	2.19	4.29**

Note) † : F statistic on $H_0: \alpha = 0, \beta = 1$, ‡ : F statistic on $H_0: \beta = 1$,

*: 1% significance level, **: 5% significance level.

2. 변동성지수 예측력의 강건성 검증

전체 기간에 대한 변동성지수의 예측력 검증에서 살펴본 바와 같이 KOSPI200 지수의 변동성지수는 실제변동성의 예측에 유용한 지표임을 알 수 있다. 그러나 변동성 수준에 따라 기간을 구분하여 예측력을 검증한 결과를 보면 시점에 따라 변동성지수의 예측력에 큰 차이가 나타나는 것을 알 수 있다. 이러한 원인 중 하나는 변동성지

수에 측정오차가 존재하기 때문인데, 이 경우 앞 절에서 사용한 단순회귀분석에서 추정된 계수는 일치추정량의 성질을 갖지 못한다. 이 때 변동성지수의 측정오차는 거래옵션의 제한, 옵션 거래량의 부족 등에 기인하여 발생할 수 있다. 이에 본 절에서는 변동성지수에 측정오차가 있는 경우를 가정하고 변동성지수의 예측력을 검증하였다. 또한, 변동성지수는 지수산정에 사용되는 방법과 자료에 따라 다양한 방식을 계산될 수 있다. 이러한 변동성지수의 산정방식에 따라 실제변동성에 대한 예측력에 차이가 있는지에 대해서도 본 절에서 살펴보았다.

(1) 측정오차를 고려한 변동성지수의 예측력 검증

앞에서 설명한 바와 같이 거래옵션의 제한이나 옵션거래량 부족 등의 이유로 변동성지수에 측정오차가 존재할 수 있는데, 이 경우 추정된 계수의 일치성이 상실되어 변동성지수의 불편성 검증에 영향을 미칠 수 있다. 본 절에서는 이를 고려하여 변동성지수와 실제변동성의 시차 1에 해당하는 값을 대변수(instrumental variable)로 하여 실제변동성에 대한 회귀분석을 실시하였으며 그 결과는 <표 5>과 같다.

<Table 5> Robustness test of predictability of the Volatility index : IV regression
(total period)

<Table 5> presents the regression results of equation (22) with the lagged instrument of actual volatility where IV_t is the volatility index at time t ; SV_t (Sample Std.) is the sample standard deviation of daily KOSPI200 index returns; RV_t (Realized Volatility) is the realized volatility based on intra-day ten-minute KOSPI200 index returns. The sample period covers from the year 1999 to 2006.

Actual Volatilities	α	β	γ	$adj. R^2$	F^*	F^\dagger
Sample Std.	0.0150 (0.0312)	0.8793* (0.0969)		0.4664	4.27**	1.55
Realized Volatility	0.0136 (0.0286)	0.9162* (0.0890)		0.5302	1.70	0.89
Sample Std.	0.0197 (0.0329)	0.6637* (0.2510)	0.2140 (0.1969)	0.5286	1.07	1.80
Realized Volatility	0.0146 (0.0281)	0.6495* (0.2410)	0.2796 (0.2026)	0.6114	1.24	2.12

Note) † : F statistic on $H_0 : \alpha = 0, \beta = 1$, * : F statistic on $H_0 : \beta = 1$,

* : 1% significance level, ** : 5% significance level.

변동성지수만을 사용한 회귀분석 결과를 살펴보면 측정오차를 고려하지 않은 경우에 비해 변동성지수에 대한 회귀계수 추정치가 증가한 것을 확인할 수 있으며, 표본표준편차를 실제변동성으로 사용한 경우에는 불편성을 기각하지만 실현변동성을 사용하는 경우에는 불편성을 기각하지 못하는 것으로 나타났다. 그리고 실제변동성의 과거변수와 함께 회귀분석한 결과에서도 변동성지수의 예측력이 유의적으로 높게 나타나며 이는 측정오차를 고려할 경우 변동성지수가 실제변동성의 과거자료에 비해 예측력이 우월함을 말해준다. 따라서, 변동성지수의 측정오차를 고려하는 경우에는 불편성이 성립하며 실제변동성의 과거변수에 비해 높은 예측력을 나타내는 것으로 판단할 수 있다.

