МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

ИНСТИТУТ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСТАНЦИОННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

ОЦЕНКА

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

д-р техн. наук, профессор		С.И. Колесникова
должность, уч. степень, звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

Моделирование временных рядов

по дисциплине: Компьютерное моделирование

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ гр. №	Z1431		М.Д. Быстров
	номер группы	подпись, дата	инициалы, фамилия

Студенческий билет № 2021/3572

Санкт-Петербург 2024

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель настоящей работы – освоить средства моделирования стохастических временных рядов.

ЗАДАНИЕ

1. Ознакомиться со справочными сведениями.

2. Сформулировать задачу МНК при построении функции регрессии.

3. Разработать программу, моделирующую алгоритм поиска оптимального решения для формализованной задачи, используя математический пакет MatLab или язык программирования Python:

a. Самостоятельно реализовать МНК для решения задачи поиска коэффициентов модели, заданной в виде полинома второго порядка $f_1(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

b. С использованием встроенной реализации МНК в MatLab или Python подобрать степень p полиномиальной модели $f_2(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$, наилучшим образом соответствующей исходным данным при визуальной оценке на графике. Для этого построить график с исходными данными (крестики, точки и т.п.) и различными вариантами полиномиальных моделей степени p, где $p \neq 2$.

c. Построить дополнительно функциональную модель вида $f_3(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

d. Используя скорректированный коэффициент детерминации $Radj$ определить наилучшую из трех моделей $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$.

4. Составить и представить преподавателю отчет о работе.

Вариант 1

Изучается динамика потребления молока в регионе.

Для этого собраны данные об объемах среднедушевого потребления мяса (кг) Y(t) за 7 месяцев. Обосновать и построить тренд данного ряда. Оценить достоверность уточненной по МНК модели.

t	1	2	3	4	5	6	7
Y(t)	8,16	8,25	8,41	8,76	9,2	9,78	10,1

ХОД РАБОТЫ

1. Согласно МНК, при нахождении полиномиальной модели второго порядка задача заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости a, b, c.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (ax^2{}_i + bx_i + c - y_i)^2 \rightarrow min$$

2. Для нахождения коэффициентов необходимо составить систему уравнений, состоящую из частных производных по каждой из переменных:

$$\begin{cases} S'_a = \sum_{i=1}^{n} 2(ax^2{}_i + bx_i + c - y_i)x^2{}_i = 0 \\ S'_b = \sum_{i=1}^{n} 2(bx^2{}_i + bx_i + c - y_i)x_i = 0 \\ S'_b = \sum_{i=1}^{n} 2(bx^2{}_i + bx_i + c - y_i) = 0 \end{cases}$$

3. Система уравнений приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x^4{}_i + b\sum_{i=1}^{n} x^3{}_i + c\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i = \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x^3{}_i + b\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

4. Решение системы уравнений:

