**Лабораторная работа № 1**

**Симплекс-метод решения задач**

## Алгоритм симплекс-метода

Алгоритм симплекс-метода находит оптимальное решение, рассматривая ограниченное число допустимых базисных решений (опорных планов).

Алгоритм начинается всегда с некоторого допустимого опорного плана и затем пытается найти другой опорный базисный план, «улучшающий» значение целевой функции. Это возможно только в том случае, если возрастание какой-либо нулевой (небазисной) переменной ведет к улучшению значения целевой функции. Но для того, чтобы небазисная переменная стала положительной, надо одну из текущих базисных сделать нулевой (небазисной). Это необходимо, чтобы новое допустимое решение содержало в точности m базисных переменных. В соответствии с терминологией симплекс-метода выбранная нулевая переменная называется вводимой (в базис), а удаляемая базисная переменная – исключаемой (из базиса).

Алгоритм рассмотрим для наглядности на примере.



Здесь - дополнительные переменные (остаточные), добавленные в неравенства для преобразования их в равенства.

Задачу ЛП в канонической форме для удобства будем представлять в виде таблицы 1.

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Базис* | *z* | *x1* | *x2* | *s1* | *s2* | *s3* | *s4* | *Решение* |  |
| *z* | 1 | -5 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | *z-строка* |
| *s1* | 0 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 24 | *s1-строка* |
| *s2* | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 | *s2-строка* |
| *s3* | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | *s3-строка* |
| *s4* | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | *s4-строка* |

Нижние четыре строки представляют равенства ограничений; значения правых частей этих равенств даны в столбце «Решение». Строка *z* получена из равенства *z-5x1-4x2=0*.

Дополнительные переменные  составляют очевидное начальное допустимое базисное решение, которое отображается в столбце «Решение»:  При этом  они не базисные. Значение целевой функции при этом базисном решении равно нулю.

Будет ли начальное решение оптимальным? Конечно, нет, поскольку переменные *х1* и *х2* здесь равны нулю, а возрастание этих переменных даже на единицу приводит к увеличению значения целевой функции *z=5x1+4x2* на 5 единиц или 4. Поскольку коэффициент при *х1* больше, чем при *х2*, переменную *х1* следует ввести в базис (в этом случае она станет вводимой). Если обратиться к таблице 1.1, то вводимая переменная определяется среди небазисных как переменная, имеющая наибольший отрицательный коэффициент в *z-строке*.

Включаемая переменная *х1* должна принимать положительное значение. На рисунке 1.1 видно, что, исходя из начальной точки *А* (*х1=0, х2=0*), наибольшее значение, которое можно присвоить переменной *х1* (не выходя из множества допустимых решений), равно 4, что соответствует точке *В (х1=4, х2=0).* Это означает, что решение переместилось от крайней точки *А* в крайнюю точку *В*.

Алгебраически точку пересечения можно найти как отношение правой части равенства (значение в столбце «Решение») к коэффициенту при переменной *х1* в этом равенстве, как показано в таблице 2.

Таблица 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Базис | *х1* | Решение | Отношение |
| *s1* | 6 | 24 | 24/6=4 (минимум) |
| *s2* | 1 | 6 | 6/1=6 |
| *s3* | -1 | 1 | 1/(-1) = -1 (не подходит) |
| *s4* | 0 | 2 | 2/0 = ∞ (не подходит) |

При этом нас интересуют только неотрицательные отношения (или точка пересечения на положительной полуоси *х1*), так как они соответствуют направлению возрастания переменной *х1*. Отметим, что все значения в столбце «Решение» неотрицательны, поэтому вычисляемое отношение будет неотрицательным и конечным только в том случае, если знаменатель отношения строго положителен. Именно поэтому мы не рассматриваем отношения, соответствующие третьему и четвертому равенствам, так как там знаменатели или отрицательны, или равны нулю.

Минимальное неотрицательное отношение равно значению вводимой переменной *х1* в новом решении, а именно *х1*=*4*. Значение целевой функции возрастает при *х1*=*4* до 20 (=5*⋅*4).