(2) 지수산정방식에 따른 변동성지수의 예측력 검증

앞에서 변동성지수의 예측력 검증에 사용한 지수는 근월물과 차근월물 옵션의 체결가 자료를 이용하여 행사가격에 따른 내재변동성 함수를 스플라인 방법으로 추정하고 이로부터 얻어진 옵션가격과 수치적분방법을 이용하여 산출하였다. 그러나, 미국 VIX지수는 이산화방법 등을 이용하여 산출되고 있으며, 국내에서도 변동성지수가 산출될 경우에는 이러한 방법을 사용할 것으로 추정된다. 이에 본 절에서는 변동성지수 산정방식과 지수산정에 사용되는 기초자료가 달라지는 경우 변동성지수의 실제변동성에 대한 예측력이 어떻게 달라지는지 살펴보고자 한다.

먼저 지수산정방식에 따른 예측력의 차이를 검증하기 위해 블랙-숄즈 내재변동성을 이용한 방법과 공정분산스왑방식을 이용한 방법을 비교하였다. 공정분산스왑방식의 경우에도 스플라인 함수를 사용한 경우와 그렇지 않은 경우를 비교하였으며, 체결가를 사용한 경우와 호가를 사용한 경우로 나누어 비교하였다.⁸⁾ 또한, 차근월물 옵션의 거래량이 매우 작은 국내 시장상황을 고려하여 근월물만을 이용하여 산출된 변동성지수의 예측력에 대해서도 살펴보았다.

지수산정방식에 따른 변동성지수의 예측력을 살펴보면 <표 6>과 같다. 호가를 사용한 공정분산스왑방식의 경우에는 비정상적 호가를 제거하기 위해 매수호가와 매도호가의 블랙-숄즈 내재변동성이 일정비율을 초과하는 경우에는 직전체결가 혹은 델타-감마 근사방식으로 추정된 호가를 사용하는 경우를 고려하였다. 구체적으로는

8) 자료와 지수산정방식에 따른 비교에서는 호가를 이용한 변동성지수의 예측력을 검증하기 위해 호가자료가 있는 2003년부터 2006년까지의 기간을 분석대상으로 하였다.

<Table 6> Robustness test of predictability of the Volatility index : IV regression
(sub period)

<Table 6> presents the regression results of equation (22) with the volatility indices constructed from various methods with the considerations of maturity class, price class, and numerical method where IV_t is the volatility index at time t ; SV_t (Sample Std.) is the sample standard deviation of daily KOSPI200 index returns; RV_t (Realized Volatility) is the realized volatility based on intra-day ten-minute KOSPI200 index returns. The sample period covers from the year 1999 to 2006.

Maturity class	Price class	Index construction method		α	β	$adj. R^2$	F^*
Nearest + Second nearest Contracts	trade price	VXO ¹⁾		0.0420	0.7117*	0.2523	4.40**
		VIX	Spline	0.0342	0.7393*	0.2582	4.66**
			Without Spline	0.0339	0.7274*	0.2587	6.07*
	bid-ask price	VXO		0.0344	0.7395*	0.2678	4.67**
		VIX	Filtering-last trade price ²⁾	0.0357	0.7195*	0.2551	6.16*
			Filtering-Delta Gamma Approximation ³⁾	0.0407	0.6937*	0.2442	6.87*
Nearest Contracts only	trade price	VXO		0.0334	0.7246*	0.3966	9.22*
		bid-ask price	Spline	0.0312	0.7320*	0.3699	8.79*
			Without Spline	0.0306	0.7218*	0.3771	11.06*
	bid-ask price	VXO		0.0344	0.7203*	0.3941	294.26*
		VIX	Filtering-last trade price	0.0306	0.7218*	0.3767	11.05*
			Filtering-Delta Gamma Approximation	0.0305	0.7230*	0.3793	10.90*

Note) ^{*} : F statistic on $H_0: \alpha = 0, \beta = 1$, * : 1% significance level, ** : 5% significance level.

- 1) The VXO index is based on Black-Scholes implied volatility.
- 2) In the case where the ratio of Black-Scholes implied volatilities of bid and ask prices violate a permissible volatility bound, option prices are replaced with last trade price.
- 3) In the case where the ratio of Black-Scholes implied volatilities of bid and ask prices violate a permissible volatility bound, option prices are replaced with a price approximated using the last trade price and the values of Delta and Gamma of that option.

