

Lab04

Max Stróżyk

15 grudnia 2024

Spis treści

1	Zadanie 1: Rozkład QR	2
1.1	Charakterystyka metody i problem	2
1.2	Przeprowadzane testy	2
1.3	Wyniki i analiza	2
1.4	Wnioski	3
2	Zadanie 2: Aproksymacja w przestrzeniach unitarnych	4
2.1	Charakterystyka metody i problem	4
2.2	Metoda rozwiązania	4
2.3	Przeprowadzane testy	4
2.4	Wnioski i analiza	5
3	Zadanie 3: Kwadratury Numeryczne	6
3.1	Charakterystyka Metody i problem	6
3.2	Metoda Rozwiązania	6
3.3	Przeprowadzone Testy	6
3.4	Wnioski i analiza	7

[Link do projektu na GitHubie](#)

1 Zadanie 1: Rozkład QR

1.1 Charakterystyka metody i problem

Rozkład QR jest techniką dekompozycji macierzy A na iloczyn dwóch macierzy:

$$A = QR,$$

gdzie:

- Q jest macierzą ortogonalną ($Q^T Q = I$),
- R jest macierzą górnortrójkątną.

Rozkład ten realizowany jest za pomocą procesu Gram-Schmidta, polegającego na ortogonalizacji kolumn macierzy A . Proces ten można zapisać w postaci:

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad q_k = \frac{a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, q_i \rangle q_i}{\|a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, q_i \rangle q_i\|}.$$

Aby ocenić dokładność uzyskanego rozkładu, mierzymy błąd ortogonalności macierzy Q , definiowany jako największa wartość iloczynu skalarnego dwóch różnych wektorów q_i i q_j , gdzie $i \neq j$:

$$E = \max\{\langle q_i, q_j \rangle : i \neq j\}.$$

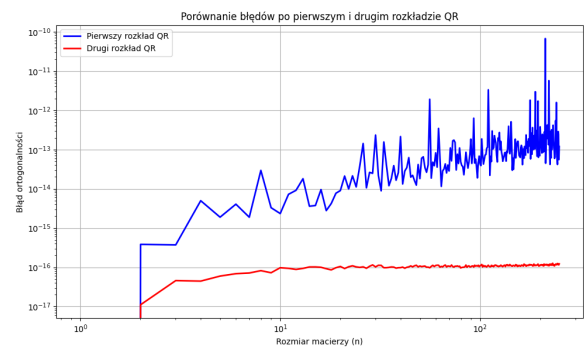
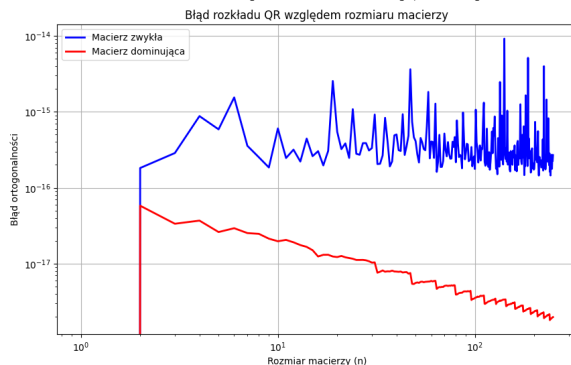
Aby zmniejszyć błędy ortogonalności, można zastosować rozkład QR wielokrotnie.

1.2 Przeprowadzane testy

W ramach przeprowadzonych testów dokonano analizy zależności błędu ortogonalności od wielkości macierzy n dla dwóch typów macierzy, przy czym wybierano maksymalną wartość spośród iloczynów skalarnych różnych kolumn:

- macierzy losowych,
- macierzy o dominującej przekątnej.

Dodatkowo przeanalizowano wpływ powtórnej dekompozycji QR na zmniejszenie błędów ortogonalności. Testy przeprowadzono dla macierzy o rozmiarach od $n = 1$ do $n = 250$. Dla każdej wartości n generowano 10 losowych macierzy, a wyniki uśredniano.



1.3 Wyniki i analiza

- Zależność błędu ortogonalności od rozmiaru macierzy n różni się w przypadku macierzy losowych i macierzy z dominującą przekątną.
- Powtórna dekompozycja QR znacząco zmniejsza błędy ortogonalności, co widać na wykresie.

1.4 Wnioski

- Powtórna dekompozycja QR pozwala na znaczące zmniejszenie błędów ortogonalności, co może być istotne w aplikacjach wymagających wysokiej precyzji.
- Błędy na poziomie 10^{-14} są marginalne dla większości zastosowań, jednak w przypadku bardziej wymagających obliczeń zastosowanie dodatkowych kroków poprawy dokładności może być konieczne.

