

# Теория Автоматического Управления

Капалин Иван Владимирович

# Оглавление

<b>1 Основные понятия, структура и классификация систем автоматического управления</b>	<b>6</b>
1.1 Процессы управления . . . . .	7
1.2 Характеристика процессов управления . . . . .	7
1.3 Исходные положения ТАУ . . . . .	8
1.4 Принципы управления . . . . .	10
1.5 АСУ . . . . .	13
1.6 Классификация САУ . . . . .	13
1.7 Законы управления . . . . .	16
<b>2 Математическое описание непрерывных систем уравнений</b>	<b>21</b>
2.1 Уравнения динамики и статики . . . . .	22
2.1.1 Звено САУ . . . . .	23
2.1.2 Линеаризация . . . . .	23
2.2 Преобразование Лапласа . . . . .	25
2.2.1 Обратное преобразование Лапласа . . . . .	25
2.2.2 Свойства преобразования Лапласа и примеры . . . .	26
2.2.3 Передаточная функция в изображениях Лапласа . .	28
2.2.4 Передаточная функция в операторной форме . . . .	29
2.2.5 Временные функции: переходная и весовая функции	30
2.2.6 Временные функции и ПФ в изображениях Лапласа	31
2.3 Частотные функции . . . . .	32

2.4	Основные типы элементарных звеньев . . . . .	35
2.5	Структурные схемы и дифференциальные уравнения систем управления . . . . .	36
2.5.1	Преобразование структурных схем . . . . .	37
2.5.2	Вычисление передаточной функции одноконтурной и многоконтурной систем . . . . .	39
2.6	Основные способы математического описания САУ . . . . .	43
2.6.1	Описание системы в фазовом пространстве (пространстве состояний) . . . . .	44
2.6.2	Переход от ОДУ к ПС . . . . .	44
2.6.3	Переход от ПС к ПФ. Инвариантность формы ПФ при невырожденном преобразовании вектора состояния . . . . .	47
2.6.4	Формулы вычисления реакции системы . . . . .	49
2.6.5	Переход от ПС к временным функциям . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Устойчивость непрерывных систем управления</b>	<b>51</b>
3.1	Устойчивость в линейных системах . . . . .	52
3.1.1	Основное условие устойчивости . . . . .	53
3.1.2	Необходимое условие устойчивости . . . . .	53
3.2	Алгебраические критерии устойчивости . . . . .	54
3.2.1	Критерий Гурвица . . . . .	54
3.2.2	Критерий Рауса . . . . .	56
3.3	Частотные критерии устойчивости . . . . .	59
3.3.1	Принцип аргумента . . . . .	59
3.3.2	Критерий Михайлова . . . . .	61
3.3.3	Критерий Найквиста . . . . .	62
3.4	Условие граничной (маргинальной) устойчивости . . . . .	62
3.4.1	Граничный коэффициент . . . . .	62
3.4.2	Устойчивость систем с чистым запаздыванием . . . . .	63
3.5	Понятие грубости (робастности) САУ . . . . .	64
3.5.1	Критерий Харитонова . . . . .	65

<b>4</b>	<b>Стабилизация линейных систем</b>	<b>68</b>
4.1	Полиномиальная стабилизация (метод полиномиальных уравнений) . . . . .	68
4.2	Управляемость и наблюдаемость . . . . .	71
4.2.1	Управляемость линейных объектов. Критерий управляемости . . . . .	72
4.2.2	Модальное управление . . . . .	73
4.3	Стабилизация по выходу. Наблюдаемость и наблюдатель. . . . .	75
4.3.1	Критерий наблюдаемости для линейных систем. . . . .	76
4.3.2	Наблюдатель Люенбергера . . . . .	76
4.4	Теорема существования наблюдателя Люенбергера . . . . .	77
4.5	Модальное управление по выходу. Принцип разделения задач стабилизации и наблюдения . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Качество непрерывных систем управления</b>	<b>83</b>
5.1	Показатели качества и типовые воздействия . . . . .	83
5.1.1	Прямые показатели качества . . . . .	85
5.1.2	Косвенные показатели качества (корневые) . . . . .	86
5.1.3	Степень устойчивости . . . . .	88
5.1.4	Показатели качества в переходном режиме. Косвенные показатели качества (интегральные) . . . . .	89
5.2	Интегральные показатели качества . . . . .	89
5.2.1	Вычисление интегральных показателей качества . . . . .	90
5.3	Установившийся режим . . . . .	91
5.3.1	Показатели качества в установившемся режиме . . . . .	91
5.3.2	Коэффициенты ошибок в установившемся режиме . . . . .	92
5.4	Астатическая САУ . . . . .	93
5.4.1	Структура астатической по воздействию САУ . . . . .	93
5.4.2	Структура астатической по возмущению САУ . . . . .	94
5.5	Синтез САУ с заданным качеством. Пример . . . . .	95
5.6	Синтез САУ по желаемой передаточной функции . . . . .	95
5.6.1	Постановка задачи . . . . .	96

5.6.2	Исследование . . . . .	96
-------	------------------------	----

# От автора

This is the first section.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales...

# Глава 1

## Основные понятия, структура и классификация систем автоматического управления

С древних времен человек хотел использовать предметы и силы природы в своих целях, то есть управлять ими. Теория управления пытается ответить на вопрос «как нужно управлять?». До XIX века науки об управлении не существовало, хотя первые системы автоматического управления уже были (например, ветряные мельницы «научили» разворачиваться навстречу ветру). Развитие теории управления началось в период промышленной революции. Сначала это направление в науке разрабатывалось механиками для решения задач регулирования, то есть поддержания заданного значения частоты вращения, температуры, давления в технических устройствах (например, в паровых машинах). Отсюда происходит название «теория автоматического регулирования». Позднее выяснилось, что принципы управления можно успешно применять не только в технике, но и в биологии, экономике, общественных науках.

## 1.1 Процессы управления

Процессы управления и обработки информации в системах любой природы изучает наука кибернетика. Один из ее разделов, связанный главным образом с техническими системами, называется теорией автоматического управления.

В живой природе	В неживой природе
Естественный отбор	Наведение на цель орудия
Терморегуляция у животных	Поддержание температуры в печи
Поддержание равновесия животными	Поддержание равновесия робота
Увеличение рождаемости в стране	Поддержание скорости на моторе
Уничтожение клеток определенного типа (вирусных, инфекционных и т.п.)	Поддержание фиксированной высоты летального аппарата
Повышение работоспособности работников предприятия	Поддержание заданного напряжения

Таблица 1.1: Процессы управления

## 1.2 Характеристика процессов управления

Общие характеристики всех процессов управления:

- Прием информации - поиск и обнаружение сигналов (выделение сигналов из шума). Примеры: камера, глаз, датчики давления, скорости, положения и т.п., общение.
- Хранение информации - процесс поддержания исходной информации в виде, обеспечивающем выдачу данных по запросам конечных пользователей. Примеры: память животных, память на носителях - USB, HDD, CD, DVD.



- Преобразование информации - процесс изменения формы представления информации или ее содержания. Примеры: анализ рынка, те или иные вычисления.
- Выработка управляющего воздействия - воздействие на объект управления, направленное на достижение цели управления. Примеры: подача напряжения на мотор, передача указаний подчиненным, поворот руля.

## 1.3 Исходные положения ТАУ

### САУ. Структурная схема и понятия

**Определение 1.** *Управление* - целенаправленное воздействие на объект или устройство. Управление может быть автоматическим, т.е. без участия человека, ручным, т.е. в присутствии человека, или полуавтоматическим, т.е. работающим при участии человека.

**Определение 2.** *Объект управления (ОУ)* - устройство, которым нужно и можно управлять. Это может быть автомобиль, самолет электродвигатель и т.д.

**Определение 3.** *Цель управления ОУ* - поддержание заданного режима, т. е. изменение какого-либо параметра ОУ по заданному закону (например температура в холодильнике должна быть зафиксированной). Такой параметр называют *управляемой* или *выходной* переменной.

**Определение 4.** *Система автоматического управления (САУ)* - устройство управления (УУ) и объект управления (ОУ).

Основной задачей автоматического управления является поддержание определенного закона изменения одной или нескольких физических величин, характеризующих процессы, протекающие в ОУ, без непосредственного участия человека. Эти величины называются *управляемыми величинами*. Если в качестве ОУ рассматривается хлебопекарная печь, то управляемой величиной будет температура, которая должна изменяться по заданной программе в соответствии с требованиями технологического процесса.

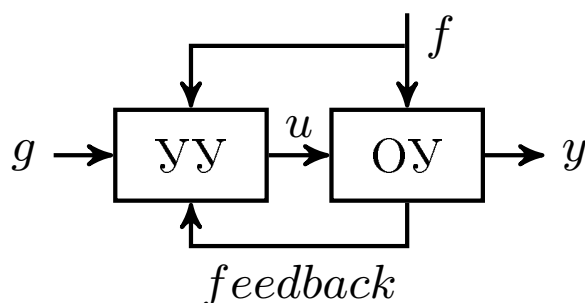


Рис. 1.1: На структурной схеме САУ:  $y$  — выходная переменная;  $g$  — задающее воздействие (иногда изображается как выход задающего устройства);  $f$  — возмущение, действующее на ОУ и, возможно, на УУ;  $u$  — управление (управляющее воздействие). Канал связи, по которому поступает информация в УУ о состоянии ОУ, называется *обратной связью* (feedback). В САУ обратная связь может отсутствовать.

## Понятие устойчивости

ОУ в зависимости от входных воздействий бывают устойчивые, нейтральные и неустойчивые. Например, пусть при постоянных  $u = u_0$ ,  $f = f_0$  на выходе  $y = y_0$ . Положим, что на какое-то время  $T$  значение  $u$  и  $f$  изменились, а затем вернулись к исходным значениям. Тогда объект управления

- устойчивый, если при  $t \rightarrow \infty$  выход  $y \rightarrow y_0$ ;  
Например, холодильник, генератор напряжения, маятник, унитаз.
- нейтральный, если при  $t \rightarrow \infty$  выход  $y \rightarrow y_1$  и  $y_1 \neq y_0$ .  
Например, резервуар с водой;
- неустойчивый, в противном случае.  
Самолет с обратной стреловидностью крыла, обратный (перевернутый) маятник.

**Определение 5.** *Устойчивость* - это свойство системы возвращаться в установившееся состояние после того, как она была выведена из этого состояния каким-либо возмущением.

## 1.4 Принципы управления

В основе построения систем автоматического управления лежат некоторые общие фундаментальные принципы управления, определяющие, каким образом осуществляется увязка алгоритмов управления с заданным и фактическим функционированием, а иногда и с причинами, вызвавшими отклонение.