a = 0.0637

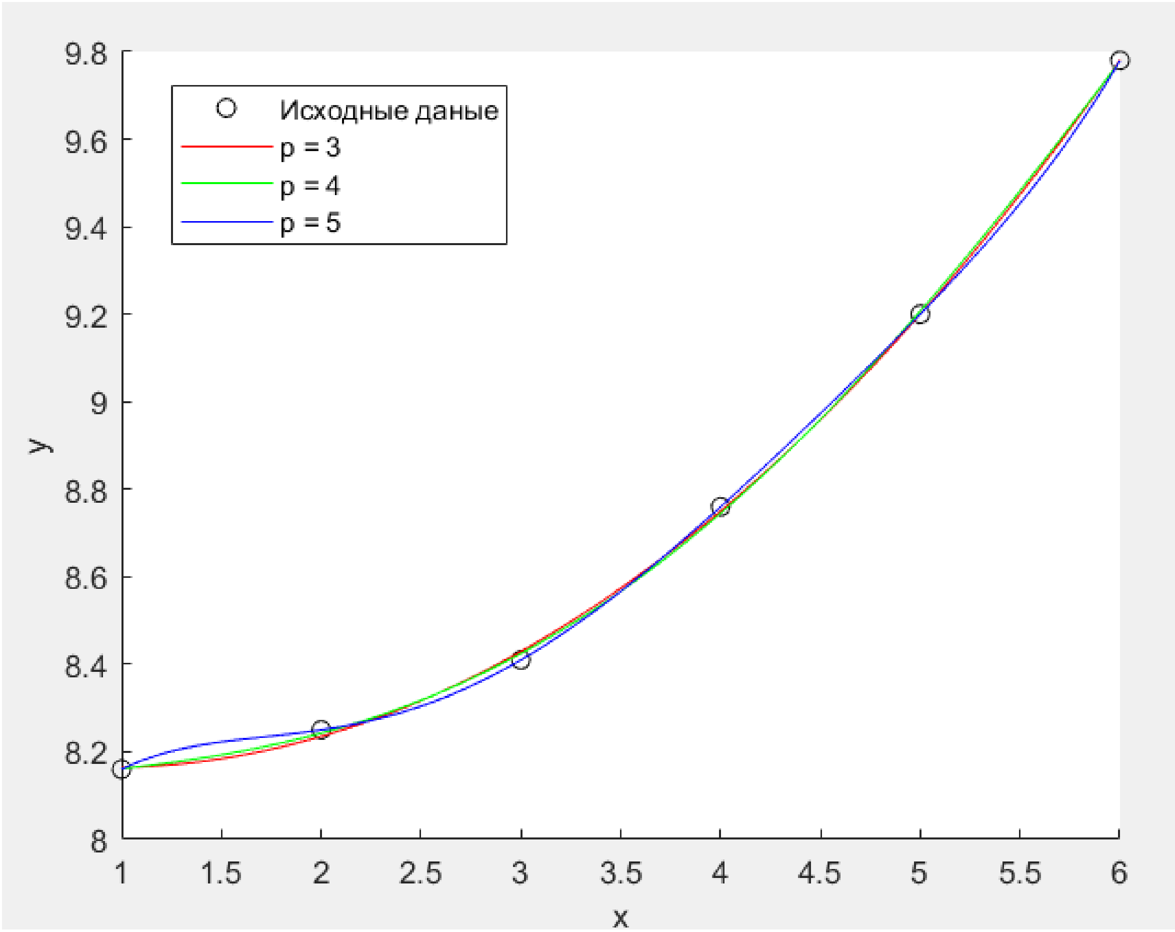
b = 0.1234

c= 8.225

Найденная полиномиальная функция имеет вид:

f1(x) = 0.0637 * x^2 + 0.1234 * x + 8.225

5. Для нахождения степени p полиномиальной модели $f_2(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$ построим последовательно модели с p = 3, 5 и покажем на графике для визуальной оценки:



При визуальном анализе графика была выбрана модель с p = 5, поскольку она ближе всего к данным ряда в точках аппроксимации.

f2(x) = 0.003083*x^5 + -0.05542*x^4 + 0.3737*x^3 + -1.1 *x^2 + 1.508*x + 7.43

6. Для нахождения функциональной модели вида

$$f_3(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

составим систему уравнений, за неизвестные принимая коэффициент a перед переменной x и свободный элемент b, за x – начало и конец отрезка аппроксимации, за y – координаты y соответствующих точек аппроксимации:

f3(x) = (a*x + b)^(1/3)

$$\left\{\sqrt[3]{a+b} = 8.16, \sqrt[3]{6a+b} = 9.78\right\}$$

a≈78.4206, b≈464.918

Итоговая функциональная модель имеет вид:

f3(x) = (78.4206 * x + 464.918) ^ (1/3)

7. Для определения наилучшей функциональной модели воспользуемся скорректированным коэффициентом детерминации Radj:

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}.$$

$$R^2 = 1 - \frac{D[y|x]}{D[y]} = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2},$$

где n – количество наблюдений за переменными x и y, k – количество параметров j-ой модели.