2 Zadanie 2: Aproksymacja w przestrzeniach unitarnych

2.1 Charakterystyka metody i problem

Celem niniejszego zadania jest ustalenie optymalnej aproksymacji h^* funkcji f w przestrzeni unitarnej V , poprzez minimalizację odległości w określonej normie:

$$\|h^* - f\| = \inf\{\|u - f\| : u \in U\},$$

przy założeniu, że U stanowi podprzestrzeń V . Opierając się na twierdzeniach teorii aproksymacji:

- Rozwiązanie h^* istnieje i jest unikalne.
- Funkcja h^* jest optymalna, wtedy i tylko wtedy gdy różnica $f - h^*$ jest ortogonalna do U , tj. $\langle f - h^*, u \rangle = 0$ dla każdego $u \in U$.
- Aproksymację h^* można wyrazić jako kombinację liniową elementów bazy U .

2.2 Metoda rozwiązania

Zakłada się, iż baza U jest złożona z funkcji $\{f_i\}_{i \in I}$. Ze względu na właściwość ortogonalności różnicy $f - h^*$ względem U , zachodzi:

$$\langle f - h^*, f_i \rangle = 0 \quad \text{dla każdego } i \in I.$$

W rezultacie uzyskujemy jednoznaczną reprezentację h^* :

$$h^* = \sum_{i \in I} a_i f_i.$$

Oznacza to, że współczynniki a_i aproksymacji h^* w bazie U można wyznaczyć, rozwiązując układ równań:

$$\langle f, f_i \rangle = \sum_{j \in I} a_j \langle f_j, f_i \rangle.$$

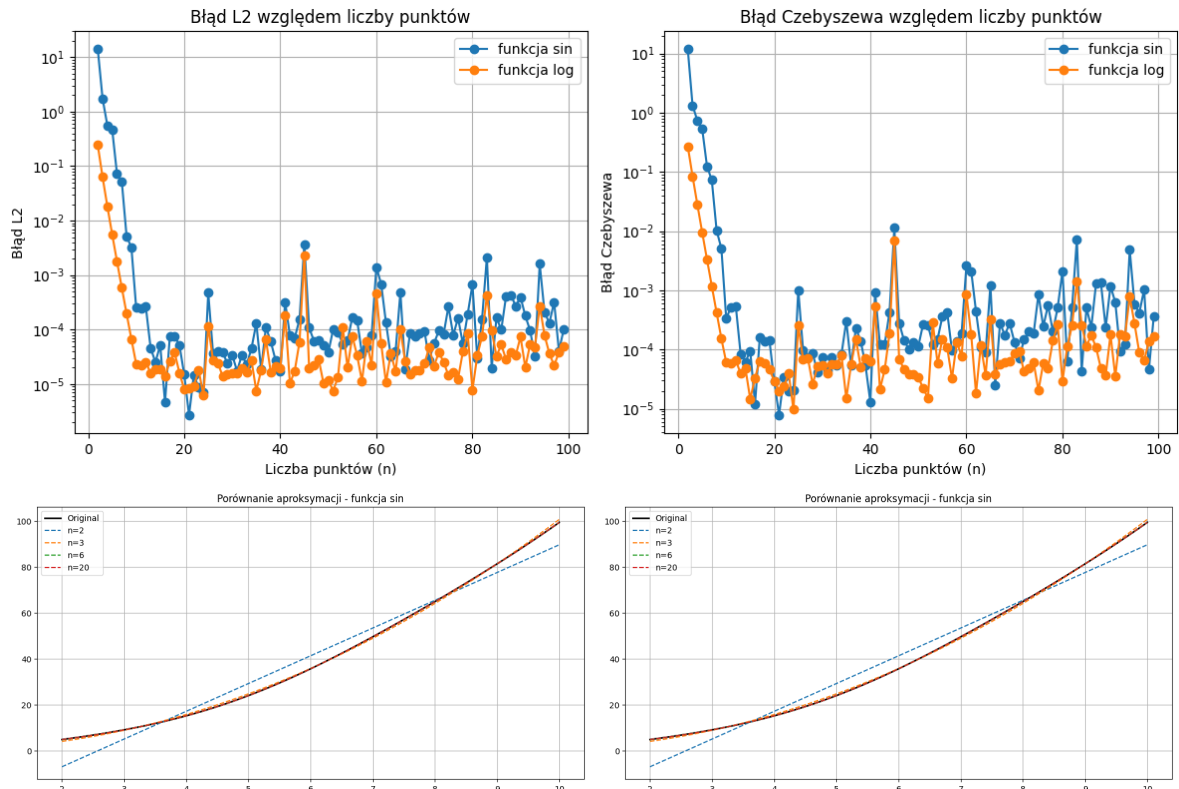
w postaci macierzowej $Aa = b$:

$$\begin{bmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_2, f_1 \rangle & \cdots & \langle f_n, f_1 \rangle \\ \langle f_1, f_2 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle & \cdots & \langle f_n, f_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_1, f_n \rangle & \langle f_2, f_n \rangle & \cdots & \langle f_n, f_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, f_1 \rangle \\ \langle f, f_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, f_n \rangle \end{bmatrix}$$

2.3 Przeprowadzane testy

Dla ewaluacji jakości aproksymacji:

- Porównano błąd aproksymacji w metrykach Chebyshev'a i L^2
- Sprawdzono zbieżność funkcji aproksymowanych do oryginalnej funkcji dla różnych stopni wielomianów.



