Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
FI3104-1

Tarea 5

Maximiliano Dirk Vega Aguilera
18.451.231-9

1 Introducción

La tarea 5 consistió en resolver la ecuación de Poisson para el potencial electrostático en dos dimensiones, utilizando el método de sobre-relajación y analizar la convergencia para distintos valores del parámetro w. Adicionalmente, se debió escribir el programa de forma que cumpliera las reglas de PEP8.

La ecuacion de Poisson para el potencial electroestatico toma la siguiente forma:

$$\nabla^2 V(x,y) = -\rho(x,y) \tag{1}$$

Donde $V(x,y)$ es el potencial en el punto (x,y) y $\rho(x,y)$ es la densidad de carga en el mismo punto. En este problema se integró la ecuación en una caja de 10[cm]x15[cm] conectada a tierra ($V = 0$ en el perímetro) y que cumple, para una línea de 6[cm] de largo centrada en el eje x y ubicada 5.5[cm] bajo el centro de la caja, la siguiente condición de borde:

$$\frac{dV}{dy} = 1 \tag{2}$$

Dentro de esta caja, se encuentra una caja de 5[cm]x7[cm] centrada en la anterior, que encierra una letra con densidad de carga constante y cuya carga total es 1[C].

2 Desarrollo

Para el desarrollo de esta tarea se utilizó el lenguaje python y sus librerías numpy y matplotlib.pyplot. También se llevó un registro del trabajo mediante el repositorio de git.

Lo primero que se hizo fue construir funciones auxiliares que permitieran trabajar de forma más simple. La primera función construye una caja con las dimensiones deseada y forma una grilla según el valor del paso que le demos. Luego, se construyo una función que determina los puntos correspondientes a la letra M, dentro de una caja, y le asigna el valor de la densidad. Una tercera función indexa una caja dentro de una caja mas grande, de modo que la pequeña quede centrada. También se construyó una función que realiza una iteración usando el método de sobre-relajación en toda la caja. Una última función determina la diferencia entre el potencial en dos pasos consecutivos, indicando si el método logró converger o no dado cierta tolerancia.

Para poder integrar la ecuación de Poisson, se utilizó el método de sobre-relajación para integrar en la caja completa, donde la línea que cumple la condición (2), corresponde a una condición de tipo Neumann. Luego, las expresiones al integrar son:

$$V_{i,j} = (1-w)V_{i,j} + \frac{w}{4}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - h^2 G_{i,j}) \tag{3}$$

$$V_{i,j} = (1-w)V_{i,j} + \frac{w}{3}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + hg_{i,j-1} - h^2 G_{i,j}) \tag{4}$$

$$V_{i,j} = V_{i,j-1} + hg_{i,j} \tag{5}$$

Donde $G_{i,j} = -\rho(x,y)$, h es el paso de la grilla y w es el parámetro del método.

En la resolución del problema, se construyó la una caja con los términos $G_{i,j}$ y se introdujo como parámetro de la función que calcula una iteración. Esta función itera por partes, usando la expresión (5) en los términos correspondiente a la linea, la expresión (4) en los términos adyacentes a la linea en el eje y, y la expresión (3) en el resto de la caja.

Para el desarrollo de la tarea se consideró un paso $h = 0.25[cm]$. La figura 1 muestra la densidad de carga en la caja de 10[cm]x15[cm], cada elemento de la letra tiene una densidad $\rho = 0.00367[C\ cm^{-2}]$, lo que da una carga total $q = 1.1176[C]$ en toda la caja.

Ya definidas las funciones y los parámetros a utilizar, se hizo una iteración sobre la función que realiza una iteración. Esta iteración debía parar si cuando el valor del potencial haya convergido para una tolerancia de 10^{-7} o cuando se haya alcanzado un número máximo de iteraciones, para evitar un loop infinito.