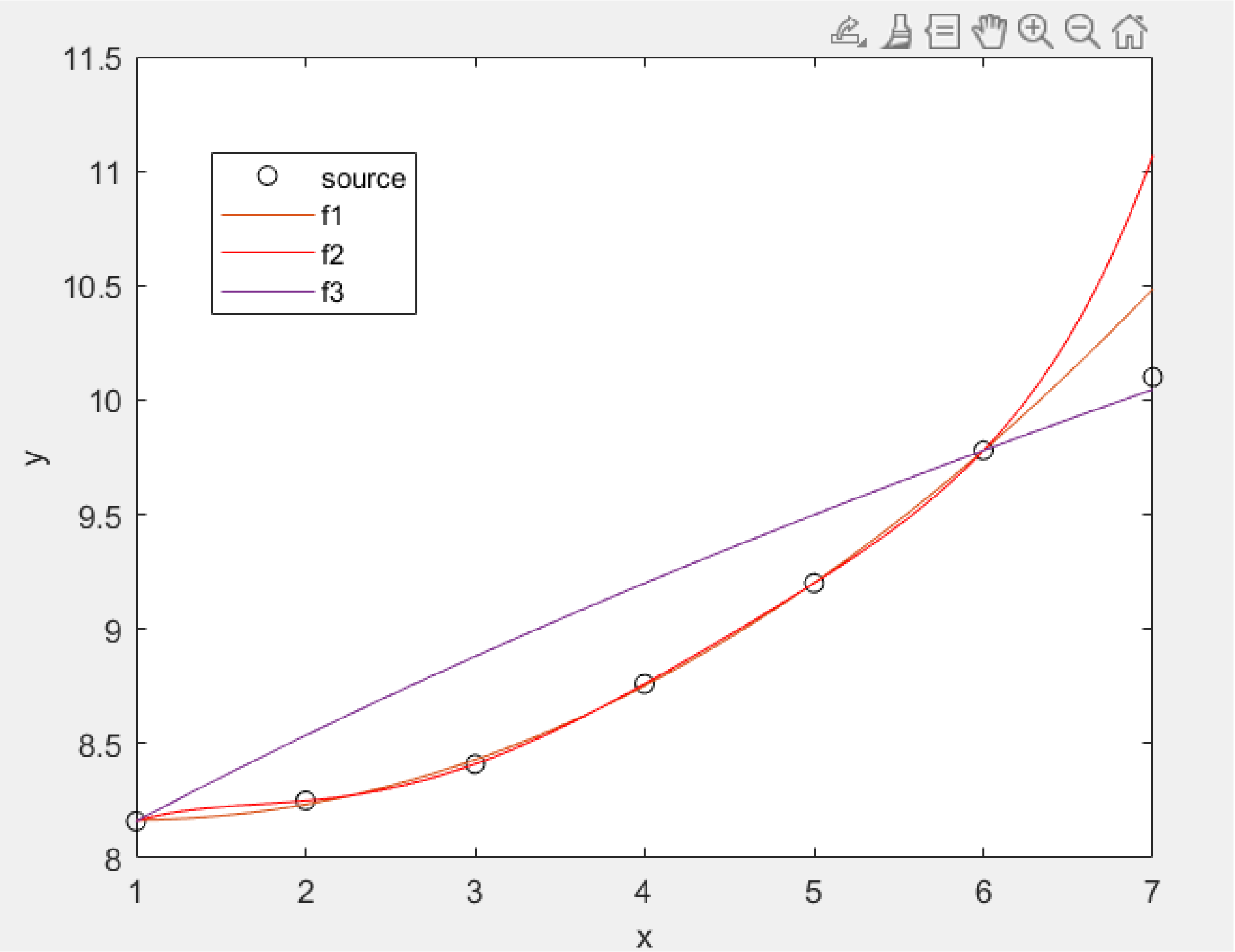
Radj f1 - 0.998457

Radj f2 - 1.000000

Radj f3 - 0.383944

Согласно коэффициенту детерминации, наилучшей моделью является полиномиальная модель f2.

8. Графическое представление функциональных моделей и исходных данных:



Исходные данные представлены точками, модель f1 имеет коричневое начертание, модель f2 – красное начертание, модель f3 – фиолетовое начертание. Наилучшее приближение имеет функциональная модель f2. Наименьшее отклонение прогноза показала модель f3.

Ошибка прогноза f1 - 0.385000

Ошибка прогноза f2 - 0.970000

Ошибка прогноза f3 - 0.054005

ВЫВОДЫ

В ходе выполнения лабораторной работы №2 были описаны функциональные модели для моделирования исходных данных.

Самостоятельно построена линейная полиномиальная модель второго порядка, имеющая вид

f1(x) = 0.0408 * x^2 + 0.019 * x + 8.06.

С помощью средств программного пакета Matlab построены полиномиальные модели порядков 3-6, визуально как наилучшая определена модель с порядком p = 5, имеющая вид

f2(x) = -0.0009583*x^5 + 0.01439*x^4 + -0.07634*x^3 + 0.2342*x^2 + -0.2716*x + 8.261.

Также построена модель f3:

f3(x) = (81.1604 * x + 462.178) ^ (1/3).