2.4 Wnioski i analiza

- Metoda minimalizacji odległości h^* osiąga mniejszy błąd w obu metrykach w porównaniu do metod interpolacji, poprzednio 10^{-1} teraz $10^{-4} - 10^{-6}$
- Funkcje aproksymowane metodą h^* szybciej zbliżają się do oryginalnej funkcji, co widać na wykresach porównujących zbieżność, poprzednio koło 25 – 30 tutaj 10 – 20.

Porównanie złożoności obliczeniowej

- Interpolacja Lagrange'a: $O(n^2)$.
- Metoda Newtona: $O(n^2)$.
- Minimalizacja odległości h^* : $O(n^3)$, co wynika z potrzeby rozwiązania układu równań metodą LU .

Wnioski

- Metoda minimalizacji h^* oferuje lepszą dokładność i szybszą zbieżność w porównaniu z wcześniejszymi.
- Dokładność aproksymacji wzrasta wykładniczo ze wzrostem stopnia wielomianu, co pozwala na efektywną aproksymację nawet dla funkcji o skomplikowanej strukturze.

3 Zadanie 3: Kwadratury Numeryczne

3.1 Charakterystyka Metody i problem

Numeryczne kwadratury stanowią metodę stosowaną do aproksymacyjnego obliczania całek oznaczonych poprzez odpowiednią sumę ważoną. Zadanie to sprowadza się do wyznaczenia wag Z_i oraz punktów L_i , które spełniają określony warunek:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(L_i)Z_i,$$

Przy czym punkty L_i są równomiernie rozmieszczone w przedziale $[a, b]$. Wyprowadzenie metody opiera się na założeniu, że skonstruowany system równań liniowych jest dokładny dla wielomianów określonego stopnia $n - 1$. Dla uzyskania wyższej precyzji obliczeń, możliwe jest podzielenie przedziału $[a, b]$ na drobniejsze podprzedziały. Metody te są podstawą konstrukcji algorytmów rozwiązywania zagadnień

3.2 Metoda Rozwiązania

1. Chcemy rozwiązać problem postaci:

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \cdot f(L(i))$$

2. Formułowanie układu równań: Skonstruowanie odpowiedniej macierzy oraz wektora wyrazów wolnych:

$$A_{ij} = L_j^i, \quad B_i = \frac{b^i - a^i}{i}.$$

3. Rozwiązanie układu: Podejmujemy się rozwiązania układu równań liniowych $AZ = B$, które charakteryzuje się:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_n \\ L_1^2 & L_2^2 & \cdots & L_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1^{n-1} & L_2^{n-1} & \cdots & L_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b-a}{1} \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \frac{b^3-a^3}{3} \\ \vdots \\ \frac{b^n-a^n}{n} \end{bmatrix}.$$