Теперь среди текущих базисных переменных  следует определить исключаемую переменную, которая примет значение ноль после выведения ее из базиса и введения в базис переменной *х1*. (В нашем примере количество базисных переменных должно быть равно ровно 4). Поскольку наименьшее (неотрицательное) отношение соответствует переменной *s1*, то в точке *В*, именно эта переменная обращается в нуль. Таким образом, переменная *s1* будет исключаемой, в этом случае переменная *х1* автоматически получает значение, равное 4. Замена исключаемой переменной *s1* на вводимую *х1* приводит к новому базисному решению 

Вычисление нового базисного решения основывается на методе исключения переменных (методе Гаусса-Жордана). Для этого определим ведущий столбец, ассоциируемый с вводимой переменной, и ведущую строку, ассоциируемую с исключаемой переменной. Элемент, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки называется ведущим элементом.

Для нашего примера ведущий столбец переменной *х1* и ведущая строка *s1* в таблице 1 выделены серой заливкой. Ведущим элементом будет число 6.

Процесс вычисления нового базисного решения состоит из двух этапов.

1. Вычисление элементов новой ведущей строки.  
   ***Новая ведущая строка = Текущая ведущая строка / Ведущий элемент.***
2. Вычисление элементов остальных строк, включая z-строку.  
   ***Новая строка = Текущая строка - ее коэффициент в ведущем столбце\* новая ведущая строка.***

В нашем примере ведущая строка (*s1*- строка) делится на ведущий элемент (=6). Вычисляем элементы остальных строк таблицы.

1. *z*- строка.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *текущая z-строка:* | ( 1 | -5 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0│ | 0 ) |
| *-(-5)\*Новая ведущая строка:* | ( 0 | 5 | 10/3 | 5/6 | 0 | 0 | 0│ | 20 ) |
| *= Новая z- строка:* | ( 1 | 0 | -2/3 | 5/6 | 0 | 0 | 0│ | 20 ) |

1. *s2*- строка.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *текущая s2-строка:* | ( 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0│ | 6 ) |
| *-(1)\*Новая ведущая строка:* | ( 0 | -1 | -2/3 | -1/6 | 0 | 0 | 0│ | -4 ) |
| *= Новая s2- строка:* | ( 0 | 0 | 4/3 | -1/6 | 1 | 0 | 0│ | 2 ) |

1. *s3*- строка.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *текущая s3-строка:* | ( 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0│ | 1 ) |
| *+(1)\*Новая ведущая строка:* | ( 0 | 1 | 2/3 | 1/6 | 0 | 0 | 0│ | 4 ) |
| *= Новая s3- строка:* | ( 0 | 0 | 5/3 | 1/6 | 0 | 1 | 0│ | 5 ) |

1. *s4*- строка. Новая *s4*- строка повторяет текущую *s4*- строку, поскольку ее коэффициент в ведущем столбце равен нулю.

Новая симплекс таблица, соответствующая новому базисному решению, имеет вид.

Таблица 3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Базис* | *z* | *x1* | *x2* | *s1* | *s2* | *s3* | *s4* | *Решение* |  |
| *z* | 1 | 0 | -2/3 | 5/6 | 0 | 0 | 0 | 20 |  |
| *х1* | 0 | 1 | 2/3 | 1/6 | 0 | 0 | 0 | 4 |  |
| *s2* | 0 | 0 | 4/3 | -1/6 | 1 | 0 | 0 | 2 |  |
| *s3* | 0 | 0 | 5/3 | 1/6 | 0 | 1 | 0 | 5 |  |
| *s4* | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |  |

Отметим, что новая таблица 3 обладает теми же свойствами, что и начальная таблица 1: только небазисные переменные *х2* и *s1* равны нулю, в столбце «Решение» представлено новое базисное решение () вместе с новым значением целевой функции *z* (=20). Это результат применения метода Гаусса-Жордана.

