

ГУАП

КАФЕДРА № 43

ОТЧЕТ
ЗАЩИЩЕН С ОЦЕНКОЙ
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

к.т.н., доцент

должность, уч. степень, звание

подпись, дата

В. В. Мышко

инициалы, фамилия

ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Статистическое оценивание числовых характеристик законов распределения
случайных величин

по курсу: Обработка экспериментальных данных

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

СТУДЕНТ гр. №

4131з

подпись, дата

М. Д. Быстров

инициалы, фамилия

Санкт-Петербург 2025

Цель работы

На основе массива экспериментальных данных найти оценку математического ожидания случайной величины, проверить качество оценивания по заданной доверительной вероятности и заданной максимальной вероятной погрешности.

Задание на лабораторную работу

1. Найти оценку математического ожидания по массиву экспериментальных данных (табл. 1.1).
2. Построить 95-процентный доверительный интервал для исследуемой случайной величины.
3. Выполнить отсеивание аномальных наблюдений, не попадающих в 95-процентный доверительный интервал.
4. Найти уточненную оценку математического ожидания после отсеивания аномальных наблюдений.
5. Проверить качество оценивания математического ожидания:
 - по заданной доверительной вероятности (табл. 1.2) построить доверительный интервал для математического ожидания;
 - по заданной максимальной вероятной погрешности (табл. 1.2) найти доверительную вероятность попадания математического ожидания в интервал, определяемый указанной погрешностью.

Вариант 4.

Массив экспериментальных данных:

0,3 0,7 1,3 2,8 5,1 7,6 4,9 4,7 3,2 1,8 0,5 0,2

Доверительная вероятность, $\beta = 0,95$

Максимальная вероятная погрешность, $\epsilon\beta = 0,14$

Математические формулы

Формула мат. ожидания:

$$\tilde{M}_{\hat{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Дисперсия:

$$\tilde{D}_{\hat{x}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{M}_{\hat{x}})^2 \quad (2)$$

СКО:

$$\tilde{\sigma}_{\hat{x}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{M}_{\hat{x}})^2} \quad (3)$$

Двухсигмовый (95%) интервал:

$$I_{0,95} = [\tilde{M}_{\hat{x}} - 2\tilde{\sigma}_{\hat{x}}; \tilde{M}_{\hat{x}} + 2\tilde{\sigma}_{\hat{x}}] \quad (4)$$

Доверительная вероятность по заданной максимальной вероятной

погрешности:

$$\beta = P(|\tilde{M}_{\hat{x}} - M_{\hat{x}}| \leq \varepsilon_{\beta}) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon_{\beta}}{\sigma[\tilde{M}_{\hat{x}}]}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon_{\beta}\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_{\hat{x}}}\right) \quad (5)$$

Максимальная вероятная погрешность при заданной доверительной

вероятности:

$$\varepsilon_{\beta} = \sigma[\tilde{M}_{\hat{x}}] \cdot t_{\beta} = \frac{\tilde{\sigma}_{\hat{x}}}{\sqrt{n}} t_{\beta} \quad (6)$$

Результат выполнения работы

1. Оценка математического ожидания по массиву экспериментальных данных

Используется формула (1)

Код расчета:

```
def M(data):
    """Математическое ожидание - среднее арифметическое"""
    s = 0.0
    for v in data:
        s += v
    m = s / len(data)
    return m

# экспериментальные данные
experimental_data = [0.3, 0.7, 1.3, 2.8, 5.1, 7.6, 4.9, 4.7, 3.2, 1.8, 0.5, 0.2]

m = M(experimental_data)
print(f"Математическое ожидание - {m}")
```

Результат:

Математическое ожидание - 2.7583333333333333

2. Построить 95-процентный доверительный интервал для исследуемой случайной величины.

Используются формулы (3), (4)

Код расчета:

```
def D(data):
    """Дисперсия"""
    m = M(data)
    s = 0.0
    for v in data:
        s += (v - m) ** 2
    d = s / (len(data) - 1)
    return d

def SKO(data):
    """Среднее квадратичное отклонение"""
    return math.sqrt(D(data))

def DSI(data):
    """Двухсигмовый интервал (95% интервал)"""
    m = M(data)
    sko = SKO(data)
```

```
return [m - 2 * sko, m + 2 * sko]
```

```
I_95 = DSI(experimental_data)  
print(f"95% интервал - {I_95}")
```

Результат:

95% интервал - [-2.007040511265628, 7.523707177932294]

3. Выполнить отсеивание аномальных наблюдений, не попадающих в 95-процентный доверительный интервал.