매수호가와 매도호가의 블랙-숄즈 내재변동성의 비율이 $\frac{1.3}{0.7}$ 을 초과하는 경우를 비정상호가로 정의하였으며, 델타-감마 근사방식에서는 직전호가와 직전내재변동성을 이용하여 델타와 감마를 구한 후 식 (23)의 근사식을 이용하여 호가를 생성하였다.

$$BP(AP) \approx \Delta \times dS + \frac{1}{2} \Gamma \times (dS)^2 \quad (23)$$

한편, 블랙-숄즈 내재변동성을 사용하여 변동성지수를 산정하는 미국 VXO 지수의 경우에는 22거래일 기준의 변동성지수 산출을 위해 달력기준으로 계산된 변동성을 영업일 기준으로 전환하게 된다. 이러한 거래일 기준으로의 변환은 블랙-숄즈 내재변동성 방식으로 계산된 변동성지수가 상향편의를 갖게 하며, 달력기준으로 계산되는 공정분산스왑방식에 따른 변동성지수와 비교를 어렵게 한다. 이러한 문제를 고려하여 본 연구에서는 블랙-숄즈 내재변동성 방식의 변동성지수 계산 시 영업일 기준으로 전환하지 않고 공정분산스왑방식에서와 같이 달력기준의 변동성지수를 산출하였다.

회귀분석결과를 살펴보면 근월물과 차근월물을 이용한 경우에 비해 근월물만을 사용하여 변동성지수를 생성한 경우의 실제변동성의 추정치인 표본표준편차에 대한 설명력이 높게 나타나며 변동성지수에 대한 회귀계수도 소폭 증가하는 모습을 볼 수 있다. 이는 차근월물 옵션의 유동성 부족이 영향을 미친 것으로 추정된다. 한편, 체결가와 호가를 사용한 경우의 설명력은 큰 차이를 나타내지 않는 것으로 나타났다. 그리고 블랙-숄즈 내재변동성으로 산정된 변동성지수와 공정분산스왑방식으로 산정된 변동성지수의 설명력을 살펴보면, 차근월물 옵션을 고려하는 경우에는 공정분산스왑방식이 설명력이 높게 나타나지만 근월물 옵션만을 사용한 경우에는 블랙-숄즈 내재변동성 방식의 지수가 설명력이 높게 나타나고 있다. 전체적으로 변동성지수의 산정방식이나 사용자료에 따른 변동성지수의 예측력은 큰 차이를 나타내지 않는 것으로 생각되며, 변동성지수의 불편성은 모든 경우에 대해 기각되는 것으로 나타났다.

3. 위험중립 고차적률을 이용한 실제변동성 예측력 검증

본 연구의 이론적 배경에서 살펴본 바와 같이 변동성지수는 위험중립확률에서의 2차 중심적률로 볼 수 있으며, 실제변동성은 실제확률에서의 2차 중심적률에 대한 추정치로 볼 수 있다. 따라서 변동성지수의 실제변동성에 대한 예측력 검증은 위험중립확률에서의 적률의 실제확률에서의 적률에 대한 예측력 검증이며, Bakshi, Kapadia and Madan(2003)은 멱함수 형태의 효용함수(power utility)하에서의 가격결정핵(pricing kernel) 가정하에서 위험중립확률에서의 비중심적률이 실제확률에서의 비중심적률로 표현될 수 있음을 보였다. Bakshi, Kapadia and Madan(2003)에 따르면 실제확률에서의 2차 비중심적률은 식 (24)과 같이 위험중립확률에서의 2차 및 3차 비중심적률을 이용하여 표현할 수 있다.

$$E^P(R^2) \approx E^Q(R^2) + \gamma E^Q(R^3) \quad (24)$$

여기서 γ 는 상대적 위험회피도(relative risk aversion)를 측정하는 값이다. 따라서 상대적 위험회피도가 0이 아닌 경우에는 위험중립확률에서의 2차 비중심적률 뿐만 아니라 3차 비중심적률이 실제확률에서의 2차 비중심적률에 영향을 미치게 된다. 따라서 변동성지수가 위험중립 2차 중심적률이고 중심적률이 비중심적률로 표현될 수 있다는 점을 고려한다면, 앞에서 살펴본 변동성지수의 예측력 검증 방법은 변수누락에 따른 문제가 발생할 수 있다.