4. Generowanie punktów interpolacji: Definiujemy punkty o równomiernym rozłożeniu jako:

$$L_i = a + i \frac{b-a}{n-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

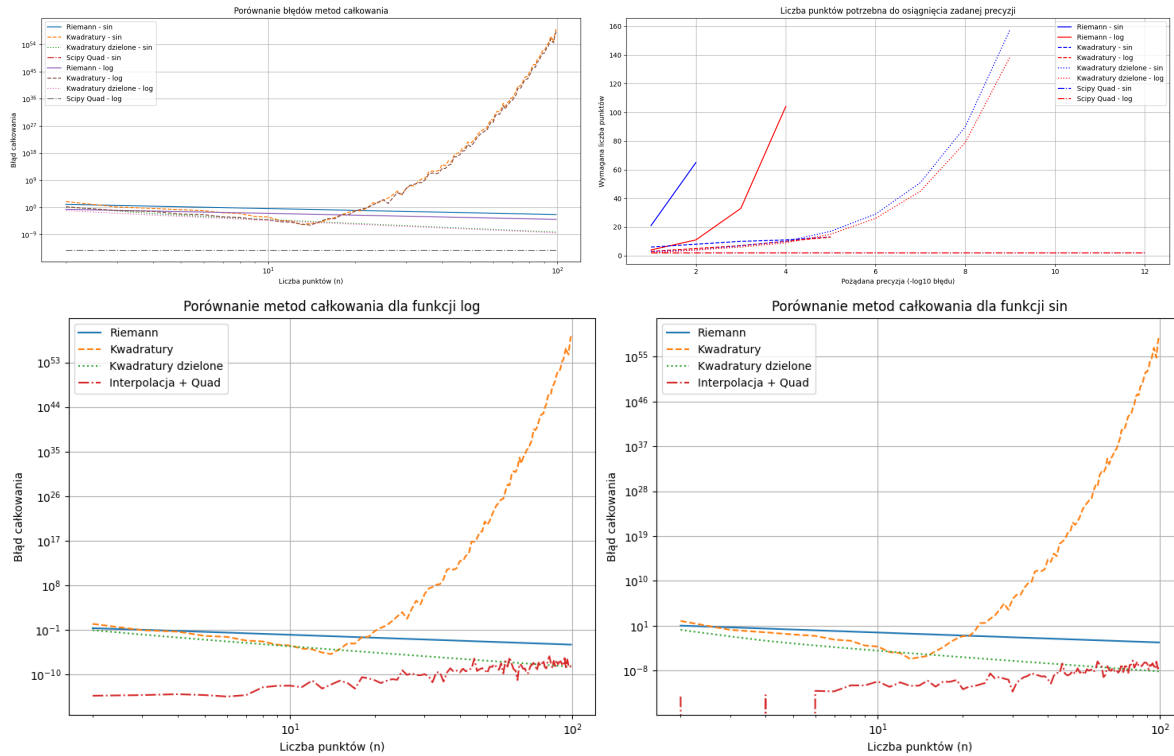
3.3 Przeprowadzone Testy

Przeprowadzono porównawcze testy różnych metod numerycznych stosowanych do obliczania całek:

- Riemannowskie sumy prostokątów.
- Klasyczne metody kwadratur (z równomiernymi punktami interpolacyjnymi).
- Kwadratury dzielone (podział przedziału na mniejsze części).
- Metoda `quad` z biblioteki `scipy`.

Testy przeprowadzono w przedziale $[2, 10]$, dla funkcji $\sin(x) + x^2, \ln(x)$:

1. Zmianę błędu całkowania w zależności od liczby punktów interpolacyjnych (od 2 do 100).
2. Liczbę punktów potrzebnych do osiągnięcia określonej precyzji przy maksymalnej liczbie interpolacji $25 * (b - a)$.
3. Analiza zachowania zbieżności sumy w kontekście interpolowanego i całkowanego przypadku (gdzie wartość całki jest znana) w porównaniu do przybliżonego.



3.4 Wnioski i analiza

- Metoda sum Riemanna jest najmniej efektywna i nawet przy bardzo dużej liczbie punktów nie jest w stanie osiągnąć szukanej precyzji.
- Widać że zwykłe kwadratury nie są tak efektywne, jak dzielone. Wypadają one także znacznie gorzej obliczeniowo, ponieważ najbardziej złożonym prosem jest rozwiązanie macierzy.
- Kwadratury dzielone oferują znaczną poprawę dokładności, jednak są wolniejsze i mniej dokładne od wbudowanej funkcji quad.
- Metoda quad osiąga najlepsze wyniki dzięki nierównomiernemu doborowi punktów interpolacyjnych oraz wykorzystaniu wielomianów Legendre'a, co pozwala na precyzyjną aproksymację trudnych funkcji.
- Widzimy że metoda polegająca na wcześniejszym liczeniu wielomianu interpolowanego jest korzystniejsza. Błąd zależy wtedy tylko i wyłącznie od przybliżenia

Złożoność obliczeniowa :

- Riemannowskie sumy prostokątów: $O(n)$.
- Klasyczne kwadratury: $O(n^3)$ (rozwiązanie układu równań).

- stworzenie macierzy $O(n^2)$
- Rozwiązanie układu równań $O(n^3)$ - metoda LU
- Zatem złożoność $O(n^3)$
- Kwadratury dzielone: $O(k \cdot n^3)$, gdzie k to liczba podprzedziałów, n oznacza ilość punktów w podprzedziale u nas $n = 3$.
- **quad**: Adaptacyjna metoda z nierównomiernym wyborem punktów, której złożoność zależy od funkcji, ale w praktyce jest bardzo efektywna, dzięki zastosowaniu wielomianów Legendre'a.

Literatura

[a20, 2022] (2022). Lapack examples.

[Embree, 2016] Embree, M. (2016). Math/cs 5466 - virginia tech - spring 2016. lecture 24.

[Jabłoński,] Jabłoński, Z. Lectures from numerical method.

[Miller et al.,] Miller, J., Wąs, J., and Wprowadzenie, . 3. kwadratury.

[Patterson, 1968] Patterson, T. N. L. (1968). The optimum addition of points to quadrature formulae.
Mathematics of Computation, 22:847.