Функция	R_{adj}^2	Отклонение прогноза
f1	0.998457	0.385000
f2	1.000000	0.970000
f3	0.383944	0.054005

С помощью скорректированного коэффициента детерминации выбрана наилучшая модель – f2.

При этом наименьшее отклонение прогноза показала модель f3.

Приобретены навыки использования систем моделирования случайных временных рядов с помощью функциональных моделей.

Приложение 1 Исходный код программы

```
% все точки
sourceX = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7];
sourceY = [8.16, 8.25, 8.41, 8.76, 9.2, 9.78, 10.1];

% точки для составления моделей
x = sourceX(1, 1:6);
y = sourceY(1, 1:6);

% точка для проверки прогноза
prognosisX = sourceX(1, 7);
prognosisY = sourceY(1, 7);

% x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7];
% y = [8.16, 8.25, 8.41, 8.76, 9.2, 9.78, 10.1];

n = size(sourceX, 2);

approxPointsNum = size(x, 2);

A = [sum(x.^4), sum(x.^3), sum(x.^2);
    sum(x.^3), sum(x.^2), sum(x);
    sum(x.^2), sum(x), approxPointsNum];

b = [sum((x.^2) .* y);
    sum(x .* y);
    sum(y)];

coeff = A\b;

syms x1

hold on;

scatter(x, y , "k");

f2 = fit(transpose(x), transpose(y), "poly3");
plot(f2, "r");
f2 = fit(transpose(x), transpose(y), "poly4");
plot(f2, "g");
f2 = fit(transpose(x), transpose(y), "poly5");
plot(f2, "b");
% f2 = fit(transpose(x), transpose(y), "poly6");
% plot(f2, "c");
legend("Исходные даные", "p = 3", "p = 4", "p = 5");

hold off;

f1 = coeff(1) * x1 ^ 2 + coeff(2) * x1 + coeff(3);
f2 = fit(transpose(x), transpose(y), "poly5");
f3 = (x1 * 78.4206 + 464.918) ^ (1/3);

fprintf("f1 = %s\n", f1);
fprintf("f2 = %s\n", f2);
fprintf("f3 = %s\n", f3);

syms r k

y1 = zeros(1, approxPointsNum);
y2 = zeros(1, approxPointsNum);
y3 = zeros(1, approxPointsNum);
```

```
for i = 1:approxPointsNum
    y1(1, i) = subs(f1, x1, i);
    y2(1, i) = f2(i);
    y3(1, i) = subs(f3, x1, i);
end

Radj = 1 - (1 - r) * (approxPointsNum - 1) / (approxPointsNum - k);

% расчет скорректированного коэффициента детерминации модели
Radj1 = subs(subs(Radj, r, R(x, y, y1, 3)), k , 3);
Radj2 = subs(subs(Radj, r, R(x, y, y2, 6)), k , 6);
Radj3 = subs(subs(Radj, r, R(x, y, y3, 2)), k , 2);

fprintf("Radj f1 - %f\n", Radj1);
fprintf("Radj f2 - %f\n", Radj2);
fprintf("Radj f3 - %f\n", Radj3);

% расчет отклонений прогноза
prognosisFail1 = abs(prognosisY - subs(f1, x1, prognosisX));
prognosisFail2 = abs(prognosisY - f2(prognosisX));
prognosisFail3 = abs(prognosisY - subs(f3, x1, prognosisX));

fprintf("Ошибка прогноза f1 - %f\n", prognosisFail1);
fprintf("Ошибка прогноза f2 - %f\n", prognosisFail2);
fprintf("Ошибка прогноза f3 - %f\n", prognosisFail3);

plot(sourceX, sourceY, "ok");
hold on;
fplot(f1, [sourceX(1), sourceX(n)]);
plot(f2);
fplot(f3, [sourceX(1), sourceX(n)]);
legend("off");
legend("source", "f1", "f2", "f3");
hold off;


function [result] = R(X, Y, approximatedY, k)
% Посчитать коэффициент детерминации модели
% X - координаты исходных точек по X
% Y - координаты исходных точек по Y, сответствующие вектору X
% approximatedY - аппроксимированные значения Y, соответствующие
вектору X
% k - кол-во параметров модели аппроксимации

% кол-во точек
n = size(X, 2);

dispersion = sum((approximatedY - Y) .^ 2) / (n - k - 1);

result = 1 - (dispersion) / (std(Y) ^ 2);

    end
```