Принято различать три фундаментальных принципа управления: программное управление, принцип компенсации и принцип обратной связи.

## Программное управление

Управление  $u$  выбирается в виде некоторой функции времени  $u = u(t)$ .

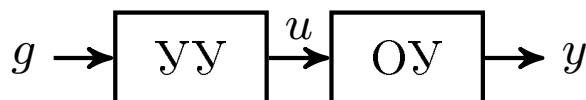


Рис. 1.2: Программное управление

Условиями применимости этого принципа является наличие полной информации об ОУ, а также — его устойчивость и отсутствие существенных неизвестных возмущений.

## Принцип компенсации

Если возмущающий фактор искажает выходную величину до недопустимых пределов, то применяют принцип компенсации.

Положим, что начальное значение выходной величины —  $g$ . Из-за возмущения  $f$  на выходе регистрируется значение  $y$ , которое отклоняется от заданной величины на  $u$ . Если каким-то образом удастся измерить величину  $f$ , то можно откорректировать управляющее воздействие  $u$  на входе ОУ, суммируя сигнал УУ с корректирующим воздействием, пропорциональным возмущению  $f$  и компенсирующим его влияние.

**Достоинство принципа компенсации:** быстрота реакции на возмущение.

**Недостаток принципа компенсации:** невозможность учета подобным образом всех возможных возмущений.

### Принцип обратной связи (принцип Ползунова - Уатта)

Один из самых универсальных методов управления, так как не требует информации о возмущениях и условие устойчивости исходного объекта не обязательно.

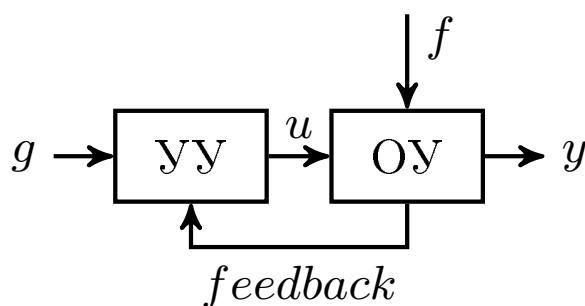


Рис. 1.3: Обратная связь

**Недостаток принципа обратной связи:** невозможность полной компенсации возмущения, в определенных случаях может сделать замкнутую систему неустойчивой.

**Достоинством принципа обратной связи:** его универсальность, возможность его использования в условиях отсутствия информации о возмущающих воздействиях. Принцип широко используется в технике, а также присущ живым организмам и обществу.

### Принцип комбинированного управления.

Данный принцип управления применим при одновременном использовании способов управления как по возмущению, так и по отклонению.

## 1.5 АСУ

Автоматизированные системы управления (АСУ) включают разнообразные элементы, играющие различную роль в решении задач управления. Выделение отдельных элементов осуществляется в соответствии с их специфическими чертами и вытекающими из этого особенностями разработки и включения в АСУ.

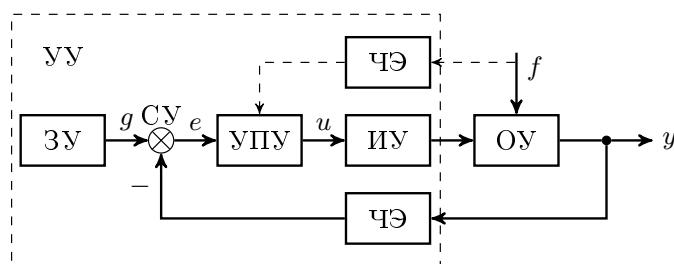


Рис. 1.4: На схеме: ЧЭ, чувствительный элемент, измеряющий возмущения (не всегда присутствует) и выход  $y$ ; УПУ, усилительно-преобразовательное устройство, вырабатывающее управление  $u$  на основе задающего воздействия  $g$  и, возможно, измерения  $f$ ; ИУ, исполнительное устройство, которое непосредственно воздействует на ОУ; СУ, сравнительное устройство, вычисляющее отклонение  $e$ ; ЗУ, задающее устройство, вырабатывающее задающее воздействие  $g$ .

## 1.6 Классификация САУ

Для ознакомления с основными видами систем автоматического управления и соответствующей терминологией рассмотрим классификацию САУ по ряду признаков, существенных с точки зрения теории автоматического управления.

## Наличие обратной связи<sup>1</sup>

По наличию обратной связи САУ делятся на *замкнутые* (с обратной связью) и *разомкнутые* (без обратной связи).

В *разомкнутых* САУ выходная величина объекта  $y$  не измеряется, т. е. нет контроля за состоянием объекта. Разомкнутыми такие системы называются потому, что вследствие этого в них отсутствует обратная связь между выходом объекта и входом управляющего устройства, при наличии которой объект и управляющее устройство образуют замкнутый контур.

В *замкнутых* САУ на вход управляющего устройства подаются задающее воздействие  $g$  и выходная величина объекта  $y$ . Исходя из величины  $g$ , управляющее устройство определяет соответствующее требуемое значение  $y$  и, имея информацию о текущем значении  $e$ , обеспечивает необходимое соответствие между  $y$  и  $g$  путем воздействия на объект. При этом УУ создает обратную связь вокруг объекта, связывая его выход со входом. Эти системы могут обеспечить принципиально неограниченную точность управления и представляют собой основной тип САУ.

## Вид задающего воздействия

В зависимости от вида задающего воздействия САУ делятся на три вида: *системы стабилизации*, *системы программного управления* и *системы слежения*.

В *системах стабилизации* задающее воздействие постоянно ( $g = const$ ), в *системах программного управления* оно изменяется по заранее заданному закону ( $g = g(t)$  - заданная функция), в *системах слежения* задающее воздействие тоже изменяется, но закон изменения заранее не известен, а задающее воздействие определяется внешними факторами (например радиолокация).

---

<sup>1</sup>См. [1, стр. 14]

## Способ использования текущей информации<sup>2</sup>

САУ также делятся на

*неадаптивные*, т.е. те, в которых текущая информация используется только для выработки управляющего воздействия

*адаптивные*, т.е. те, в которых текущая информация используется еще и для изменения алгоритма управления или его параметров

Область применения *адаптивных* САУ – это управление объектами, свойства или условия работы которых недостаточно известны или существенно непостоянны. В этих условиях обыкновенная, *неадаптивная*, система либо будет работать неудовлетворительно, либо потребует постоянного надзора.

## Виды сигналов

САУ бывают *непрерывного* или *дискретного* действия в зависимости от характера действия составляющих систему звеньев.

Система *непрерывного* действия состоит только из звеньев непрерывного действия, т. е. звеньев, выходная величина которых изменяется плавно при плавном изменении входной величины.

Система *дискретного* действия – это система, содержащая хотя бы одно звено дискретного действия. Звеном дискретного действия называется звено, выходная величина которого изменяется дискретно, т. е. скачками, даже при плавном изменении входной величины.

## Виды уравнения - линейные и нелинейные

*Линейной* называется система, которая описывается линейными уравнениями. В противном случае система является *нелинейной*. Чтобы система была *нелинейной*, достаточно иметь в ее составе хотя бы одно нелинейное звено, т. е. звено, описываемое нелинейным уравнением.

---

<sup>2</sup>См. [1, стр. 19-20]



Для *линейных* систем справедлив принцип суперпозиции . Он заключается в том, что реакция системы на любую комбинацию внешних воздействий равна сумме реакций на каждое из этих воздействий, поданных на систему порознь. К *нелинейным* системам принцип суперпозиции не применим.

### **Характер внешних воздействий**

Система является *детерминированной*, если приложенные к ней воздействия и параметры модели являются постоянными, или детерминированными, т.е. определенными, функциями переменных состояния и времени. Систему называют *стохастической*, если приложенные к ней воздействия и параметры модели являются случайными функциями или случайными величинами.

## **1.7 Законы управления**

Термин “закон управления” перешел в теорию управления из классической теории.

**Определение 6.** *Закон управления* - математическая зависимость, по которой управляющее устройство воздействовало бы на объект, если бы оно было безынерционным. Законы управления используются в промышленных регуляторах (манипуляторах, станках и пр.). Основными законами управления являются: П-закон, ПИ-закон, ПД-закон, ПИД-закон.

### **П-закон**

*Пропорциональный закон (П-закон)* - линейный закон, осуществляемый с помощью П-регулятора (статический регулятор), отражающий прямо пропорциональную зависимость между изменением управляющего воздействия и погрешностью регулирования..

П-закон имеет вид  $u = k_{\text{п}}e$ . Постоянная  $k_{\text{п}}$  - коэффициент передачи (пропорциональности, усиления) регулятора, а обратная ему величина  $\delta_{\text{п}} = \frac{1}{k_{\text{п}}}$  - статистизм регулятора.

П-регуляторы применяются для управления объектами с самовыравниванием и без самовыравнивания при небольших изменениях нагрузок.

### ПИ-закон

*Пропорционально-интегральный закон (ПИ-закон)* - закон, осуществляемый с помощью ПИ-регулятора и имеющий вид  $u = k_{\text{п}}e + k_{\text{и}} \int_0^t e(t)dt$ .

ПИ-регулятор является наиболее распространенным на практике, так как достаточно прост в настройке и обеспечивает нулевую статическую ошибку регулирования<sup>3</sup>. Данный тип регуляторов применяют для регулирования как устойчивых, так и нейтральных объектов при больших, но плавных изменениях нагрузок, когда требуется высокая точность регулирования в статическом режиме (когда остаточные отклонения недопустимы).

### ПИД-закон

*Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон (ПИД-закон)* осуществляется с помощью ПИД-регулятора, которым можно обеспечивать астатистическое регулирование. ПИД-закон имеет вид  $u = k_{\text{п}}e + k_{\text{и}} \int_0^t e(t)dt + k_{\text{д}} \frac{de(t)}{dt}$ . Производная  $\frac{de(t)}{dt}$  вводится в закон регулирования с целью повышения качества процесса регулирования. Постоянные  $k_{\text{и}}$  и  $k_{\text{д}}$  - постоянные времени интегрирования и дифференцирования соответственно.

ПИД-регуляторы обеспечивают относительно высокое качество регулирования объектов, обладающих переходным запаздыванием (например теплообменных и массообменных аппаратов), а так же в тех случаях, когда нагрузка в объектах регулирования изменяется часто и быстро.

---

<sup>3</sup>Подробнее в разделе [коэффициенты ошибок в установившемся режиме](#)

## ПД-закон

Пропорционально-дифференциальный закон (ПД-закон), осуществляемый с помощью ПД-регуляторов, имеет вид  $u = k_{\text{п}}e + k_{\text{д}}\frac{de(t)}{dt}$ . ПД-закон применяется для повышения быстродействия работы системы.