Код расчета:

```
clean_data = [v for v in experimental_data if v >= I_95[0] and v <= I_95[1]]  
print(f"Очищенные данные - {clean_data}")
```

Результат:

Очищенные данные - [0.3, 0.7, 1.3, 2.8, 5.1, 4.9, 4.7, 3.2, 1.8, 0.5, 0.2]

Элемент массива данных 7,6 не попал в доверительный интервал и признается аномальным (подлежащим удалению).

4. Найти уточненную оценку математического ожидания после отсеивания аномальных наблюдений.

Используется формула (1)

Код расчета:

```
m_corrected = M(clean_data)  
print(f"Скорректированное математическое ожидание - {m_corrected}")
```

Результат:

Скорректированное математическое ожидание - 2.3181818181818183

5. Проверить качество оценивания математического ожидания:

- по заданной доверительной вероятности (табл. 1.2) построить доверительный интервал для математического ожидания;**

Используется формула (6)

Доверительная вероятность, $\beta = 0,95$

Код расчетов:

```
# доверительный интервал для мат. ожидания  
# по заданной доверительной вероятности  
  
# сначала надо найти максимальную вероятную погрешность  
# по заданной доверительной вероятности (формула 23)  
sko = SK0(clean_data)
```

```

n_sqrt = math.sqrt(len(clean_data))
e = sko / n_sqrt * 1.96 # 1.96 - t-коэфф при д.в. = 0.95 (приложение 4)

# далее посчитать доверительный интервал мат. ожидания
I_M_95 = [m_corrected - e, m_corrected + e]

print(f"Максимальная вероятная погрешность при заданной довер. вероятности {B} = {e}")
print(f"Доверительный интервал мат. ожидания - {I_M_95}")

```

Результат:

Максимальная вероятная погрешность при заданной довер. вероятности 0.95
 = 1.1348377478959655

Доверительный интервал мат. ожидания - [1.1833440702858529,
 3.453019566077784]

Значение квантиля нормального распределения взято из приложения 4.

Таким образом, математическое ожидание случайной величины (генеральной совокупности), из которой извлечена исследуемая выборка, находится с доверительной вероятностью не менее, чем 0,95 в интервале [1.1833440702858529, 3.453019566077784].

- по заданной максимальной вероятной погрешности (табл. 1.2) найти доверительную вероятность попадания математического ожидания в интервал, определяемый указанной погрешностью.

Используется формула (5)

Максимальная вероятная погрешность, $\epsilon\beta = 0,14$

Код расчета:

```

# ищем значение для подстановки в функцию Лапласа (формула 22)
x = E_B * n_sqrt / sko

# округленное до 2-х знаков после запятой значение X
x = 0.24

# значение функции Лапласа из приложения 2
F_0_3 = 0.0948

# вычисленная доверительная вероятность
B_2 = 2 * F_0_3

```

```
I_ = [m_corrected - E_B, m_corrected + E_B]

print(f"Мат ожидание величины находится в интервале {I_} с дов. вероятностью не менее {B_2}")
```

Результат:

Мат ожидание величины находится в интервале [2.178181818181818, 2.4581818181818185] с дов. вероятностью не менее 0.1896

Значение функции Лапласа взято из приложения 2 для аргумента, округленного до двух знаков после запятой.

Таким образом, математическое ожидание случайной величины (генеральной совокупности), из которой извлечена исследуемая выборка, находится в интервале [2.178181818181818, 2.4581818181818185] с вероятностью не менее, чем 0.1896.

Анализ полученных результатов и выводы

В ходе выполнения первой лабораторной работы проведено статистическое оценивание числовых характеристик законов распределения случайных величин.

Определены статистические оценки для набора экспериментальных данных. Проведена очистка экспериментальных данных с помощью двухсигмового интервала. Произведено уточнение оценок на очищенном наборе данных.

Качество оценивания математического ожидания проверено с помощью расчета доверительных интервалов, исходя из заданных доверительной вероятности и максимальной вероятной погрешности. Приведена трактовка полученных результатов.

Список литературы

1. Статистические методы обработки экспериментальных данных [Текст] : Учеб. пособие / В. И. Сеньченков. - СПб. : ГУАП, 2006 (СПб.). - 243 с. - Библиогр.: с. 227 (12 назв.). - 100 экз. - **ISBN 5-8088-0213-X**
2. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Е. А. Трофимова, Н. В. Кисляк, Д. В. Гилёв ; [под общ. ред. Е. А. Трофимовой] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 160 с. ISBN 978-5-7996-2317-3