Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
FI3104-1

Tarea 6

Maximiliano Dirk Vega Aguilera
18.451.231-9

1 Introducción

La tarea 6 consistió en resolver la ecuación de Fisher-KPP y la ecuación de Newell-Whitehead-Segel, estas ecuaciones son ecuaciones de reacción-difusión y se resolvieron para su versión en una dimensión, utilizando el método numérico de Crank–Nicolson para la parte de difusión y el método de Euler explícito para la parte de reacción. Adicionalmente, se debió escribir el programa de forma que cumpliera las reglas de PEP8.

La ecuación de Fisher-KPP busca modelar el comportamiento de una especie animal. Esta ecuación tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2 \tag{1}$$

Donde la variable $n = n(x,t)$ corresponde a la densidad de la especie en función de la posición y el tiempo. El término $\gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ corresponde a la parte difusiva de la ecuación y modela la tendencia de la especie a dispersarse para encontrar más recursos. Por otro lado, el término $\mu n - \mu n^2$ corresponde a la parte reactiva de la ecuación, donde μn busca modelar la tendencia de la especie a crecer indefinidamente y $-\mu n^2$ la disminución de la densidad provocada por la competencia por los recursos.

La ecuación de Newell-Whitehead-Segel busca modelar fenómenos de convección y combustión, entre otros. Esta toma la forma de la ecuación (2) y su interpretación es análoga a la ecuación anterior.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu (n - n^3) \tag{2}$$

2 Desarrollo

Para el desarrollo de esta tarea se utilizó el lenguaje python y sus librerías numpy y matplotlib.pyplot. También se llevó un registro del trabajo mediante el repositorio de git.

A continuación se describe el desarrollo y los resultados obtenidos para ambas ecuaciones.

2.1 Fisher-KPP

Al resolver la ecuación (1) se consideraron los valores $\gamma = 0.001$ y $\mu = 1.5$ con las siguientes condiciones iniciales:

$$n(t,0) = 1 \tag{3}$$

$$n(t,1) = 0 \tag{4}$$

$$n(0,x) = e^{\frac{-x^2}{0.1}} \tag{5}$$

Se resolvió la ecuación para $x \in [0,1]$, discretizando el espacio en 500 puntos, obteniendo un tamaño para cada paso de 0.002 (en las unidades de x); y para $y \in [0,4]$ se tomó un paso temporal de 0.005 (en las unidades de t). Para la resolución del problema, se utilizó el método de Crank-Nicolson:

$$n_j^{N+1} - n_j^N = \frac{\epsilon}{2}\left\{\frac{n_{j+1}^{N+1} - 2n_j^{N+1} + n_{j-1}^{N+1}}{h^2} + \frac{n_{j+1}^{N} - 2n_j^{N} + n_{j-1}^{N}}{h^2}\right\} \tag{6}$$

Donde ϵ corresponde al tamaño del paso temporal y h al tamaño del paso espacial. El índice N corresponde al tiempo y el índice j al espacio. Despejando los términos $N+1$ en esta ecuación se construye un sistema de ecuaciones, donde los términos $N+1$ forman una matriz tridiagonal (A) multiplicada por el vector de los términos buscados y los otros términos forman el vector solución (b). Este sistema se resuelve de la siguiente forma:

$$n_j = \alpha_j n_{j+1} + \beta_j \tag{7}$$

$$\alpha_j = \frac{-A_j^+}{A_j^o + A_{j-1}^- \alpha_{j-1}} \tag{8}$$

$$\beta_j = \frac{b_j - \beta_{j-1} A_j^-}{A_j^o + A_j^- \alpha_{j-1}} \tag{9}$$

Lo anterior es valido para la parte de difusión de la ecuación. Para la parte de reacción solo basta añadir los términos reactivos en el vector b y resolver.

Se crearon funciones que aplican este método considerando las condiciones iniciales y tratando de ir un paso a la vez para que la implementación para la ecuación (2) fuese más sencilla. Una vez resuelto, se obtuvo el gráfico de la figura 1.

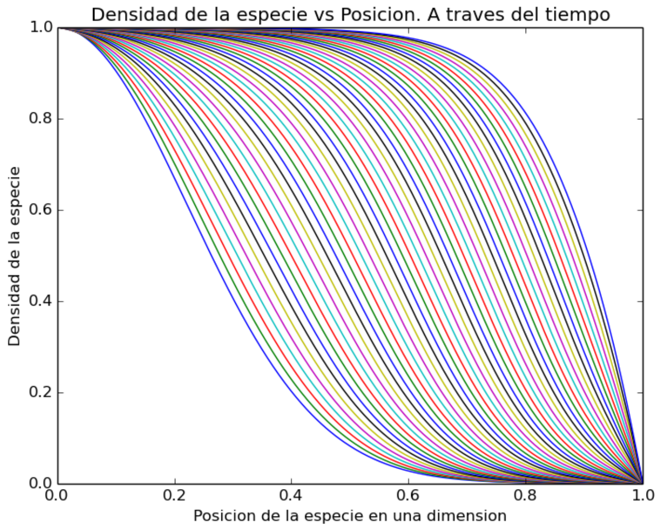

Figure 1: El gráfico muestra la solución de la ecuación (1) para distintos pasos de tiempo. La linea de la izquierda corresponde al tiempo cero y este avanza hacia la derecha.