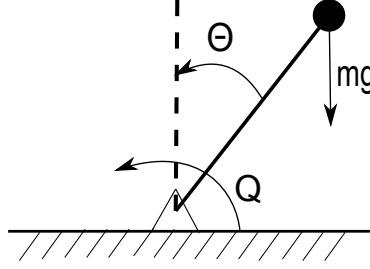


Рис. 1.5: Перевернутый (обратный) маятник

Уравнение, описывающее перевернутый (обратный) маятник в окрестности  $\Theta_0 = 0$  имеет вид

$$J\ddot{\Theta} = -Q + mgl\Theta, \quad (1.1)$$

где  $\Theta$  — угол отклонения от вертикальной оси,  $Q$  — вращательный момент, создаваемый мотором,  $m$  — масса маятника,  $l$  — длина подвеса маятника,  $J = ml^2$  — момент инерции маятника,  $g$  — ускорение свободного падения.

Заметим, что выбор линеаризации в точке  $\Theta_0$  определяется из цели управления. В данном случае цель управления — стабилизировать маятник в положении  $\Theta_0 = 0$  (задающее воздействие  $g = 0$ ).

В нормальной форме уравнение (1.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = cx, \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $x = (x_1 \ x_2)^T = (\Theta \ \dot{\Theta})^T$  — вектор состояния системы,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $b = (0 \ 1)^T$ ,  $c = (1 \ 0)$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $u = -\frac{Q}{J}$  — управление (вход) и  $y = cx = x_1 = \Theta$  — регулируемый (или измеряемый) параметр.

Используем принцип обратной связи и ПД-закон для решения задачи. Тогда

$$u = -k_{\text{п}}y - k_{\text{д}}\dot{y},$$

где  $k_{\text{п}}$  и  $k_{\text{д}}$  — коэффициенты, подлежащие определению.

Учитывая первое уравнение  $\dot{x}_1 = x_2$  в системе (1.2), получим

$$u = -k_{\text{п}}x_1 - k_{\text{д}}\dot{x}_1 = -(k_{\text{п}} \quad k_{\text{д}}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя это управление в (1.2), получим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A_k x, \\ y = cx, \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $A_k = A - b(k_{\text{п}} \quad k_{\text{д}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 - k_{\text{п}} & -k_{\text{д}} \end{pmatrix}$ .

Остается выбрать коэффициенты ПД-закона, исходя из устойчивости системы (1.3). Причем добьемся этого так, чтобы в установившемся режиме не было колебаний. Это эквивалентно тому, что у характеристического полинома системы (1.3) есть только действительные отрицательные корни.

В данном случае характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$\gamma(s) = \det(sI - A_k) = s^2 + k_{\text{д}}s + (k_{\text{п}} - \omega^2).$$

Тогда выбрав  $k_{\text{д}}$  и  $k_{\text{п}}$  так, что  $\gamma(s)$  имеет только отрицательные корни, получим устойчивую САУ и тем самым стабилизируем маятник в положении  $\Theta_0 = 0$ .

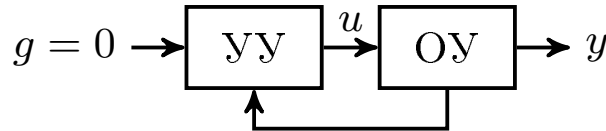


Рис. 1.6: Структурная схема САУ перевернутого маятника

На схеме ОУ (маятник с мотором) описан с помощью ОДУ (1.1), УУ (компьютер/контроллер, устанавливающий желаемый момент вращения  $Q$ ) описывается оператором  $R = k_{\text{п}} + k_{\text{д}} \frac{d}{dt}$  и реализует ПД-закон управления.

## Глава 2

# Математическое описание непрерывных систем уравнений

В ТАУ при анализе и синтезе САУ рассматриваются их *математические модели*.

**Определение 7.** *Математическая модель* (ММ) - уравнения, переходные и временные функции, которые описывают процессы, происходящие в САУ. Существует два способа получения ММ: теоретический и экспериментальный.

*Теоретический метод* заключается в аналитическом исследовании физической сущности процесса с использованием общих законов физики, или процессов с использованием материального и энергетического баланса. Применение чисто теоретического метода представляет большую трудность вследствие сложности явлений, происходящих в процессах, или недостаточной степени изученности их. *Экспериментальный метод* математического описания заключается в обработке экспериментальных данных, полученных непосредственно на действующих объектах производства, или на полупромышленной лабораторной машине, или физической модели процесса — стенде.

Наиболее эффективным методом получения математической модели является сочетание *теоретического* и *экспериментального* методов. При этом на долю теоретического метода приходится анализ в основном структурных свойств объекта и продуктов и получение общего вида уравнений, а на долю экспериментального — количественный анализ и проверка теоретических выводов.

При построении ММ неизбежно возникают противоречивые требования: достаточная точность модели и доступность, или простота, анализа модели. Чем выше точность модели, тем она сложнее; чем проще исследовать ММ, тем она проще. Цель, которую ставит перед собой разработчик или исследователь, разрешает данное противоречие.

## 2.1 Уравнения динамики и статики

Любой элемент (часть) САУ осуществляет преобразование входа  $g$  (или  $u$ ) в выход  $y$ :

$$y(t) = Ag(t), \quad (2.1)$$

где  $A$  — оператор САУ. В этом курсе мы будем рассматривать только оператор  $A$ , описываемый обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Введем два вида уравнений, рассматриваемых в ТАУ.

**Определение 8.** *Уравнение статики* - уравнение, описывающее статический (установившийся) режим.

**Определение 9.** *Уравнение динамики* - уравнение, описывающее процесс в звене при произвольных входных воздействиях. Пусть дано ОДУ некоторого ОУ вида

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, v) = 0, \quad (2.2)$$

где  $F$  — функция нескольких переменных,  $y$  и  $u$  — выход и управление,  $v$  — возмущение. Пусть при  $u = u^0$  и  $v = v^0$  со временем выход  $y$  принимает постоянное значение:  $y = y^0$ . Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$F^0 = F(y^0, 0, 0, u^0, 0, v^0) = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) называется уравнением статики, уравнение (2.2) называют уравнением динамики.

### 2.1.1 Звено САУ<sup>1</sup>

**Определение 10.** *Звеном* называют ММ либо части САУ, либо САУ целиком. Понятие звена удобно использовать для представления САУ в виде соединения нескольких звеньев, т.е. более простых ММ.

Одно из самых простых звеньев - это усилитель, Пропорциональное звено. Его уравнение можно записать в виде

$$y = ku. \quad (2.4)$$

Уравнение динамики здесь совпадает с уравнением статики (точнее, динамики просто нет). Такого рода преобразования часто обозначают графически в виде блока.

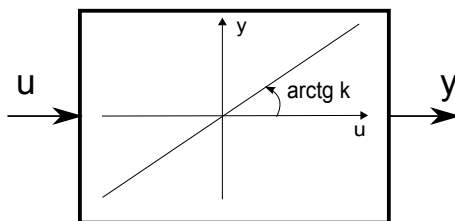


Рис. 2.1: Статическая характеристика П-звена

### 2.1.2 Линеаризация

Назначение САУ - это поддержание определенного заданного режима. Поэтому параметры, описывающие САУ, не должны сильно отличаться от заданного режима. Эта простая идея обычно позволяет проводить операцию линеаризации.

---

<sup>1</sup>См. [1, стр. 21-22]



**Определение 11.** *Линеаризация* - построение приближенной линейной модели на основе более реалистичной нелинейной модели. Рассмотрим пример для уравнения (2.2). Пусть заданный режим имеет вид

$$y = y^0, \dot{y} = \ddot{y} = 0, u = u^0, \dot{u} = 0, v = v^0. \quad (2.5)$$

Тогда реальные параметры САУ можно записать в отклонениях как

$$y = y^0 + \Delta y, \dot{y} = \dot{\Delta y}, \ddot{y} = \ddot{\Delta y}, u = u^0 + \Delta u, \dot{u} = \dot{\Delta u}, v = v^0 + \Delta v, \quad (2.6)$$

где переменные со знаком  $\Delta$  достаточно малы.

Тогда для функции  $F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, v)$  воспользуемся разложением в ряд Тейлора в точке  $(y^0, 0, 0, u^0, 0, v^0)$ :

$$\begin{aligned} F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, v) = F^0 + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\Delta y} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} \ddot{\Delta y} + \\ + \frac{\partial F}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \dot{\Delta u} + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta v + \dots, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $F^0 = 0$ , многоточием обозначены члены с более высоким порядком малости. Отсюда получают линеаризацию уравнения (2.2) вида

$$\alpha_2 \ddot{\Delta y} + \alpha_1 \dot{\Delta y} + \alpha_0 \Delta y - \beta_1 \dot{\Delta u} - \beta_0 \Delta u - c_0 \Delta v = 0, \quad (2.8)$$

где  $a_0 = \frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $a_1 = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}$ ,  $a_2 = \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}$ ,  $\beta_0 = -\frac{\partial F}{\partial u}$ ,  $\beta_1 = -\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}$  и  $c_0 = -\frac{\partial F}{\partial v}$ . Введем оператор дифференцирования:  $s = \frac{d}{dt}$ . Тогда уравнение (2.8) примет вид (знаки  $\Delta$  опущены)

$$\alpha_2 s^2 y + \alpha_1 s y + \alpha_0 y = \beta_1 s u + \beta_0 u + c_0 v, \quad (2.9)$$

что эквивалентно

$$Q(s)y = R_1(s)u + R_2(s)v, \quad (2.10)$$

где  $Q(s) = \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$  называют *собственным оператором*, а  $R_1(s) = \beta_1 s + \beta_0$  и  $R_2(s) = c_0$  — *операторами воздействия*.

**Определение 12.** *Собственный оператор* - дифференциальный оператор  $Q(s)$  при выходной величине.

**Определение 13.** *Оператор воздействия* - дифференциальный оператор  $R(s)$  при входной величине.

## 2.2 Преобразование Лапласа

Для исследования и описания ОДУ часто используют преобразование Лапласа, так как оно сводит решение дифференциальных уравнений к алгебраическим операциям.

