**Контрольная работа 2**

**Разработка алгоритмов методов решения оптимизационных задач**

**Цель**

Сформулировать, формализовать и решить с помощью венгерского метода задачу о назначении размерностью 5 × 5 как задачу линейного программирования.

**Требования к содержанию**

1. Развернутая формулировка задачи (описание исходных данных, критерия (критериев) оптимизации).
2. Наличие математической модели решаемой задачи как задачи линейного программирования.
3. Развернутая интерпретация результата.

**Полезные ссылки**

Математическая оптимизация и моделирование в PuLP: задача о назначениях <https://habr.com/ru/articles/731006/>

Задача выбора (назначения). Венгерский метод решения

<https://habr.com/ru/articles/574732/>

**Пример**

Исходные данные. Показатели эффективности назначения i-го кандидата на j-ю работу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 4 | 6 | 3 |
| 9 | 7 | 10 | 9 |
| 4 | 5 | 11 | 7 |
| 8 | 7 | 8 | 5 |

**Шаг №1**

**1. Проводим редукцию матрицы по строкам**. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 3 | 5 | 2 | **1** |
| 2 | 0 | 3 | 2 | **7** |
| 0 | 1 | 7 | 3 | **4** |
| 3 | 2 | 3 | 0 | **5** |

Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 2 | 0 | 0 |
| **0** | **0** | **3** | **0** |

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

**2. Методом проб и ошибок** проводим поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость.

Фиксируем нулевое значение в клетке (1, 1). Другие нули в строке 1 и столбце 1 вычеркиваем. Для данной клетки вычеркиваем нули в клетках (4; 3), (2; 2).

Фиксируем нулевое значение в клетке (2, 3). Другие нули в строке 2 и столбце 3 вычеркиваем. Для данной клетки вычеркиваем нули в клетках (4; 3), (2; 2).

В итоге получаем следующую матрицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **[0]** | 3 | 2 | 2 |
| 2 | [-0-] | **[0]** | 2 |
| [-0-] | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 2 | [-0-] | 0 |

Поскольку расположение нулевых элементов в матрице не позволяет образовать систему из 4-х независимых нулей (в матрице их только 2), то **решение недопустимое**.

**3. Проводим модификацию матрицы**. Вычеркиваем строки и столбцы с возможно большим количеством нулевых элементов:

строку 2, столбец 1, строку 4

Получаем сокращенную матрицу (элементы выделены):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | **3** | **2** | **2** |
| 2 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | **1** | **4** | **3** |
| 3 | 2 | 0 | 0 |

Минимальный элемент сокращенной матрицы (min(3, 2, 2, 1, 4, 3) = 1) вычитаем из всех ее элементов:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | **2** | **1** | **1** |
| 2 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | **0** | **3** | **2** |
| 3 | 2 | 0 | 0 |

Затем складываем минимальный элемент с элементами, расположенными на пересечениях вычеркнутых строк и столбцов:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 2 | 1 | 1 |
| **3** | 0 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 3 | 2 |
| **4** | 2 | 0 | 0 |

**Шаг №2**

**1. Проводим редукцию матрицы по строкам**. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент.

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

**2. Методом проб и ошибок** проводим поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость.

Фиксируем нулевое значение в клетке (1, 1). Другие нули в строке 1 и столбце 1 вычеркиваем.

Фиксируем нулевое значение в клетке (2, 3). Другие нули в строке 2 и столбце 3 вычеркиваем.

Фиксируем нулевое значение в клетке (3, 2). Другие нули в строке 3 и столбце 2 вычеркиваем.

Фиксируем нулевое значение в клетке (4, 4). Другие нули в строке 4 и столбце 4 вычеркиваем.

В итоге получаем следующую матрицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **[0]** | 2 | 1 | 1 |
| 3 | [-0-] | **[0]** | 2 |
| [-0-] | **[0]** | 3 | 2 |
| 4 | 2 | [-0-] | **[0]** |

Количество найденных нулей равно k = 4. В результате получаем эквивалентную матрицу Сэ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 0 | 0 |

**4. Методом проб и ошибок определяем матрицу назначения Х**, которая позволяет по аналогично расположенным элементам исходной матрицы (в квадратах) вычислить минимальную стоимость назначения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **[0]** | 2 | 1 | 1 |
| 3 | [-0-] | **[0]** | 2 |
| [-0-] | **[0]** | 3 | 2 |
| 4 | 2 | [-0-] | **[0]** |

Cmin = 10 + 1 + 5 + 5 = 21

Ответ: Первый кандидат назначается на первую работу, второй – на третью, третий – на вторую, четвертый – на четвертую.