Из последней таблицы видно, что полученное базисное решение не является оптимальным, поскольку в *z*-строке переменная *х2* имеет отрицательный коэффициент. Увеличение значения *х2* (ее текущее значение равно нулю) приведет к увеличению значения целевой функции. Таким образом, *х2* должна быть введена в базис.

Далее определим исключаемую переменную. Для этого вычислим отношения правых частей равенств, соответствующих ограничениям, к коэффициентам, стоящим при *х2* в этих равенствах.

Таблица 4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Базис | *x2* | Решение | Отношение |
| *x1* | 2/3 | 4 | 4/(2/3)=6 |
| *s2* | 4/3 | 2 | 2/(4/3)=3/2 минимум |
| *s3* | 5/3 | 5 | 5/(5/3) = 3 |
| *s4* | 1 | 2 | 2/1 = 2 |

В этой ситуации ведущей строкой будет *s2*-строка, а ведущим столбцом- столбец, соответствующий переменной *х2*. Ведущий элемент равен 4/3. В таблице 3 они отмечены заливкой.

Далее опять ведущую строку (*s2*- строка) делим на ведущий элемент (4/3) и с помощью этой новой строки избавляемся от *х2* во всех остальных строках, включая *z*- строку. В результате получится таблица 5.

Таблица 5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Базис* | *z* | *x1* | *x2* | *s1* | *s2* | *s3* | *s4* | *Решение* |  |
| *z* | 1 | 0 | 0 | 3/4 | 1/2 | 0 | 0 | 21 |  |
| *х1* | 0 | 1 | 0 | 1/4 | -1/2 | 0 | 0 | 3 |  |
| *х2* | 0 | 0 | 1 | -1/8 | 3/4 | 0 | 0 | 3/2 |  |
| *s3* | 0 | 0 | 0 | 3/8 | -5/4 | 1 | 0 | 5/2 |  |
| *s4* | 0 | 0 | 0 | 1/8 | -3/4 | 0 | 1 | 1/2 |  |

Поскольку *z*-строка не имеет отрицательных коэффициентов, соответствующих небазисным переменным *s1* и *s2*, полученное решение оптимально.

Найденное оптимальное решение вместе с дополнительными переменными будет Значение целевой функции *z* =21.

C помощью последней симплекс-таблицы 5 можно получить много дополнительной информации, кроме решения:

1. Состояние ресурсов.
2. Цена единицы ресурсов.
3. Все данные, необходимые для проведения анализа на чувствительность.

Сформулируем два правила, а также рассмотрим последовательность действий, выполняемых при реализации симплекс-метода.

***Условие оптимальности***

Вводимой переменной в задаче максимизации (минимизации) являетсянебазисная переменная, имеющая наибольший отрицательный (положительный) коэффициент в *z*-строке. Если в *z*-строке есть несколько таких коэффициентов, то выбор вводимой переменной берется произвольно. Оптимальное решение достигнуто тогда, когда в *z*-строке все коэффициенты при небазисных переменных будут неотрицательными (неположительными).

***Условие допустимости***

Как в задаче минимизации, так и в задаче максимизации в качестве исключаемой выбирается базисная переменная, для которой отношение правой части ограничения к положительному коэффициенту ведущего столбца минимально. Если базисных переменных с таким свойством несколько, то выбор исключаемой переменной выполняется произвольно.

***Последовательность действий, выполняемых в симплекс-методе***

**Шаг 0** Находится начальное допустимое решение.

**Шаг 1** На основе условия оптимальности определяется вводимая переменная. Если вводимых переменных нет, вычисления заканчиваются.

**Шаг 2**На основе условия допустимости выбирается исключаемая переменная.

**Шаг 3**Методом Гаусса-Жордана вычисляется новое базисное решение. Переход к шагу 1.

**Пример.**

Решение.