**Определение 14.** Преобразованием Лапласа называют отображение  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  функции  $x(t), t \in \mathbb{R}$  в функцию  $X(s), s \in \mathbb{C}$ , осуществляемое по правилу

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt, \quad (2.11)$$

где  $x(t)$  — исходная функция,  $X(s)$  — изображение по Лапласу,  $s$  — переменная преобразования Лапласа. Условия, при которых преобразование существует для  $x(t)$ :

1.  $x(t)$  — интегрируемая на любом конечном интервале функция;
2.  $x(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ;
3.  $\exists c, M > 0 : |x(t)| < M e^{ct}, \forall t \geq 0$ .

Если  $x(t)$  удовлетворяет всем вышеперечисленным свойствам, то её называют функцией-оригиналом.

### 2.2.1 Обратное преобразование Лапласа

Соотношение, определяющее по известному изображению его оригинал, называют *обратным преобразованием Лапласа*.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad (2.12)$$

где интегрирование ведется вдоль любой прямой  $\operatorname{Re} s = \sigma > c$ , где  $c$  — константа из условий существования преобразования Лапласа для  $x(t)$ .

### 2.2.2 Свойства преобразования Лапласа и примеры

Пусть  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  и  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ .

1. Линейность.  $\mathcal{L}\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha X(s) + \beta Y(s)$ ;

2. Дифференцирование оригинала.

Если производная  $\dot{x}(t)$  является функцией-оригиналом, то  $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$ ;

3. Интегрирование оригинала.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}; \quad (2.13)$$

4. Теорема запаздывания. Для любого  $\tau > 0$ :

$$\mathcal{L}\{x(t - \tau)\} = e^{-\tau s} X(s); \quad (2.14)$$

5. Теорема о свертке (или об умножении изображений).

Если  $x(t)$  и  $y(t)$  - оригиналы изображений, а  $X(s)$  и  $Y(s)$  - их изображения, то

$$X(s) \cdot Y(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)y(t - \tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)x(t - \tau)d\tau\right\}; \quad (2.15)$$

Интеграл в правой части называют *сверткой функций*  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , его обозначают  $x_1(t) * x_2(t)$ :

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = \int_0^t x_2(\tau)x_1(t - \tau)d\tau. \quad (2.16)$$

Поэтому

$$X_1(s) \cdot X_2(s) = \mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} \quad (2.17)$$

6. Теорема о предельных значениях.

$$6.1 \quad x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s);$$

$$6.2 \quad \text{Если существует } x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t), \text{ тогда } x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

## 7. Теорема разложения.

Если изображение по Лапласу есть дробно-рациональная функция, т.е.  $X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ , где  $A(s)$  и  $B(s)$  — полиномы от  $s$  и  $\deg A(s) > \deg B(s)$ . Тогда

$$x(t) = \sum_{k=1}^q \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} (X(s)(s - s_k)^{n_k} e^{ts}), \quad (2.18)$$

где  $s_k$  — корни уравнения  $A(s) = 0$ ,  $n_k$  — кратность  $k$ -го корня,  $q$  — количество различных корней. Когда  $q = n$  (все корни простые), тогда

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k t}. \quad (2.19)$$

**Пример 1.** Определить функцию  $x(t)$ , изображение которой имеет вид  $X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ .

### Решение

В данном случае

$$B(s) = 1, \quad A(s) = s(s+1), \quad A'(s) = 2s+1. \quad (2.20)$$

Полюсами функции  $X(s)$  являются  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -1$ , и они являются простыми. Поэтому, согласно формуле (2.19)  $x(t) = 1 - e^{-t}$

№	Оригинал $x(t)$	Изображение $X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$1(t - \tau)$	$\frac{1}{s}e^{-\tau s}$
4	$t$	$\frac{1}{s^2}$
5	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
7	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
8	$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
9	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
10	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
11	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
12	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$

Таблица 2.1: Изображения Лапласа для часто используемых функций

### 2.2.3 Передаточная функция в изображениях Лапласа

Рассмотрим линейное уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1\dot{y} + \alpha_0y = \beta_mu^{(m)} + \dots + \beta_1\dot{u} + \beta_0u, \quad (2.21)$$

при нулевых начальных условиях, т.е.  $y^{(n-1)}(0) = \dots = \dot{y}(0) = y(0) = 0$ ,  $u^{(m-1)}(0) = \dots = \dot{u}(0) = u(0) = 0$  при  $x(0) = 0$ , где  $x$  — вектор состояния системы. Применяя к обеим частям равенства преобразование Лапласа, получим

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i\right) Y(s) = \left(\sum_{i=0}^m \beta_i s^i\right) U(s), \quad (2.22)$$

где  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ ,  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Разделив уравнение (2.22) на полином в левой части, получим

$$Y(s) = W(s)U(s), \quad (2.23)$$

где  $W(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$ ,  $\alpha(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i$  и  $\beta(s) = \sum_{i=0}^m \beta_i s^i$ .

**Определение 15.** *Передаточной функцией системы (2.21) в изображениях Лапласа называется отношение преобразований Лапласа входа и выхода системы при нулевых начальных условиях, причем отношение имеет наименьший порядок. Для системы, описываемой уравнением (2.21), передаточной функцией является дробно-рациональная функция  $W(s)$ , в которой были проведены сокращения общих множителей.*

**Пример 2.** Дана система

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \dot{u} - u.$$

Найти передачную функцию  $W(s)$ .

*Решение*

$$W(s) = \frac{y}{u}$$

$$W(s) = \frac{s-1}{s^2-2s+1} = \frac{s-1}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1}$$

$\frac{1}{s-1}$  — это передачная функция в форме Лапласа

## 2.2.4 Передаточная функция в операторной форме

Из записи уравнения (2.21) в операторной форме вида

$$A(s)y = B(s)u, \quad (2.24)$$

где  $A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i$  и  $B(s) = \sum_{i=0}^m \beta_i s^i$  — “составные” операторы дифференцирования. Формально разделив (2.24) на  $A(s)$ , получим

$$y(t) = W(s)u(t), \quad (2.25)$$

где  $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  — передаточная функция (ПФ) системы (2.21) в операторной форме. Заметим, что ПФ в операторной форме и в изображениях Лапласа совпадают, если полиномы  $A(s)$  и  $B(s)$  не имеют общих корней. Однако ПФ в изображениях Лапласа всегда можно получить из ПФ в операторной форме, проведя сокращения числителя и знаменателя. Получить из ПФ в изображениях Лапласа ПФ в операторной форме не всегда возможно.

**Пример 3.** Определить передаточные функции звеньев, описываемых уравнениями:

$$\text{a) } \dot{y} + y = u$$

$$\text{b) } \ddot{y} - y = \dot{u} - u$$

**Решение.** В символической форме эти уравнения записываются в виде:

$$\text{a) } (p + 1)y = u$$

$$\text{b) } (p^2 - 1)y = (p - 1)u$$

Их передаточные функции в операторной форме соответственно равны

$$W_1(p) = \frac{1}{s + 1}, \quad W_2(p) = \frac{p - 1}{p^2 - 1}$$

Передаточные функции в изображениях Лапласа имеют вид

$$W_1(s) = W_1(p)|_{p=s} = \frac{1}{s + 1}, \quad W_2(s) = W_2(p)|_{p=s} = \frac{s - 1}{s^2 - 1} = \frac{1}{s + 1}.$$

### 2.2.5 Временные функции: переходная и весовая функции

Кроме дифференциальных уравнений и передаточных функций при описании и исследовании линейных систем используют переходные и импульсные переходные функции и их графики - временные характеристики. Для линейных систем справедлив *принцип суперпозиции* [1, стр. 35].

**Определение 16.** *Переходная функция  $h(t)$  - функция, описывающая реакцию системы (звена) на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. График переходной функции - кривую зависимости  $h(t)$  от времени  $t$  - называют *переходной* или *разгонной характеристикой*.*

**Определение 17.** Импульсная переходная (весовая) функция  $w(t)$  - функция, описывающая реакцию системы (звена) на единичное импульсное воздействие ( $\delta(t)$ ) при нулевых начальных условиях,  $x(0) = 0$ .

График импульсной переходной функции  $w(t)$  называют *импульсной переходной характеристикой*. Данные функции связаны соотношением  $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$ .

### 2.2.6 Временные функции и ПФ в изображениях Лапласа

По определению ПФ имеем

$$Y(s) = W(s)U(s).$$

По определению переходной функции вход имеет вид  $u(t) = \mathcal{X}(t)$  (а  $h(t) = y(t)$ ), а значит  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ , поэтому

$$Y(s) = \frac{W(s)}{s},$$

откуда с помощью обратного преобразования Лапласа получаем  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$ . Аналогично для весовой функции:  $u(t) = \delta(t)$  (а  $\omega(t) = y(t)$ ), тогда  $U(s) = 1$ . Получим, что

$$Y(s) = W(s),$$

откуда  $\omega(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}$ . Таким образом, имея хотя бы одну из функций ( $h(t)$ ,  $\omega(t)$  или  $W(s)$ ), можно восстановить другие.

**Пример 4.** Дана система

$$\ddot{y} - y = \dot{u} + u.$$

Найти  $h(t)$  и  $w(t)$ .

*Решение*

Для определения переходной функции нужно решить уравнение при входном воздействии  $u(t) = 1$  и нулевых начальных условиях,  $x_0 = 0$ :

$$(p^2 - 1)y = 1 \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$



$$p^2 - 1 = 0 \quad p = \pm 1 \quad y_{o.o.} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^t \quad y_{ч.р.} = A = -1$$

Получаем решение данного уравнения:

$$y = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^t - 1$$

$$\dot{y} = -C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^t$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0 \\ -C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

$$y = h(t) \quad h(t) = \frac{1}{2} \cdot (e^t + e^{-t}) - 1$$

$$w(t) = \frac{h(t)}{dt} \quad w(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

Ответ:  $h(t) = \frac{1}{2} \cdot (e^t + e^{-t}) - 1$ ,  $w(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

## 2.3 Частотные функции

Еще один распространенный способ описания динамических систем — это *частотные функции*. Пусть дана ПФ  $W(s)$ . Функция  $W(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  называется *частотной передаточной функцией* (ЧПФ), а переменная  $\omega$  называется *частотой*.

**Определение 18.** Частотная передаточная функция (ЧПФ) — функция  $W(j\omega)$ , являющаяся комплекснозначной функцией от действительной переменной  $\omega$  — частоты. Представим ЧПФ в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  — вещественная и мнимая частотные функции,  $A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$  — амплитудная частотная функция,  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$  (при  $|\arg W(j\omega)| \leq \frac{\pi}{2}$  верно  $\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right)$ ) — фазовая частотная функция. График для каждой частотной функции называется *характеристикой*.