**Исходные данные**

Показатели эффективности назначения i-го кандидата на j-ю работу.

| № | Таблица показателей эффективности |
| --- | --- |
| 1 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 14 | 2 | 6 | 3 | 9 | | 6 | 1 | 15 | 12 | 12 | | 10 | 7 | 6 | 4 | 3 | | 2 | 12 | 12 | 15 | 14 | | 0 | 7 | 2 | 10 | 5 | |
| 2 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 5 | 4 | 4 | 7 | 1 | | 7 | 7 | 2 | 8 | 6 | | 5 | 9 | 3 | 1 | 4 | | 1 | 9 | 6 | 7 | 8 | | 3 | 1 | 2 | 9 | 3 | |
| 3 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 3 | 5 | 1 | 6 | 9 | | 4 | 5 | 6 | 5 | 5 | | 7 | 7 | 5 | 2 | 3 | | 6 | 9 | 4 | 8 | 9 | | 5 | 4 | 2 | 5 | 1 | |
| 4 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 14 | 1 | 1 | 7 | 2 | | 11 | 12 | 4 | 3 | 1 | | 10 | 3 | 10 | 8 | 12 | | 15 | 10 | 9 | 1 | 5 | | 15 | 2 | 12 | 1 | 10 | |
| 5 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 1 | 0 | 6 | 6 | 14 | | 5 | 5 | 9 | 4 | 8 | | 5 | 5 | 3 | 1 | 1 | | 8 | 9 | 9 | 9 | 2 | | 1 | 9 | 3 | 9 | 4 | |
| 6 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 6 | 2 | 5 | 6 | 4 | | 7 | 8 | 7 | 3 | 8 | | 2 | 4 | 6 | 3 | 1 | | 7 | 2 | 4 | 6 | 7 | | 2 | 8 | 1 | 6 | 2 | |
| 7 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 13 | 8 | 2 | 5 | 3 | | 12 | 8 | 2 | 7 | 1 | | 6 | 3 | 8 | 9 | 2 | | 8 | 11 | 15 | 14 | 13 | | 10 | 13 | 5 | 13 | 3 | |
| 8 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 6 | 5 | 4 | 8 | 6 | | 4 | 2 | 1 | 8 | 7 | | 4 | 5 | 5 | 4 | 6 | | 1 | 4 | 6 | 3 | 5 | | 4 | 4 | 7 | 5 | 8 | |
| 9 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 1 | 8 | 11 | 15 | 15 | | 11 | 10 | 11 | 13 | 3 | | 14 | 2 | 14 | 2 | 11 | | 11 | 0 | 6 | 10 | 11 | | 13 | 13 | 14 | 6 | 8 | |
| 10 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 6 | 1 | 1 | 1 | 8 | | 1 | 5 | 7 | 5 | 7 | | 0 | 3 | 1 | 1 | 5 | | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | | 2 | 3 | 6 | 4 | 6 | |
| 11 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 8 | 12 | 13 | 3 | 5 | | 13 | 5 | 9 | 3 | 12 | | 15 | 5 | 4 | 7 | 11 | | 11 | 8 | 4 | 4 | 13 | | 5 | 2 | 3 | 9 | 13 | |
| 12 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 5 | 3 | 1 | 1 | 2 | | 4 | 8 | 9 | 9 | 4 | | 2 | 11 | 1 | 9 | 0 | | 11 | 12 | 11 | 2 | 0 | | 11 | 8 | 8 | 2 | 1 | |
| 13 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 4 | 1 | 2 | 13 | 1 | | 15 | 3 | 4 | 6 | 9 | | 4 | 8 | 3 | 0 | 1 | | 0 | 0 | 8 | 1 | 14 | | 11 | 9 | 9 | 4 | 2 | |
| 14 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 1 | 6 | 5 | 8 | 13 | | 11 | 1 | 14 | 2 | 12 | | 2 | 9 | 10 | 15 | 11 | | 13 | 14 | 15 | 8 | 3 | | 4 | 15 | 14 | 1 | 15 | |
| 15 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 4 | 2 | 10 | 6 | 5 | | 9 | 12 | 9 | 10 | 8 | | 10 | 8 | 4 | 4 | 3 | | 8 | 8 | 3 | 2 | 12 | | 10 | 2 | 3 | 5 | 8 | |