1)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Базис** | **Решение** | **x1** | **x2** | **s1** | **s2** | **s3** | **s4** |
| **s1** | 18 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **s2** | 16 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **s3** | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **s4** | 21 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **z** | 0 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

вводимая переменная определяется среди небазисных как переменная, имеющая наибольший отрицательный коэффициент в *z-строке*

Не базисные переменные – x1, x2

x2 > x1, следовательно, x2 следует ввести в базис

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Базис** | **x2** | **Решение** | **Отношение** |
| **s1** | 3 | 18 | 6 |
| **s2** | 1 | 16 | 16 |
| **s3** | 1 | 5 | 5 |
| **s4** | 0 | 21 | ∞ |

Минимальное неотрицательное отношение равное значению вводимой переменной x2 в новом решении x2=5.

Исключаемая переменная будет s3, поскольку ему соответствует наименьшее (**положительное**) отношение.

Базисное решение (s1,s2,x2,s4)

Ведущий элемент = 1

Для этого определим ведущий столбец, ассоциируемый с вводимой переменной, и ведущую строку, ассоциируемую с исключаемой переменной. Элемент, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки называется **ведущим элементом**.

1. Вычисление элементов новой ведущей строки.  
   ***Новая ведущая строка = Текущая ведущая строка / Ведущий элемент.***
2. Вычисление элементов остальных строк, включая z-строку.  
   ***Новая строка = Текущая строка - ее коэффициент в ведущем столбце\* новая ведущая строка.***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Базис** | **Решение** | **x1** | **x2** | **s1** | **s2** | **s3** | **s4** |
| **s1** | 18-(5\*3):1 | 1-(0\*3):1 | 3-(1\*3):1 | 1-(0\*3):1 | 0-(0\*3):1 | 0-(1\*3):1 | 0-(0\*3):1 |
| **s2** | 16-(5\*1):1 | 2-(0\*1):1 | 1-(1\*1):1 | 0-(0\*1):1 | 1-(0\*1):1 | 0-(1\*1):1 | 0-(0\*1):1 |
| **x2** | 5 : 1 | 0 : 1 | 1 : 1 | 0 : 1 | 0 : 1 | 1 : 1 | 0 : 1 |
| **s4** | 21-(5\*0):1 | 3-(0\*0):1 | 0-(1\*0):1 | 0-(0\*0):1 | 0-(0\*0):1 | 0-(1\*0):1 | 1-(0\*0):1 |
| **z** | 0-(5\*-3):1 | -2-(0\*-3):1 | -3-(1\*-3):1 | 0-(0\*-3):1 | 0-(0\*-3):1 | 0-(1\*-3):1 | 0-(0\*-3):1 |

2)

Новая симплекс таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Базис** | **Решение** | **x1** | **x2** | **s1** | **s2** | **s3** | **s4** |
| **s1** | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | -3 | 0 |
| **s2** | 11 | 2 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| **x2** | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **s4** | 21 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **z** | 15 | -2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Базис** | **x1** | **Решение** | **Отношение** |
| **s1** | 1 | 3 | 3 |
| **s2** | 2 | 11 | 11/2 |
| **x2** | 0 | 5 | ∞ |
| **s4** | 3 | 21 | 7 |

Небазисные переменные – x1, s3, в z

Минимальное неотрицательное отношение равное значению вводимой переменной x1 в новом решении x1=3.

Исключаемая переменная будет s1, поскольку ему соответствует наименьшее отношение.

Базисное решение (x1,s2,x2,s4)

Ведущий элемент = 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Базис** | **Решение** | **x1** | **x2** | **s1** | **s2** | **s3** | **s4** |
| **x1** | 3 : 1 | 1 : 1 | 0 : 1 | 1 : 1 | 0 : 1 | -3 : 1 | 0 : 1 |
| **s2** | 11-(3\*2):1 | 2-(1\*2):1 | 0-(0\*2):1 | 0-(1\*2):1 | 1-(0\*2):1 | -1-(-3\*2):1 | 0-(0\*2):1 |
| **x2** | 5-(3\*0):1 | 0-(1\*0):1 | 1-(0\*0):1 | 0-(1\*0):1 | 0-(0\*0):1 | 1-(-3\*0):1 | 0-(0\*0):1 |
| **s4** | 21-(3\*3):1 | 3-(1\*3):1 | 0-(0\*3):1 | 0-(1\*3):1 | 0-(0\*3):1 | 0-(-3\*3):1 | 1-(0\*3):1 |
| **z** | 15-(3\*-2):1 | -2-(1\*-2):1 | 0-(0\*-2):1 | 0-(1\*-2):1 | 0-(0\*-2):1 | 3-(-3\*-2):1 | 0-(0\*-2):1 |