Если линейная стационарная система устойчива, то входные гармонические сигналы после окончания переходного процесса переходят в гармонические сигналы с той же частотой, но со сдвигом по фазе и другой амплитудой. Это преобразование характеризует частотная функция  $W(j\omega)$ . Пусть вход  $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \alpha)$  — гармонический сигнал. Найдем выход  $y(t)$  линейной системы вида

$$Q(s)y = R(s)u, \quad (2.26)$$

при гармоническом воздействии (здесь  $Q(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i$ ,  $R(s) = \sum_{i=0}^m \beta_i s^i$ ,  $s = \frac{d}{dt}$ ). Пользуясь *принципом суперпозиции* для последнего уравнения, найдем выход  $y(t)$  как сумму двух выходов при воздействиях  $u_1(t) = u_0 e^{j(\omega t + \alpha)}$  и  $u_2(t) = u_0 e^{-j(\omega t + \alpha)}$  (заметим,  $u(t) = \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2}$ ).

Тогда в правой части уравнения имеем

$$R(s)u_1(t) = u_1(t)R(j\omega), \quad R(s)u_2(t) = u_2(t)R(-j\omega).$$

Решения будем искать в виде  $y_1(t) = Au_0 e^{j(\omega t + \alpha + \varphi)} = Ae^{j\varphi} u_1(t)$  и  $y_2(t) = Au_0 e^{-j(\omega t + \alpha + \varphi)} = Ae^{-j\varphi} u_2(t)$ , где  $\varphi$  и  $A$  — параметры, подлежащие определению.

В левых частях уравнений получим  $Q(s)y_1(t) = Ae^{j\varphi} u_1(t)Q(j\omega)$  и  $Q(s)y_2(t) = Ae^{j\varphi} u_2(t)Q(-j\omega)$ . Таким образом, имеем два равенства

$$Ae^{j\varphi} u_1(t)Q(j\omega) = u_1(t)R(j\omega), \quad Ae^{-j\varphi} u_2(t)Q(-j\omega) = u_2(t)R(-j\omega),$$

что эквивалентно

$$Ae^{j\varphi} = W(j\omega), \quad Ae^{-j\varphi} = W(-j\omega),$$

откуда следует, что

$$A = |W(j\omega)| = |W(-j\omega)|$$

и  $\varphi = \arg W(j\omega) = -\arg W(-j\omega)$ . В итоге,

$$y_1(t) = Au_0 e^{j(\omega t + \alpha + \varphi)}, \quad y_2(t) = Au_0 e^{-j(\omega t + \alpha + \varphi)}.$$

Следовательно,  $y(t) = \frac{y_1(t)+y_2(t)}{2} = u_0|W(j\omega)| \cos(\omega t + \alpha + \arg W(j\omega))$ .

Заметим, что найденное решение  $y(t)$  является вынужденной составляющей решения уравнения (2.26). В силу того, что в выкладках выше используются ПФ в преобразованиях Лапласа, начальные условия нулевые.

Кроме вынужденной составляющей в решении есть свободные колебания, которые определяются из начальных условий и полинома  $Q(s)$ . Это означает, что в реальных системах такое преобразование гармонического сигнала будет явно видно только через некоторое время, т.е. после окончания *переходного процесса*. (Это можно увидеть при моделировании линейной системы с входным гармоническим сигналом.)

**Пример 5.** На вход системы подается сигнал  $u = 2 \cdot \sin 0,5t$

Определить реакцию системы при заданной ПФ:

$$W(s) = \frac{6(s+4)}{(s+1)(0,49s^2+0,7s+1)}$$

*Решение*

Найдем частную ПФ:

$$W(j\omega) = \frac{6(j\omega+4)}{(j\omega+1)(-0,49\omega^2+0,7j\omega+1)}$$

при  $\omega = 0,5$  найдем  $A(0,5)$ :

$$\begin{aligned} A(0,5) &= \left| \frac{6(0,5j+4)}{(0,5j+1)(-0,49 \cdot (0,5)^2 + 0,7 \cdot 0,5j + 1)} \right| = \\ &= \frac{6 \cdot \sqrt{(0,5)^2 + 16}}{\sqrt{(0,5)^2 + 1} \cdot \sqrt{(-0,49 \cdot (0,5)^2 + 1)^2 + (0,7 \cdot 0,5)^2}} \approx 22,899 \end{aligned}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Так как действительные части перемножаемых комплексных чисел в ЧПФ положительно, то можно воспользоваться арктангенсом для вычисления аргумента.

$$\varphi(0,5) = \arctg\left(\frac{0,5}{4}\right) - \arctg(0,5) - \arctg\left(\frac{0,7 \cdot 0,5}{1 - 0,49 \cdot (0,5)^2}\right) \approx -0,719$$

Ответ

$$y = 45,798(\sin(0,5t - 0,719))$$

## 2.4 Основные типы элементарных звеньев

**Пропорциональное звено**  $W(s) = k$ .  $W(j\omega) = k$ ,  $A(\omega) = |k|$ ,  $\varphi(\omega) = 0$ ,  $h(t) = k$ ,  $\omega(t) = k\delta(t)$ ;

**Дифференциальное звено**  $W(s) = ks$ .

$$W(j\omega) = kj\omega, A(\omega) = |k|\omega, \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}, h(t) = k\delta(t), \omega(t) = k\dot{\delta}(t);$$

**Интегрирующее звено**  $W(s) = \frac{k}{s}$ .

$$W(j\omega) = -\frac{kj}{\omega}, A(\omega) = \frac{|k|}{\omega}, \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}, h(t) = kt, \omega(t) = k;$$

**Апериодическое звено**  $W(s) = \frac{k}{Ts+1}$ ,  $T > 0$ .

$$W(j\omega) = \frac{k}{jT\omega + 1}, A(\omega) = \frac{|k|}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}, \varphi(\omega) = -\arctg(\omega T),$$

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \omega(t) = \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}};$$

**Колебательное звено**  $W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$ ,  $T > 0$ ,  $0 < \xi < 1$ .

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + j2\xi T\omega},$$

$$A(\omega) = \frac{|k|}{\sqrt{(1 - (T\omega)^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg(\frac{2\xi T\omega}{1 - (T\omega)^2}) & 1 \geq (T\omega)^2, \\ -\pi + \arctg(\frac{2\xi T\omega}{(T\omega)^2 - 1}) & 1 < (T\omega)^2, \end{cases}$$

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \right],$$

$$\omega(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\zeta}{T}, \quad \beta = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}.$$

**Звено чистого запаздывания**  $W(s) = ke^{-\tau s}$ ,  $\tau > 0$ . Функции описывающие её

$$W(j\omega) = ke^{-j\tau\omega},$$

$$A(\omega) = k, \quad \varphi(\omega) = -\tau\omega,$$

$$h(t) = k\mathcal{X}(t - \tau), \quad \omega(t) = k\delta(t - \tau).$$

Это классический способ описания чистого или транспортного запаздывания в системе: воздействие сигнала происходит не в тот же момент, а через некоторое время  $\tau$ .

## 2.5 Структурные схемы и дифференциальные уравнения систем управления

**Определение 19.** *Структурной схемой* системы управления называют графическое изображение её математической модели (ММ) в виде прямоугольников и кругов, обозначающих звенья её математической модели, с указанием входов и выходов. Причем кругами обозначают только сумматоры — звенья, которые имеют не менее двух входов и один выход и в которых происходит сложение или вычитание входных сигналов.



Рис. 2.2: Примеры структурных схем

### 2.5.1 Преобразование структурных схем

Как любое другое звено, сумматор обладает ПФ. Для первого рисунка это передаточная функция с двумя входами и одним выходом вида

$$W(s) = \begin{pmatrix} W_{ye}(s) \\ W_{ge}(s) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T.$$

Соответственно, получаем  $e = W(s) \begin{pmatrix} y \\ g \end{pmatrix} = -y + g$ .

Для второго рисунка это

$$W(s) = \begin{pmatrix} W_{vz}(s) \\ W_{xz}(s) \\ W_{fz}(s) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T.$$

Соответственно,  $z = W(s) \cdot (v, x, f)^T = v + x + f$ .

**Определение 20.** *Последовательное соединение* - соединение, при котором выходная переменная предшествующего звена является входной переменной последующего звена. При последовательном соединении ПФ

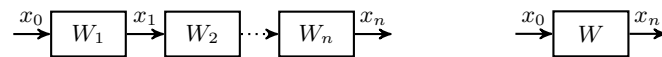
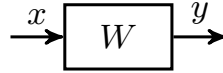
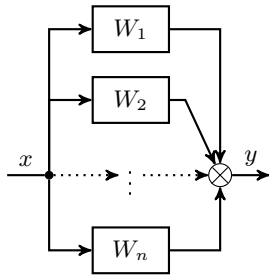


Рис. 2.3: Примеры структурных схем

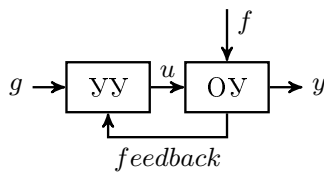
между сигналами  $x_0$  и  $x_n$  вычисляется по формуле  $W = W_1 \cdot W_2 \cdot \dots \cdot W_n$ . Это следует из определения звена.

**Определение 21.** *Параллельное соединение* - соединение, при котором на входы всех звеньев подается одно и то же воздействие, а их выходные переменные складываются.

**Определение 22.** *Обратное соединение* - соединение двух звеньев, при котором выход звена прямой цепи подается на вход звена обратной связи, выход которого складывается с входом первого звена.



При параллельном соединении ПФ вычисляется по формуле  $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ .



Если разомкнуть цепь у сумматора после блока  $W_2$ , получим цепь последовательно соединенных звеньев с передаточной функцией  $W_p = W_1 \cdot W_2$ , называемой *передаточной функцией разомкнутого контура*.

Легко найти звено, которое описывает такое обратное соединение, из следующих уравнений (записано для *отрицательной обратной связи*):

$$y = W_1 e, \quad e = g - W_2 y.$$

Откуда  $y = W_{yg} g$ , где

$$W_{yg} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}.$$

Для положительной обратной связи  $W_{yg}$  определяется аналогично.

**Перенос сумматора.** Перенос сумматора бывает двух видов: по ходу сигнала и против хода сигнала. В первом случае добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор.

При переносе сумматора против хода сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор.

**Перенос узла.** Перенос узла, как и сумматора, бывает двух видов: по ходу сигнала и против хода сигнала. При переносе узла по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией звена, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел.