만약 회귀분석에 있어 진실한 모형에는 포함되어 있는 특정 변수(X_2)를 제외하고 회귀분석을 수행하게 되면 식 (25)와 같이 X_1 변수의 회귀계수는 편의를 갖고 추정계수의 분산은 진실한 회귀모형에 비해 과소평가되고 설명력이 떨어지는 문제가 발생한다.

$$E(\hat{b}_1) = \beta_1 + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \beta_2 \quad (25)$$

$$V(\hat{b}_1) = \sigma^2 (X_1' X_1)^{-1} < V(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 [X_1' X_1 - X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1]^{-1}$$

이에 본 절에서는 위험중립확률에서의 비중심적률을 이용하여 실제확률에서의 비중심적률에 대한 예측력을 검증하고자 한다.⁹⁾

(1) 위험중립 비중심적률의 예측력 검증

위험중립적률의 예측력을 검증하기 위해서는 위험중립확률 및 실제확률에서의 적률을 계산하여야 한다. 위험중립확률에서의 2차적률은 식 (14)과 같이 표현할 수 있으며 3차적률은 식 (26)과 같이 표현할 수 있다. 본 연구에서는 위험중립확률에서의 2차 및 3차적률을 계산하기 위해 변동성지수 산정에 사용한 스플라인 함수와 수치적분방식을 사용하였다. 그리고 실제확률에서의 2차적률은 일간수익률 자료를 이용하여 식 (27)과 같은 표본 2차적률을 계산하였으며 실현분산(realized variance)의 경우에는 실현변동성의 제공으로 계산하였다.

9) 기술상의 편의를 위해 특별한 언급이 없는 한 3장에서는 비중심적률을 적률로 표기하였다.

$$E^Q[R(T)^3] = (rT)^2 + 3e^{rT} \left[\int_F^\infty \frac{1}{K^2} \left(\ln \frac{K}{S_0} - \left(\ln \frac{K}{S_0} \right)^2 \right) C(K) dK \right. \quad (26)$$

$$\left. + \int_0^F \frac{1}{K^2} \left(\ln \frac{K}{S_0} - \left(\ln \frac{K}{S_0} \right)^2 \right) P(K) dK \right]$$

$$NSV = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i^2 \quad (27)$$

<Table 7> Predictability test including non-central moments

<Table 7> presents the regression results of equation (28) where NSV_t and NRV_t are the sample second moment and the realized variance under the real probability measure, respectively. NIV_t and NIS_t are the second and third moments under the risk-neutral measure, respectively. The sample period covers from the year 1999 to 2006.

Actual Volatilities	α	β	γ	adj. R^2	F statistic [*]	F statistic [*]
Sample second moment	0.0193 (0.0116)	0.7177* (0.0877)		0.4122	6.85*	10.36*
Realized Variance	0.0241** (0.0111)	0.7150* (0.0842)		0.4306	6.41*	11.45*
Sample second moment	0.0127 (0.0113)	0.8420* (0.0946)	1.5045* (0.5170)	0.4559	1.49	2.79
Realized Variance	0.0179 (0.0109)	0.8306* (0.0911)	1.3979* (0.4977)	0.4699	1.75	3.46

Note) ^{*} : F statistic on $H_0: \alpha = 0, \beta = 1$, ^{*} : F statistic on $H_0: \beta = 1$,

* : 1% significance level, ** : 5% significance level.

그리고 위험중립적률의 실제적률에 대한 예측력을 검증하기 위해 식 (28)과 같은 회귀분석을 수행하였다. 여기서 NSV_t 와 NRV_t 는 각각 실제확률의 2차적률과 실현분산을 의미하고 NIV_t 와 NIS_t 는 위험중립확률에서의 2차 및 3차적률을 의미한다.

$$NSV_t = \alpha + \beta NIV_t + \gamma NIS_t + \epsilon_t \quad (28)$$

$$NRV_t = \alpha + \beta NIV_t + \gamma NIS_t + \epsilon_t$$

비중심적률을 이용한 식 (28)의 회귀분석결과를 살펴보면 2차적률만을 사용한 경우에는 위험중립 2차적률의 불편추정량에 대한 가설을 기각하는 것으로 나타났으며, 위험중립 2차적률의 회귀계수가 1과 같다는 가설도 모든 자료에서 기각하는 것으