Se realizó este proceso para distintos valores del parámetro w, obteniéndose los datos de las figuras 2-6:

De estos resultados, y de pruebas realizadas con w 2.0, se deduce que el método converge de forma mas rápida con valores cercanos a $w = 1.8$, disminuyendo su rapidez a medida que w disminuye, pero divergiendo para valores cercanos a 2.0.

La figura 7 muestra la integración para un valor $\rho_{i,j} = 1$ para cada casilla de la letra, de modo que se pudiera observar mejor el efecto de esta sobre la caja.

Por el lado de la implementación de PEP8, el programa cumple con las reglas, salvo unos errores en la función que calcula una iteración, ya que si se corregía, el programa dejaba de funcionar, por lo que se optó por dejarlo así.

3 Conclusión

El método de sobre-relajación se porta bastante bien cuando no se utilizan valores de w cercanos a 2. Variar los valores de w afecta la rapidez en la que el método converge.

Dadas las condiciones del problema, que la carga total fuese de 1[C] no permite apreciar el efecto de esta, y solo se ve el efecto de la línea.

La línea marca un límite en el que el potencial pasa de estar negativo a ser positivo, a pesar de que la derivada del potencial sea constante.

Finalmente, luego de corregir el programa por PEP8, se apreció que quedo mucho más entendible a como estaba antes. Esto facilitara la comprensión a un tercero que lea el código.

4 Figuras

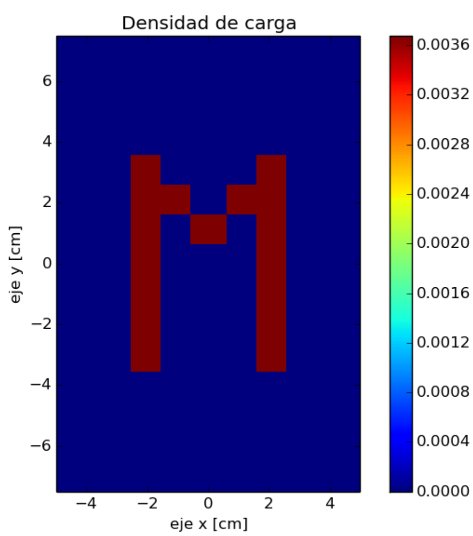

Figure 1: Densidad de Carga en la caja de 10[cm]x15[cm].

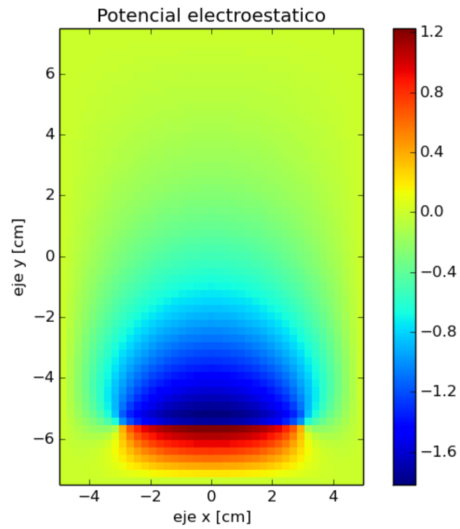

Figure 2: $w = 0.8$. Convergió en 6114 pasos.

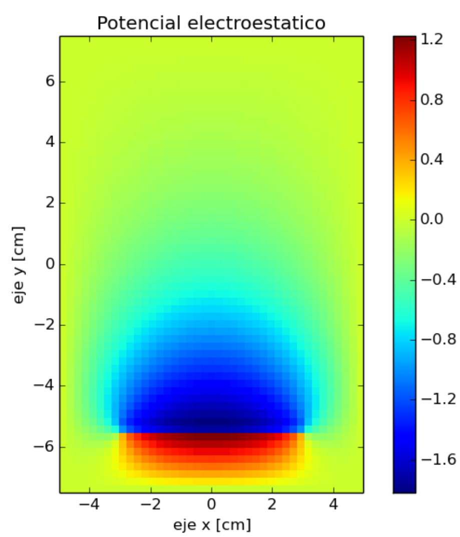

Figure 3: $w = 1.0$. Convergió en 2864 pasos.