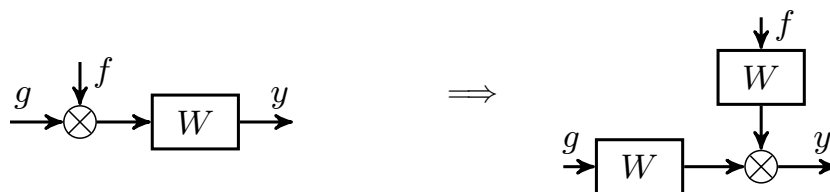
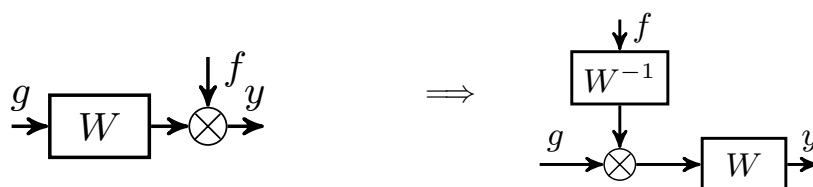


Рис. 2.4: Выходной сигнал  $y$  при таких преобразованиях остается неизменным.



При переносе узла против хода добавляется звено с передаточной функцией звена, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел.

**Перестановка сумматоров и узлов.** Перестановка двух сумматоров выполняется в соответствии с сохранением сигнала; перестановка узлов не меняет значения сигналов, поэтому не требует никаких изменений.

## 2.5.2 Вычисление передаточной функции одноконтурной и многоконтурной систем

**Определение 23.** Замкнутая система называется *одноконтурной*, если при ее размыкании в какой-либо точке замкнутого контура получается цепь (схема) без параллельных и обратных соединений.



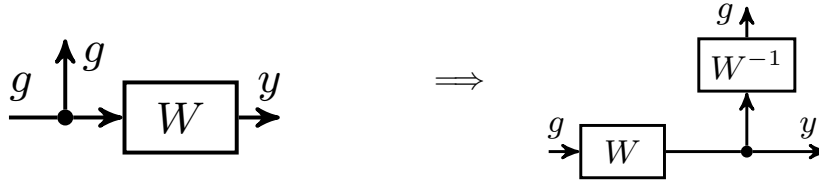
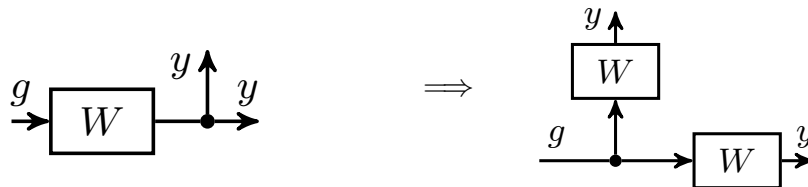


Рис. 2.5: Аналогично, выходной сигнал  $y$  при таких преобразованиях остается неизменным.



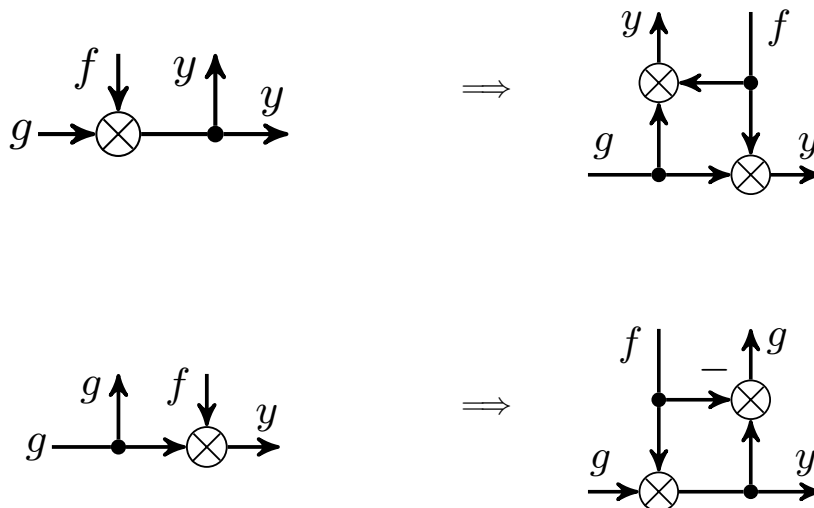
**Правило вычисления передаточной функции замкнутой одноконтурной системы.** Передаточная функция одноконтурной системы относительно внешнего воздействия (входа)  $u$  и выхода равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу минус передаточная функция контура:  $W_{xu} = \frac{W_{\text{п}}}{1 - W_{\text{к}}}$ .

Тогда передаточная функция системы относительно входа  $g$  и выхода  $y$

$$W_{gy} = \frac{W_1 \cdot W_2}{1 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_3},$$

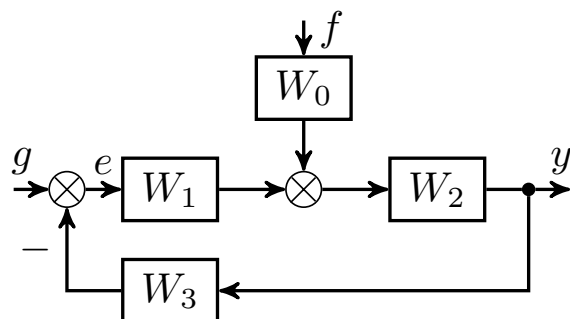
а для входа  $f$  и выхода  $e$

$$W_{fe} = \frac{-W_0 \cdot W_2 \cdot W_3}{1 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_3}.$$

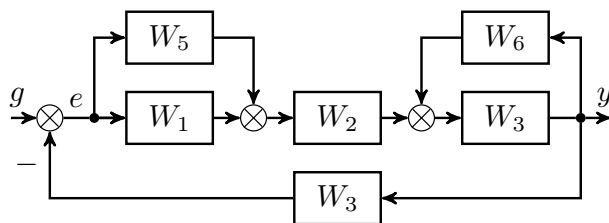


**Определение 24.** Замкнутая система называется *многоконтурной*, если при ее размыкании в какой-либо точке замкнутого контура получается цепь, содержащая хотя бы одно параллельное или обратное соединение. Многоконтурная система бывает двух видов: с перекрестными связями и без перекрестных связей. Многоконтурная система *не имеет перекрестных связей*, если любые два контура, образованные параллельными или обратными соединениями, не имеют общих участков или если какие-либо два контура имеют общий участок, то один из них вложен внутрь другого. Многоконтурная система имеет *перекрестные связи*, если она содержит два контура, которые имеют общий участок, и при этом ни один из них не вложен внутрь другого.

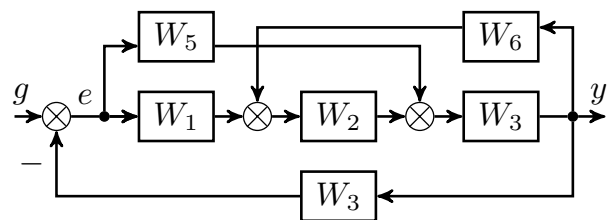
Рассмотрим пример одноконтурной системы.



Рассмотрим пример многоконтурной системы без перекрестных связей.



Рассмотрим пример многоконтурной системы с перекрестными связями.



## 2.6 Основные способы математического описания САУ

1. ОДУ:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m \beta_i u^{(i)}, \quad m \leq n;$$

2. ПФ (в изображениях Лапласа и в операторной форме):

$$W(s) = \frac{\sum_{i=0}^m \beta_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i} = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)};$$

3. Временные функции:  $h(t)$  и  $\omega(t)$ ;

4. Система в пространстве состояний (ПС): ?

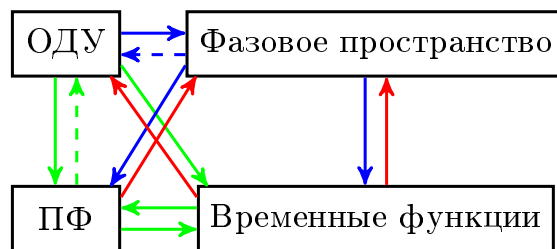


Рис. 2.6:

**Синий цвет:** переходы, которые будут рассмотрены.

**Красный цвет:** переходы, которые не будут рассматриваться в курсе.

**Зеленый цвет:** переходы, которые уже были рассмотрены.

Прерванная линия означает, что переход возможен при определенных условиях.

### 2.6.1 Описание системы в фазовом пространстве (пространстве состояний)

Линейный ОУ может быть описан системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, \\ y = cx + du, & y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.27)$$

где  $u(t)$  и  $y(t)$  — назначаемое управление и соответствующий ему выход,  $x(t)$  — вектор состояния системы или фазовый вектор, матрицы  $A$ ,  $b$  и  $c$  соответствующих размерностей,  $d$  — число (в основном везде будем полагать, что  $d = 0$ ). Такое описание называют описанием системы в фазовом пространстве.

Если ОУ линейный нестационарный, то матрицы в (2.27) зависят от времени:  $A = A(t)$ ,  $b = b(t)$  и  $c = c(t)$ .

На второй лекции был рассмотрен перевернутый маятник и его описание в пространстве состояний.

### 2.6.2 Переход от ОДУ к ПС

Пусть дано описание ОУ в виде ОДУ  $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m \beta_i u^{(i)}$ ,  $m \leq n$ . Определим алгоритм перехода от ОДУ к описанию в ПС (2.27).

Рассмотрим этот переход для случая<sup>2</sup>  $n = m = 2$ . Тогда имеем ОДУ

$$\begin{cases} \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_2 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 u, \\ \dot{y}(0) = y_1, \quad y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.28)$$

и требуется перейти к ПС

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + ku, \\ y = cx + du, \\ x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \end{cases} \quad (2.29)$$

---

<sup>2</sup>Для общего случая смотри [8]

где  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $k, c^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  и  $d, x_{10}, x_{20} \in \mathbb{R}$  — параметры, подлежащие определению.

Выбор параметров  $A, b, c$  и  $d$  может быть разнообразным, но при этом выходы в описаниях (2.28) и (2.29) должны совпадать. Рассмотрим один из способов.