로 나타났다. 반면, 위험중립 3차적률을 독립변수로 포함한 경우에는 모든 자료에서 두 가설을 기각하지 않는 것으로 나타났다. 따라서 3차적률과 위험회피도에 대한 계수를 포함할 경우에는 위험중립적률이 실제적률에 대한 불편추정량으로 볼 수 있다. 이러한 결과는 위험중립 3차적률을 포함시킬 경우 위험중립 2차적률의 회귀계수값이 증가하며 3차적률의 회귀계수값이 유의적이라는 점과 일치하는 것이다. 한편, 회귀모형 설명력의 경우 3차적률이 포함된 경우가 그렇지 않은 경우에 비해 설명력이 높아지는 것을 확인할 수 있다.

(2) 측정오차를 고려한 위험중립 비중심적률의 예측력 검증

변동성지수에 대한 예측력 검증에서는 측정오차를 고려하여 회귀분석을 실시할 경우 그렇지 않은 경우에 비해 변동성지수의 회귀계수가 상승하는 것을 확인할 수 있었으며 실현변동성을 실제변동성 추정치로 사용할 경우에는 불편성을 기각하지 못하는 것으로 나타났다. 그러나, 실제변동성 추정치로 표본표준편차를 사용한 경우에는 불편성을 기각하는 것으로 나타나 불편성 가설에 대해 명확한 결론을 내리기 어려웠다. 이에 비중심적률의 측정오차를 고려하는 경우의 불편추정량에 대한 가설을 검증하였다. 측정오차를 고려하는 방법은 변동성지수와 마찬가지로 2차적률 및 3차적률의 시차 1 변수를 대변수로 하여 회귀분석을 수행하였다.

<Table 8> Predictability test taking measurement error into account : IV regression

<Table 8> presents the regression results of equation (28) with the lagged instruments of second and third risk-neutral moments where NSV_t and NRV_t are the sample second moment and the realized variance under the real probability measure, respectively. NIV_t and NIS_t are second and third moments under the risk-neutral measure, respectively. The sample period covers from the year 1999 to 2006.

Actual Volatilities	α	β	γ	adj. R^2	F statistic [*]	F statistic [*]
Sample second moment	0.0108 (0.0145)	0.9636* (0.1563)	3.6667 (2.1485)	0.3210	0.35	0.09
Realized Variance	0.0116 (0.0131)	0.9625* (0.1414)	2.7188 (1.9439)	0.3865	0.50	0.11

Note) ^{*} : F statistic on $H_0 : \alpha = 0, \beta = 1$, ^{*} : F statistic on $H_0 : \beta = 1$,

* : 1% significance level, ** : 5% significance level.

측정오차를 고려하는 경우의 비중심적률의 예측력을 살펴보면 측정오차를 고

려하지 않는 경우에 비해 2차적률의 회귀계수값이 높아짐을 알 수 있으며 상수항과 2차적률 회귀계수에 대한 가설 및 2차적률 회귀계수에 대한 가설을 모두 기각하는 것으로 나타났다. 그러나 측정오차를 고려하지 않는 경우에는 3차적률의 회귀계수가 유의적인 값을 나타내었으나 측정오차를 고려하는 경우에는 비유의적인 것으로 나타났다. 따라서 측정오차를 고려하는 경우 위험중립 2차적률의 불편성은 성립하는 것으로 판단된다.

IV. 결 론

본 연구에서는 1999년부터 2006년까지의 KOSPI200 지수에 대한 옵션자료를 이용하여 변동성지수를 산출하고 실제변동성에 대한 예측력에 대해서 살펴보았다. 기존의 연구와 달리 월별지수를 산정하고 실제변동성의 추정치로 표본표준편차 뿐만 아니라 실현변동성을 사용하여 예측력을 살펴보았으며, 측정오차를 고려한 검증과 비중심적률의 고차적률을 고려한 검증을 수행하였다. 그리고 변동성지수의 산정방식에 따른 예측력의 차이를 살펴보았다.

연구결과를 살펴보면 변동성지수는 미래의 실제변동성에 대해 유의적인 회귀계수를 나타냄으로써 예측력을 가지고 있는 것으로 나타났다. 또한, 표본표준오차로 측정되는 실제변동성의 과거변수에 비해 실현변동성을 더 잘 설명하는 것으로 나타났다. 한편, 실현변동성의 과거변수와와의 비교에서는 변동성지수의 예측력이 낮게 나타났으나, 변동성지수의 측정오차를 고려한 경우에는 모든 실제변동성의 과거 추정치에 비해 변동성지수가 높은 예측력을 나타냈다.