3)

Новая симплекс таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Базис** | **Решение** | **x1** | **x2** | **s1** | **s2** | **s3** | **s4** |
| **x1** | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | -3 | 0 |
| **s2** | 5 | 0 | 0 | -2 | 1 | 5 | 0 |
| **x2** | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **s4** | 12 | 0 | 0 | -3 | 0 | 9 | 1 |
| **z** | 21 | 0 | 0 | 2 | 0 | -3 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Базис** | **s3** | **Решение** | **Отношение** |
| **x1** | 1 | 3 | 3 |
| **s2** | 2 | 5 | 5/2 |
| **x2** | 0 | 5 | ∞ |
| **s4** | 3 | 12 | 4 |

Минимальное неотрицательное отношение равное значению вводимой переменной s2 в новом решении s2=2.5.

Исключаемая переменная будет s2, поскольку ему соответствует наименьшее отношение.

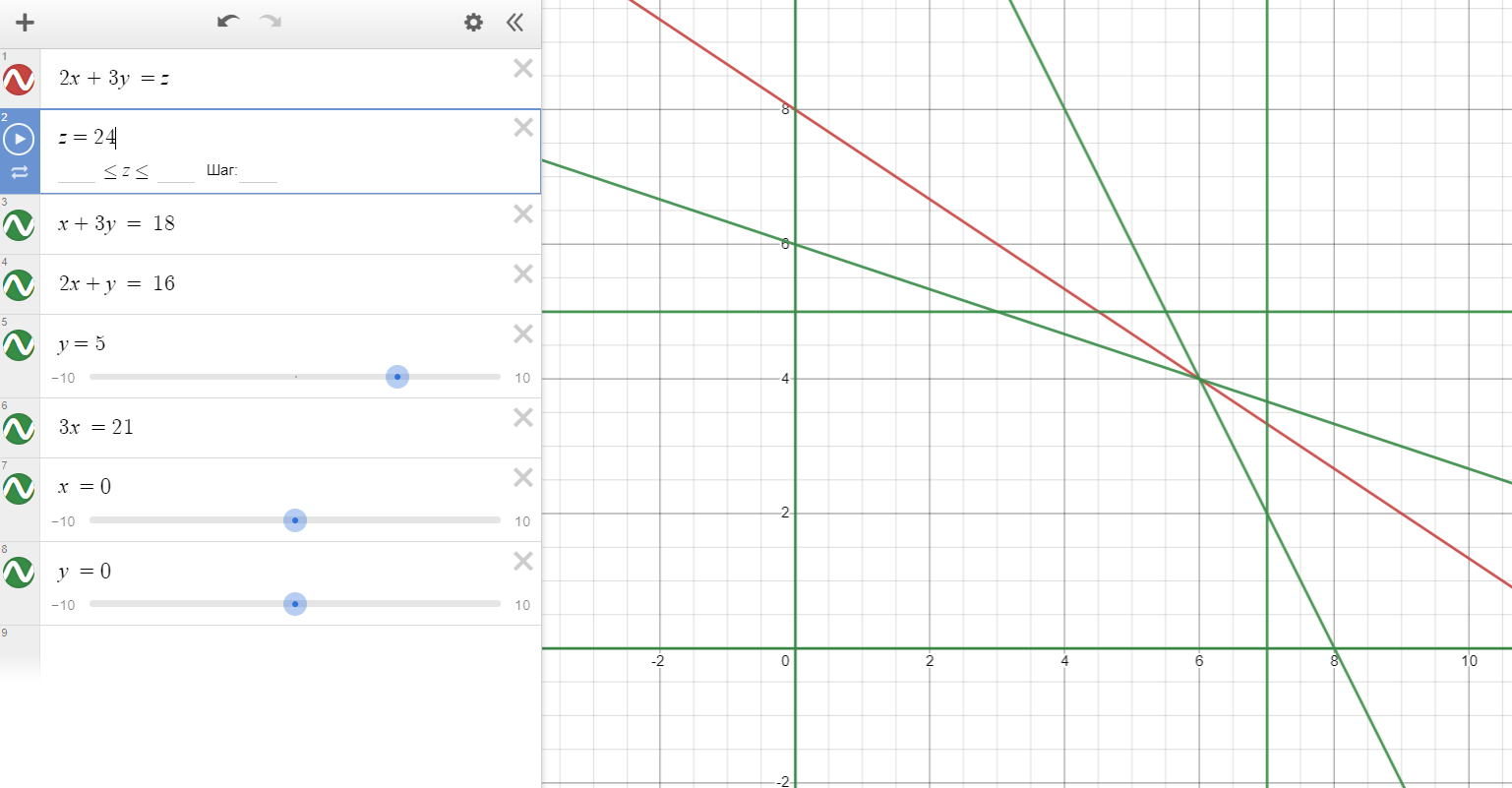
Базисное решение (x1,s3,x2,s4)