Оказывается, что матрицу  $A$  можно выбрать в виде матрицы Фробениуса характеристического полинома ОДУ (2.28) ( $\alpha(s) = s^2 + a_1s + a_0$ ), т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix},$$

а  $c = (1 \ 0)$ . Тогда описание (2.29) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + k_1 u, \\ \dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + k_2 u \\ y = x_1 + d u, \\ x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Чтобы определить параметры  $k_1, k_2$  и  $d$ , выведем уравнение, связывающее  $y$  и  $u$ . Для этого в (5.2) выразим  $x_1$  и  $x_2$  через  $y$  и  $u$ :  $x_1 = y - du$ , отсюда  $x_2 = \dot{y} - d\dot{u} - k_1 u$ . В результате получаем уравнение для  $y$  и  $u$ :

$$\ddot{y} - d\ddot{u} - k_1 \dot{u} = -a_0(y - du) - a_1(\dot{y} - d\dot{u} - k_1 u) + k_2 u.$$

Сгруппируем и приведем подобные:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + \alpha_0 y = d\ddot{u} + (k_1 + a_1 d)\dot{u} + (a_0 d + \alpha_1 k_1 + k_2)u.$$

Это уравнение должно совпадать с исходным уравнением (2.28), т.е.  $d = \beta_2$ ,  $k_1 + \alpha_1 d = \beta_1$ ,  $\alpha_0 d + a_1 k_1 + k_2 = \beta_0$ . Отсюда окончательные выражения:

$$\begin{cases} d = \beta_2, \\ k_1 = \beta_1 - \alpha_1 \beta_2, \\ k_2 = \beta_0 - \alpha_0 \beta_2 - \alpha_1(\beta_1 - a_1 \beta_2). \end{cases}$$

Таким образом, динамика у уравнения (2.28) и у системы уравнений (2.29) одинакова, однако если не совпадают начальные условия, то выходы все еще будут различны. Поэтому необходимы *условия согласования* начальных условий.

Повторно пользуясь выражениями  $x_1 = y - du$  и  $x_2 = \dot{y} - d\dot{u} - k_1u$ , получим условия согласования

$$\begin{aligned}x_{10} &= y_0 - \beta_2 u(0), \\x_{20} &= y_1 - \beta_2 \dot{u}(0) - (\beta_1 - a_1 \beta_2) u(0).\end{aligned}$$

### Пример 6.

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = \ddot{u} - 1 \quad y(0) = y_0; \quad \dot{y}(0) = y_1$$

*Решение*

Требуется перейти к ПС:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + ku \\ y = Cx + du \\ x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда описание ПС примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + k_1 \cdot u \\ \dot{x}_2 = (-1) \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + k_2 \cdot u \\ y = x_1 + du \end{cases} \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}$$

Выразим  $x_1$  и  $x_2$  через  $y$  и  $u$ :

$$x_1 = y - du; \quad x_2 = \dot{y} - d\dot{u} - k_1u$$

Получим в результате подстановки:

$$\ddot{y} - d\ddot{u} - k_1\dot{u} = -(y - du) - (\dot{y} - d\dot{u} - k_1u) + k_2u$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = d\ddot{u} + (k_1 + d)\dot{u} + (d + k_1 + k_2)u$$

Заметим, что уравнение совпадает с исходным.

$$\begin{cases} k_1 + d = 0 & d = 1 \quad k_1 = -1 \quad k_2 = 0 \\ d = 1 \\ d + k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

Таким образом получим ПС:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + u \\ x_1(0) = y_0 - u(0) \quad x_2 = y_1 - \dot{u}(0) + u(0) \end{cases}$$

### 2.6.3 Переход от ПС к ПФ. Инвариантность формы ПФ при невырожденном преобразовании вектора состояния

Как вычислить ПФ, если система дана в виде, указанном ниже?

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = cx. \end{cases}$$

Как и в случае с ОДУ  $n$ -го порядка, чтобы получить ПФ в изображениях по Лапласу, достаточно взять преобразование от всех уравнений при нулевых начальных условиях. Тогда в обозначениях  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ ,  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ ,  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  получим

$$\begin{cases} Xs = AX + bU, \\ Y = cX, \end{cases}$$



откуда получаем  $X(s) = (sI - A)^{-1}bU(s)$  и  $Y(s) = c(sI - A)^{-1}bU(s)$ .  
Последнее соотношение по определению ПФ означает, что

$$W(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}.$$

Запись в пространстве состояний содержит “внутреннюю” переменную  $x(t)$ , фазовый вектор. Это даёт возможность выбирать эту переменную в некоторых пределах, например, от  $x$  можно перейти к  $z = Mx$ , где  $\det M \neq 0$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . При этом выход  $y$  и вход  $u$  системы не изменятся, но изменятся матрицы  $A, b$  и  $c$ . Домножив первое уравнение на  $M$  и сделав замену  $x = M^{-1}z$ , получим:

$$\begin{cases} \dot{z} = MAM^{-1}z + Mbu, \\ y = cM^{-1}z. \end{cases}$$

В новом фазовом пространстве имеем

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{b}u, \\ y = \bar{c}z, \end{cases}$$

где  $\bar{A} = MAM^{-1}$ ,  $\bar{b} = Mb$  и  $\bar{c} = cM^{-1}$ .

Вычислим ПФ в новом фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} W(s) &= \bar{c}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b} = cM^{-1}(sI - MAM^{-1})^{-1}Mb = \\ &= cM^{-1}(sMM^{-1} - MAM^{-1})^{-1}Mb = cM^{-1}(M(sI - A)M^{-1})^{-1}Mb = \\ &= c(sI - A)^{-1}b. \end{aligned}$$

Это означает инвариантность ПФ относительно невырожденных преобразований в фазовом пространстве (пространстве состояний).

**Пример 7.** Выписать ПФ объекта  $W(s)$ , заданного в ПС:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 7x_1 + 2u, \\ \dot{x}_2 = 7x_1 - x_2 + 3u, \\ y = x_1 \end{cases}$$

*Решение* Переход от ПС к ПФ осуществляется по формуле

$$W(s) = C \cdot (sI - A) \cdot B$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s+7 & -1 \\ -7 & s+1 \end{pmatrix} \cdot (sI - A)^T = \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 7 & s+7 \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (s+7)(s+1) - 7$$

$$\begin{aligned} W(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 7 & s+7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s+7)(s+1) - 7} = \\ &= \begin{pmatrix} s+1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s+7)(s+1) - 7} \frac{2(s+1) + 3}{s^2 + 8s} = \frac{2s+5}{s^2 + 8s}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } W(s) = \frac{2s+5}{s^2+8s}.$$

## 2.6.4 Формулы вычисления реакции системы

В ПС существует удобная формула для выражения реакции системы, которая опирается на формулу Коши для решения линейной системы уравнений. Для уравнения  $\dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0$  она принимает вид

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau,$$

где  $e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \dots$  — матричная экспонента. Тогда реакция системы выражается как

$$y(t) = ce^{At}x_0 + c \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau. \quad (2.31)$$

Для ПФ выполнено  $Y(s) = W(s)U(s)$ . После применения обратного преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях,  $x_0 = 0$ , к последнему соотношению получим

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)U(s)\} = \int_0^t \omega(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

Таким образом, свертка весовой функции и входного воздействия равна реакции системы.

### 2.6.5 Переход от ПС к временным функциям

Из 2.31 легко получить, что при  $u(t) = x(t)$  и  $x_0 = 0$

$$h(t) = c \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau)d\tau = ce^{At} \int_0^t e^{-A\tau} d\tau B = ce^{At}((-A)^{-1}e^{-A\tau} \Big|_0^t)B = c(A^{-1}e^{At} - I)B$$

Аналогично, для весовой функции  $\omega(t)$ :

$$\omega(t) = c \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\delta(\tau)d\tau = ce^{At}B$$

## Глава 3

# Устойчивость непрерывных систем управления

**Определение 25.** Система является *устойчивой*, если после исчезновения того или иного возмущения ее поведение вернется к заданному режиму. В противном случае система считается нейтральной либо неустойчивой.

Большинство систем являются нелинейными, а линейными являются лишь их приближения. А. М. Ляпунов в 1892 году показал, что в некоторых случаях по первому приближению можно судить об устойчивости нелинейной системы.

**Теорема 1.** *Теоремы Ляпунова об устойчивости нелинейной системы:*

1. *Если все корни характеристического уравнения линеаризованной модели являются левыми, то невозмущенное движение соответствующей нелинейной системы асимптотически устойчиво.*
2. *Если среди корней характеристического уравнения линеаризованной модели имеется правый корень, то невозмущенное движение соответствующей нелинейной системы неустойчиво.*

3. *Случай, когда среди корней характеристического уравнения линеаризованной модели имеются нейтральные корни (корни на мнимой оси), но нет правых корней, называют критическим. В критическом случае по линеаризованной модели нельзя судить об устойчивости невозмущенного движения нелинейной системы.*

### 3.1 Устойчивость в линейных системах

Как известно, в системах вида (3.1) решение можно представить в виде суммы свободного и вынужденного движений:

$$x(t) = x_o(t) + x_ч(t),$$

где  $x_ч(t)$  — частное решение неоднородного уравнения при  $x_0 = 0$ ,  $x_o(t)$  — общее решение уравнения при  $u \equiv 0$ .

Общее решение  $x_o(t)$  однородного уравнения описывает свободное движение системы управления (т. е. движение при отсутствии внешних воздействий), определяемое только начальными условиями. Частное решение  $x_ч(t)$  описывает вынужденное движение, определяемое внешними воздействиями.

**Определение 26.** Система

$$\dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

называется *асимптотически устойчивой по Ляпунову*, если  $x_o(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и любом  $x_0$ .

### 3.1.1 Основное условие устойчивости

Коэффициенты характеристического уравнения системы управления совпадают с коэффициентами характеристического уравнения дифференциального уравнения, которое имеет вид  $\alpha(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0$ , где  $\alpha(s)$  — характеристический полином. Если  $s_i, (i = 1, 2, \dots, q)$  — корни характеристического уравнения кратности  $k_i, (k_1 + k_2 + \dots + k_q = n)$ , то общее решение однородного уравнения имеет вид  $x_o(t) = \sum_{i=1}^q P_i(t) e^{s_i t}$ , где  $P_i(t) = C_1^{(i)} + C_2^{(i)} t + \dots + C_{k_i}^{(i)} t^{k_i-1}$ ; где  $C_{k_i}^{(i)}$  — постоянные интегрирования. В частном случае, когда все корни простые,  $x_o(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t}$ . По правилу Лопиталя можно показать, что  $P_i(t) e^{s_i t} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда действительная часть корня  $s_i$  отрицательна:  $\operatorname{Re} s_i < 0$ .

**Определение 27** (Основное условие устойчивости). Для того чтобы система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть (т.е. лежали в левой полуплоскости).

### 3.1.2 Необходимое условие устойчивости

**Теорема 2** (Необходимое условие устойчивости). [3, стр. 130] Для того чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы все коэффициенты ее характеристического уравнения были строго одного знака:

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0 \text{ или } \alpha_0 < 0, \alpha_1 < 0, \dots, \alpha_n < 0$$

Если одно из этих условий не выполняется, то система является неустойчивой.