한편, 일반적인 회귀분석에서는 변동성지수의 실제변동성에 대한 불편성이 기각되는 것으로 나타났으나, 측정오차를 고려하거나 비중심적률의 고차적률을 고려하는 경우 불편성이 기각되지 않는 것으로 나타났다. 따라서 기존의 연구에서 변동성지수의 실제변동성에 대한 불편성이 성립하지 않는 것은 측정오차나 중요변수의 누락 등으로 인한 계량경제학적인 문제일 가능성이 있는 것으로 생각된다.

마지막으로 변동성지수의 산정방식에 따른 차이를 살펴보면 블랙-숄즈 내재변동성 방식에 의한 지수가 공정분산스왑방식과 비슷한 설명력을 가지고 있었으나 회귀계수는 공정분산스왑방식을 사용한 경우에 더 높게 나타났다. 또한, 공정분산스왑방

식으로 산출하는 경우 사용자료의 차이 혹은 산정방식의 차이가 지수산출에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 나타났다.

이러한 연구결과로 볼 때 변동성지수는 실제변동성에 대해 일정한 예측력을 가지고 있고 계량경제학적인 문제들을 고려할 경우 불편성도 성립하는 것으로 생각된다. 또한, 지수의 산정방식에 따라 예측력에 큰 차이를 나타내지는 않는 것으로 판단된다.

<참 고 문 헌>

1. 김명직, “주식시장의 변동성 예측 : KOSPI200 변동성지수(KoVIX)의 도입가능성을 중심으로,” 『증권학회지』 제25권, 1999, 229-264.
2. 박영규 · 정창완, “KOSPI200 변동성 추정과 동태적 헤징 전략,” 『증권학회지』 제25권, 1999, 189-227.
3. 이재하 · 권상수, “KOSPI200 옵션 내재변동성의 예측력,” 『선물연구』 제9권 제1호, 2001, 25-50.
4. 이재하 · 정재련, “KOSPI200 옵션시장에서의 변동성지수 산출 및 분석,” 『증권학회지』 제35권 제2호, 2006, 109-138.
5. 장국현, “한국 옵션시장의 변동성 예측과 예측성과 비교에 관한 연구,” 『선물연구』 제9권 제1호, 2001, 51-79.
6. Aboura, S. and C. Villa, “International market volatility indexes : A study on VX1, VDAX and VIX,” Working paper, 1999.
7. Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold, and H. Ebens, “The distribution of realized stock return volatility,” *Journal of Financial Economics* 61, 2001, 43-76.
8. Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold, and P. Labys, “Modeling and forecasting realized volatility,” *Econometrica* 71, 2003, 579-625.
9. Bakshi, G. and D. Madan, “Spanning and Derivative Security Valuation,” *Journal of Financial Economics* 55, 2000, 205-238.
10. Bakshi, G., N. Kapadia, and D. Madan, “Stock return characteristics, skew laws, and the differential pricing of individual equity options,” *Review of Financial Studies* 16, 2003, 101-143.
11. Bandorff-Nielsen, O. and N. Shephard, “Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models,” *Journal of Royal Statistical Society Series B* 64, 2002, 253-280.
12. Becker, R., A. E. Clements, and S. I. White, “On the informational efficiency of S&P500 implied volatility,” *North American Journal of Economics and Finance* 17, 2006, 139-153.
13. Canina, L. and S. Figlewski, “The informational content of implied volatility,” *Review of Financial Studies* 6, 1993, 659-681.
14. Carr, P. and D. Madan, “Optimal positioning in Derivative Securities,” *Quantitative Finance* 1, 2001, 19-37.