| 16 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 3 | 1 | 5 | 3 | 3 | | 9 | 13 | 14 | 4 | 4 | | 10 | 1 | 5 | 15 | 3 | | 14 | 2 | 0 | 3 | 11 | | 14 | 2 | 0 | 6 | 6 | |
| 17 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 9 | 4 | 9 | 5 | 2 | | 9 | 11 | 11 | 7 | 4 | | 6 | 3 | 3 | 8 | 8 | | 5 | 10 | 12 | 0 | 3 | | 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | |
| 18 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 10 | 7 | 0 | 3 | 7 | | 9 | 6 | 14 | 8 | 14 | | 9 | 12 | 9 | 14 | 8 | | 9 | 13 | 15 | 9 | 14 | | 3 | 7 | 15 | 9 | 0 | |
| 19 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 2 | 5 | 1 | 7 | 6 | | 3 | 5 | 3 | 10 | 1 | | 10 | 7 | 7 | 12 | 3 | | 7 | 1 | 5 | 1 | 10 | | 3 | 4 | 4 | 11 | 8 | |
| 20 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 1 | 15 | 1 | 13 | 2 | | 7 | 9 | 14 | 9 | 15 | | 9 | 11 | 4 | 8 | 10 | | 4 | 6 | 13 | 10 | 2 | | 9 | 8 | 14 | 2 | 8 | |
| 21 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 11 | 8 | 9 | 11 | 1 | | 10 | 3 | 5 | 3 | 7 | | 10 | 3 | 10 | 2 | 2 | | 4 | 10 | 12 | 9 | 9 | | 12 | 4 | 1 | 10 | 6 | |
| 22 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 2 | 11 | 15 | 2 | 8 | | 3 | 5 | 10 | 10 | 6 | | 7 | 13 | 8 | 5 | 5 | | 7 | 2 | 13 | 2 | 9 | | 5 | 6 | 13 | 12 | 6 | |
| 23 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 9 | 5 | 6 | 10 | 12 | | 1 | 3 | 11 | 5 | 12 | | 4 | 3 | 10 | 12 | 9 | | 10 | 12 | 9 | 9 | 3 | | 4 | 5 | 8 | 3 | 12 | |
| 24 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 8 | 10 | 12 | 4 | 3 | | 1 | 8 | 7 | 5 | 12 | | 4 | 11 | 12 | 3 | 3 | | 9 | 4 | 9 | 10 | 9 | | 4 | 5 | 9 | 8 | 11 | |
| 25 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 3 | 13 | 7 | 4 | 15 | | 2 | 6 | 5 | 2 | 11 | | 13 | 11 | 13 | 7 | 1 | | 10 | 9 | 1 | 13 | 13 | | 6 | 6 | 15 | 12 | 6 | |
| 26 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 5 | 14 | 11 | 10 | 1 | | 9 | 8 | 10 | 14 | 14 | | 7 | 15 | 8 | 9 | 1 | | 1 | 8 | 0 | 7 | 8 | | 2 | 12 | 4 | 9 | 5 | |
| 27 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 12 | 13 | 13 | 0 | 4 | | 7 | 9 | 0 | 14 | 0 | | 7 | 6 | 12 | 0 | 13 | | 2 | 1 | 1 | 12 | 2 | | 7 | 8 | 15 | 8 | 11 | |
| 28 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 15 | 13 | 8 | 8 | 1 | | 9 | 15 | 10 | 0 | 11 | | 6 | 11 | 6 | 6 | 10 | | 9 | 7 | 14 | 3 | 4 | | 13 | 4 | 7 | 1 | 1 | |
| 29 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 13 | 6 | 1 | 15 | 1 | | 11 | 1 | 2 | 8 | 3 | | 13 | 13 | 5 | 12 | 1 | | 3 | 15 | 15 | 6 | 11 | | 7 | 9 | 10 | 7 | 9 | |
| 30 | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 5 | 5 | 5 | 2 | 11 | | 4 | 3 | 7 | 9 | 8 | | 6 | 5 | 10 | 8 | 10 | | 11 | 7 | 4 | 11 | 10 | | 7 | 12 | 3 | 1 | 1 | |