2.2 Newell-Whitehead-Segel

Análogamente a la resolución de la ecuación de Fisher-KPP, se resolvió la ecuación (2) considerando los valores $\gamma = 0.001$ y $\mu = 1.5$ con las siguientes condiciones iniciales:

$$n(t, 0) = 0 \tag{10}$$

$$n(t, 1) = 0 \tag{11}$$

$$n(0, x) = \texttt{np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)} \tag{12}$$

Se resolvió la ecuación considerando las mismas discretizaciones de la parte anterior. Se ajustaron las funciones de la parte anterior para que cumplieran con las nuevas condiciones de la ecuación (2). Se resolvió el problema para 3 valores de semilla distinto, obteniéndose los gráficos de las figuras 2-4.

3 Conclusión

Se resolvieron correctamente las ecuaciones de Fisher-KPP y de Newell-Whitehead-Segel mediante el método de Crank-Nicolson. La solución a la primera coincide con el comportamiento esperado de una especia que compite por recursos limitados, dispersándose a medida que la densidad de población aumenta. En

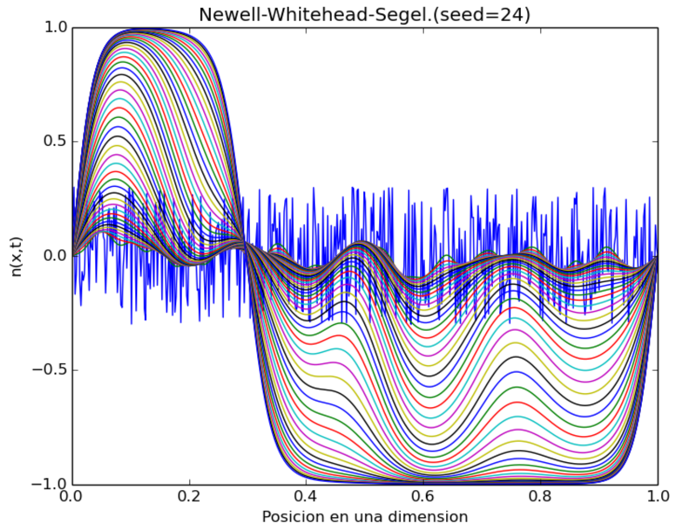

Figure 2

la segunda solución se aprecia que independiente de la solución random, estas tienden a converger a los puntos de equilibrio.

Finalmente, desarrollar el programa de forma ordena y modular facilita las cosas cuando se desea realizar ajustes para resolver otro problema similar.

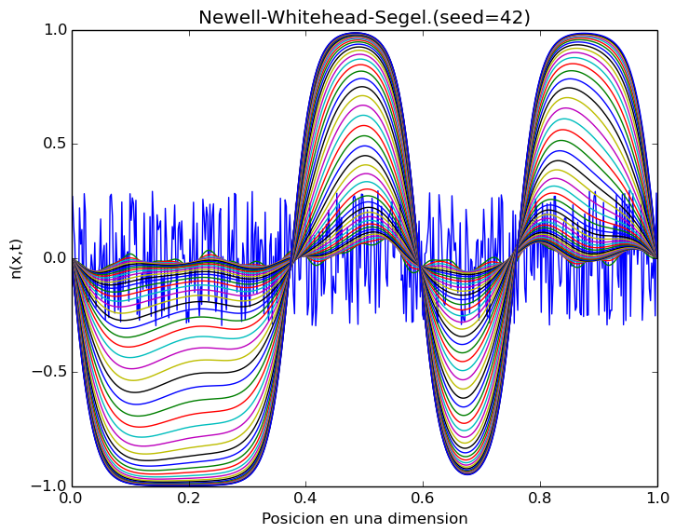

Figure 3

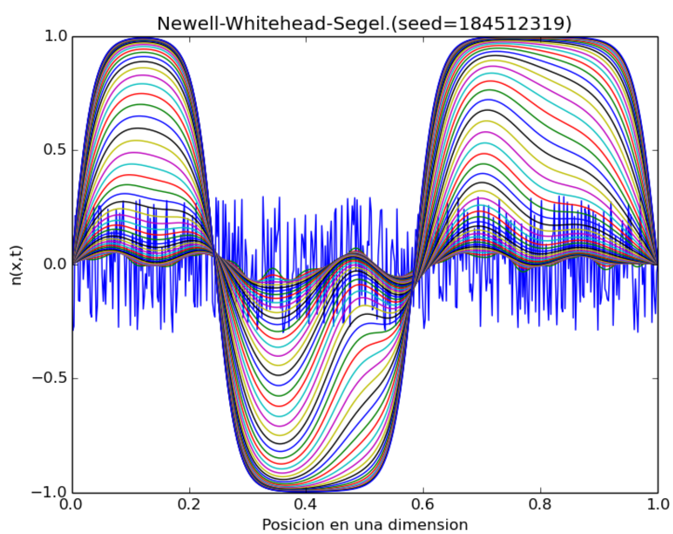

Figure 4: Solucion de Newell-Whitehead-Segel con el rut como valor de la semilla.