15. Carr, P. and L. Wu, "A Tale of Two Indices," *Journal of Derivatives* 2006, 13-29.
16. Christensen, B. J. and N. R. Prabhala, "The relation between implied and realized volatility," *Journal of Financial Economics* 50, 1998, 125-150.
17. Day, T. and C. Lewis, "Stock market volatility and the information content of stock index options," *Journal of Econometrics* 52, 1992, 267-287.
18. Demeterfi, K., E. Derman, M. Kamel, and J. Zou, "More than you ever wanted to know about volatility swaps," Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.
19. Fleming, J., "The quality of market volatility forecasts implied by S&P 100 index option prices," *Journal of Empirical Finance* 5, 1998, 317-345.
20. Jiang, G. J. and Y. S. Tian, "Gauging the 'Investor Fear Gauge' : Implementation problems in the CBOE's new volatility index and a simple solution," Working paper, 2005.
21. Lamoureux, C. G. and W. Lastrapes, "Forecasting stock return variance : towards understanding stochastic implied volatility," *Review of Financial Studies* 6, 1993, 293-326.
22. Meddahi, N, "Theoretical comparison between integrated and realized volatility," *Journal of Applied Econometrics* 71, 2002, 479-508.

< Abstract >

The Predictability of Volatility Index in KOSPI200 Option Market

Young Ho Eom^{*}, Hyun Jun Ji^{**}, Woon Wook Jang^{***}

Since the introduction of volatility indices, futures and options on the index have been traded in some derivative exchanges in the US and some European countries. Introducing similar volatility index is also now considered by the Korea Stock Exchange because of the increasing needs of hedge instruments in the fast-growing OTC markets. Furthermore, volatility indices measure market expectations of near term volatilities implied in stock index option prices. Thus, volatility index is not only important in hedging market volatility risk, but also useful in predicting future volatility and measuring market's fear.

There have been many empirical tests about the predictability to the actual volatility and most of them were focused on the Black-Scholes implied volatility or the volatility index based on variance swap (hereafter VIX) or Black-Scholes implied volatility (hereafter VXO). Previous studies indicate that the volatility index or the Black-Scholes implied volatility has predictability to the future actual volatility though they are not unbiased estimators.

However, there might be some econometric problems in testing the predictability to the actual volatility. One of classical problems is the measurement error problem caused by low-liquidity or non-synchronous data and an over-lapping data problem mentioned by Christensen and Prabhala (1998). Also, Bakshi, Kapadia and Madan(2003) showed that higher moments of risk-neutral measure can affect to the actual volatility and in this case there may be an omitted-variable problem, which may result in the biasedness in the tests.

Besides these econometric problems, there are some measurement issues in estimating the actual volatility (the realized volatility based on intra-data and the sample standard deviation) and constructing the volatility index (VXO, VIX and splined VIX).

* Yonsei School of Business(Tel : +82-2-2123-4193, E-mail : yeom@base.yonsei.ac.kr)

** RBS GBM(Tel : +81-3-6266-3584, E-mail : wolken74@gmail.com)

*** Yonsei School of Business Ph.D Candidate(Tel : +82-2-2123-3584, E-mail : zara2k@yonsei.ac.kr)

The purpose of this study is to empirically test whether volatility index is an unbiased estimator of the future actual volatility. Firstly, according to the result of Bakshi, Kapadia and Madan(2003), we test the predictability of the volatility index with the risk-neutral higher moments. Secondly, we test the predictability with considerations of measurement error problems. We use the data of specific time in trading hour to avoid non-synchronous problem and monthly data for using non-overlapping data. We use an instrumental variable regression method in estimating as well. Also for the robustness test of the results, we construct various volatility indices with respect to data types and numerical methods and investigate their effects on the predictability power. Finally, in the test we use the realized volatility of Andersen et al.(2001) as well as a sample standard deviation as the proxy for the future true realized volatility.

We test with the monthly volatility index constructed by the KOSPI200 index option data for the sample period covered from 1999 to 2006. The results indicate that the volatility index has predictability to the actual volatility and has higher predictability power than the historical volatility(past sample standard deviation). In case of the realized volatility, the volatility index is better than the past realized volatility in forecasting the actual volatility when considering measurement error.

The volatility index is an unbiased estimator when we take the measurement error or the omitted-variable problem into account, while it's a biased estimator in general regression test. The VIX index is predictable to the actual volatility as much as the VXO index, but the former is less sensitive to data or construction method.

These results shows that the unbiasedness of the volatility index to the actual volatility is not rejected when some econometric issues are considered and that the volatility index has higher predictability power than those of other volatility measures such as past actual volatilities.

Key words : Volatility Index, Realized Volatility, Historical Volatility,
KOSPI200 Index

JEL Classification : G14