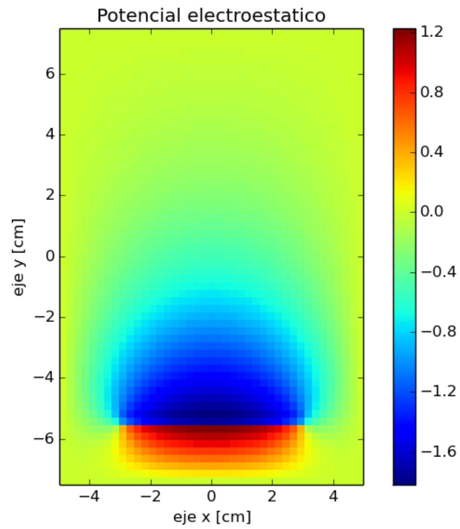

Figure 4: $w = 1.6$. Convergió en 1133 pasos.

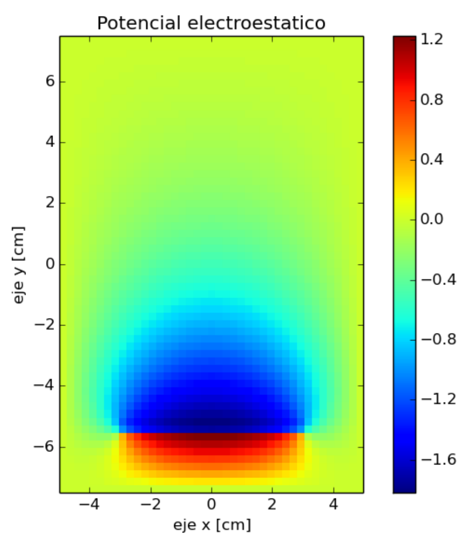

Figure 5: $w = 1.8$. Convergió en 502 pasos.

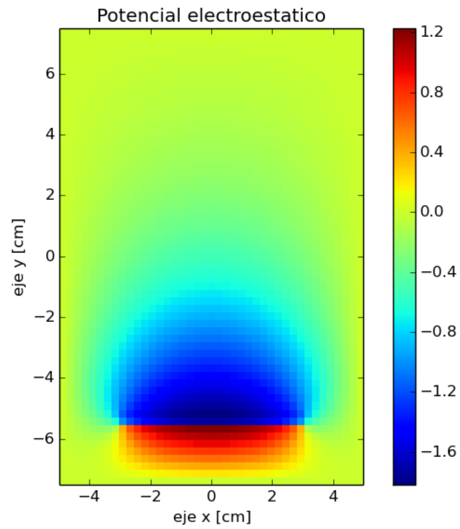

Figure 6: $w = 1.9$. Convergió en 667 pasos.

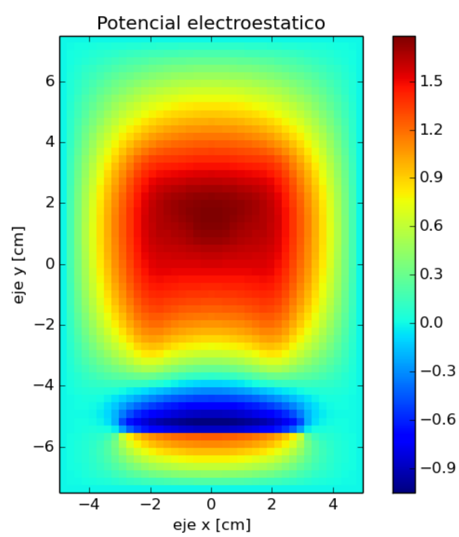

Figure 7: Densidad de Carga en la caja de 10[cm]x15[cm]. ($\rho_{i,j} = 1$)