Ведущий элемент = 5

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Базис** | **Решение** | **x1** | **x2** | **s1** | **s2** | **s3** | **s4** |
| **x1** | 3-(5\*-3):5 | 1-(0\*-3):5 | 0-(0\*-3):5 | 1-(-2\*-3):5 | 0-(1\*-3):5 | -3-(5\*-3):5 | 0-(0\*-3):5 |
| **s2** | 5 : 5 | 0 : 5 | 0 : 5 | -2 : 5 | 1 : 5 | 5 : 5 | 0 : 5 |
| **x2** | 5-(5\*1):5 | 0-(0\*1):5 | 1-(0\*1):5 | 0-(-2\*1):5 | 0-(1\*1):5 | 1-(5\*1):5 | 0-(0\*1):5 |
| **s4** | 12-(5\*9):5 | 0-(0\*9):5 | 0-(0\*9):5 | -3-(-2\*9):5 | 0-(1\*9):5 | 9-(5\*9):5 | 1-(0\*9):5 |
| **z** | 21-(5\*-3):5 | 0-(0\*-3):5 | 0-(0\*-3):5 | 2-(-2\*-3):5 | 0-(1\*-3):5 | -3-(5\*-3):5 | 0-(0\*-3):5 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Базис** | **Решение** | **x1** | **x2** | **s1** | **s2** | **s3** | **s4** |
| **x1** | 6 | 1 | 0 | -1/5 | 3/5 | 0 | 0 |
| **s2** | 1 | 0 | 0 | -2/5 | 1/5 | 1 | 0 |
| **x2** | 4 | 0 | 1 | 2/5 | -1/5 | 0 | 0 |
| **s4** | 3 | 0 | 0 | 3/5 | -9/5 | 0 | 1 |
| **z** | 24 | 0 | 0 | 4/5 | 3/5 | 0 | 0 |

Отрицательных значений в z-строке нет, следовательно, таблица имеет оптимальное решение, что подтверждается графиком ниже:



**Лабораторная работа № 1**

1. Найти оптимальное решение задачи линейного программирования с использованием симплекс-метода в Excel и на Python. Привести графическую интерпретацию результатов решения задачи.

2. (Творческое) Придумать ситуацию, для которой подойдет математическая модель (написать содержательную постановку задачи).

| № | Задание |
| --- | --- |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 |  |
| 8 |  |
| 9 |  |
| 10 |  |
| 11 |  |
| 12 |  |
| 13 |  |
| 14 |  |
| 15 |  |
| 16 |  |
| 17 |  |
| 18 |  |
| 19 |  |
| 20 |  |
| 21 |  |
| 22 |  |
| 23 |  |
| 24 |  |
| 25 |  |
| 26 |  |
| 27 |  |
| 28 |  |
| 29 |  |
| 30 |  |