*Доказательство.* Представим характеристический полином в виде разложения  $\alpha(s) = \alpha_0(s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n)$ . Действительному отрицательному корню  $s_k = -\alpha_k, (\alpha_k > 0)$  в разложении соответствует множитель  $s - s_k = s + \alpha_k$ . Парe комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью  $s_l = -\alpha_l + j\beta_l$  и  $s_{l+1} = -\alpha_l - j\beta_l, (\alpha_l, \beta_l > 0)$  соответствует множитель  $(s - s_l)(s - s_{l+1}) = (s + \alpha_l - j\beta_l)(s + \alpha_l + j\beta_l) = (s + \alpha_l)^2 + \beta_l^2$ . Следовательно если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то характеристический полином может быть представлен как произведение полиномов первой и второй степени с положительными коэффициентами, и соответственно все его коэффициенты при  $a_0 > 0$  будут положительными и при  $a_0 < 0$  — отрицательными.  $\square$

## 3.2 Алгебраические критерии устойчивости

**Определение 28.** *Алгебраическими критериями устойчивости* называются такие условия, составленные из коэффициентов характеристического уравнения, при выполнении которых система устойчива, а при невыполнении — неустойчива. При проведении исследования устойчивости следует первоначально проверить выполнение необходимого условия устойчивости.

### 3.2.1 Критерий Гурвица

Определим матрицу Гурвица

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-3} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_3 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

**Теорема 3** (Гурвица). Пусть  $\alpha_i > 0, i = \overline{0, n-1}$ . Полином  $\alpha(s)$  устой-

чив тогда и только тогда, когда все главные миноры  $\Delta_i$  матрицы Гурвица положительны.

Из коэффициентов характеристического полинома  $\alpha(s) = \alpha_n(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$  составляется определитель  $n$ -го порядка:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \dots & * \\ * & \ddots & * \\ * & \dots & \alpha_{n-i} \end{vmatrix}$$

**Пример 8.** Исследовать на устойчивость полином

$\alpha(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 10s + 1$  с помощью критерия Гурвица.

*Решение:*

Необходимое условие устойчивости выполнено, составим матрицу Гурвица.

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем определители Гурвица:

$$\Delta_1 = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 49, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -51 < 0.$$

Система неустойчива.

**Пример 9.** Исследовать на устойчивость полином

$\alpha(s) = s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 11s + 8$  с помощью критерия Гурвица.

*Решение:*

Необходимое условие устойчивости выполнено, составим матрицу Гурвица.



$$H = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Следует упомянуть, что также есть и другие способы построения матрицы Гурвица, например:

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Алгоритм для них остается таким же. Вычисления приводятся для первой матрицы

Найдем определители Гурвица:

$$\Delta_1 = 11, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 11 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 77 - 40 = 37, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 11 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & 1 \\ 0 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 64, \Delta_4 = 1 \cdot \Delta_3 = 64.$$

Так как все определители Гурвица больше нуля, то полином устойчив.

### 3.2.2 Критерий Рауса

**Теорема 4 (Рауса).** *Для того чтобы полином  $\alpha(s)$  был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы Рауса при  $\alpha_0 > 0$  были положительны:  $C_{k1} > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n + 1$ .*

Таблица 3.1: Таблица Рауса ( $r_k = c_{k-2,1}/c_{k-1,1}$ )

№	1	2	3	...
1	$c_{1,1} = \alpha_n$	$c_{1,2} = \alpha_{n-2}$	$c_{1,3} = \alpha_{n-4}$	...
2	$c_{2,1} = \alpha_{n-1}$	$c_{2,2} = \alpha_{n-3}$	$c_{2,3} = \alpha_{n-5}$	...
3	$c_{3,1} = c_{1,2} - r_3 c_{2,2}$	$c_{3,2} = c_{1,3} - r_3 c_{2,3}$	$c_{3,3} = c_{1,4} - r_3 c_{2,4}$	...
4	$c_{4,1} = c_{2,2} - r_4 c_{3,2}$	$c_{4,2} = c_{2,3} - r_4 c_{3,3}$	$c_{4,3} = c_{2,4} - r_4 c_{3,4}$	...
...	...	...	...	...
$n+1$	$c_{n+1,1} = c_{n-1,2} - r_{n+1} c_{n,2}$			

**Замечание 1** (О таблице Рауса).

1. В таблице Рауса ровно  $n + 1$  строка и  $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$  столбец;
2. Строки вычитаются целиком одна из другой;
3. В позициях, где не хватает элемента (или не был записан результат) пишется ноль.

**Пример 10.** Исследовать на устойчивость полином

$\alpha(s) = s^5 + 2s^4 + 8s^3 + 4s^2 + 5s + 6$  с помощью критерия Рауса.

*Решение:*

Необходимое условие устойчивости выполнено, воспользуемся критерием Рауса. Вычислим элементы таблицы Рауса.

$$c_{1,1} = 1, \quad c_{1,2} = 8, \quad c_{1,3} = 5,$$

$$c_{2,1} = 2, \quad c_{2,2} = 4, \quad c_{2,3} = 6,$$

$$c_{3,1} = 6, \quad c_{3,2} = 2, \quad c_{3,3} = 0,$$

$$c_{4,1} = \frac{10}{3}, \quad c_{4,2} = 6, \quad c_{5,3} = 0,$$

$$c_{5,1} = 2 - 6 \cdot \frac{9}{5} < 0.$$

Так как элемент  $c_{5,1}$  отрицателен, полином не устойчив

**Пример 11.** Исследовать на устойчивость полином

$\alpha(s) = s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 7s + 3$  с помощью критерия Рауса.

*Решение:*

Необходимое условие устойчивости выполнено, воспользуемся критерием Рауса. Составим таблицу Рауса:

1	5	3
4	7	0
$\frac{13}{4}$	3	0
$\frac{43}{13}$	1	0

Все элементы первого столбца положительны, следовательно, система устойчива.

### 3.3 Частотные критерии устойчивости

**Определение 29.** Частотными критериями устойчивости называются условия устойчивости, основанные на построении частотных характеристик и так называемой кривой Михайлова.

**Определение 30.** Кривая Михайлова — годограф характеристического вектора, т.к. кривая, которую описывает характеристический вектор при изменении частоты от 0 до  $\infty$ .

**Определение 31.** Характеристический вектор — вектор на комплексной плоскости, концом которого является число

$$\alpha(j\omega) = \alpha_n(j\omega)^n + \alpha_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

, при  $s = j\omega$  в характеристический полином  $\alpha(s)$ .

#### 3.3.1 Принцип аргумента

**Теорема 5** (Принцип аргумента). Пусть полином  $\alpha(s)$  имеет  $l$  корней в правой полуплоскости и  $(n-l)$  — в левой (на мнимой оси корней нет). Тогда  $\Delta \text{Arg} \alpha(j\omega)|_{\omega=0}^{\infty} = (n-2l)\frac{\pi}{2}$ .

*Доказательство.* Если разложить полином  $\alpha(s)$  на элементарные множители и сделать постановку  $s = j\omega$ , то получим

$$\alpha(j\omega) = \alpha_0(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)\dots(j\omega - s_n),$$

где  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — нули полинома  $\alpha(s)$ . Из этого соотношения получим  $\arg \alpha(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - s_i)$  и соответственно

$$\Delta \text{Arg} \alpha(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta \psi_i.$$

Здесь  $\Delta \psi_i$  — приращение аргумента множителя  $j\omega - s_i$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

Найдем  $\Delta \psi_i$  отдельно для случаев, когда  $s_i$  — комплексное число.

а)  $s_i = \alpha_i$ ,  $\alpha_i$  — вещественное число. В этом случае

$$\psi_i(\omega) = \arg(j\omega - \alpha_i) = \begin{cases} \pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha_i} & \text{при } \alpha_i > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\omega}{-\alpha_i} & \text{при } \alpha_i < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi_i(0) &= \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha_i < 0, \\ \pi & \text{при } \alpha_i > 0, \end{cases} \\ \psi_i(\infty) &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha_i < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha_i > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Delta\psi_i = \psi_i(\infty) - \psi_i(0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha_i < 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha_i > 0. \end{cases}$$

Таким образом, если вещественный нуль является левым ( $\alpha_i < 0$ ), приращение  $\Delta\psi_i = \frac{\pi}{2}$ ; если правым ( $\alpha_i > 0$ ), приращение  $\Delta\psi_i = -\frac{\pi}{2}$

б)  $s_i = \alpha_i + j\beta_i$ ,  $\alpha_i, \beta_i$  — вещественные числа. В этом случае существует комплексно-сопряженный нуль  $s_{i+1} = \alpha_i + j\beta_i$ . Приращения множетилей, соответствующих этим нулям, определяются следующим образом:

$$\psi_i(\omega) = \arg(j\omega - \alpha_i - j\beta_i) = \begin{cases} \pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega - \beta_i}{\alpha_i} & \text{при } \alpha_i > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\omega - \beta_i}{-\alpha_i} & \text{при } \alpha_i < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi_i(0) &= \begin{cases} \pi - \operatorname{arctg}(\frac{\beta_i}{\alpha_i}) & \text{при } \alpha_i < 0, \\ -\operatorname{arctg}(\frac{\beta_i}{\alpha_i}) & \text{при } \alpha_i > 0, \end{cases} \\ \psi_i(\infty) &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha_i < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha_i > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Delta\psi_i = \psi_i(\infty) - \psi_i(0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\omega - \beta_i}{-\alpha_i} & \text{при } \alpha_i < 0, \\ -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\omega - \beta_i}{-\alpha_i} & \text{при } \alpha_i > 0. \end{cases}$$

Аналогично получаем

$$\Delta\psi_{i+1} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\omega - \beta_i}{-\alpha_i} & \text{при } \alpha_i < 0, \\ -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\omega - \beta_i}{-\alpha_i} & \text{при } \alpha_i > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем суммарное приращение  $\Delta\psi_i + \Delta\psi_{i+1} = 2 \cdot (\frac{\pi}{2})$ ,

если комплексно-сопряженные нули левые ( $\alpha_i < 0$ ), и

$\Delta\psi_i + \Delta\psi_{i+1} = -2 \cdot (\frac{\pi}{2})$ , если комплексно-сопряженные нули левые ( $\alpha_i > 0$ ).

Так как комплексно-сопряженные числа отличаются только мнимой частью, они оба являются левыми или оба являются правыми. Поэтому и в случае комплексных нулей «в среднем» на каждый левый нуль приходится приращение  $\frac{\pi}{2}$ , на каждый правый корень — приращение  $-\frac{\pi}{2}$ .

Таким образом, если полином имеет  $l$  правых нулей и  $n - l$  левых нулей, то при изменении частоты от 0 до  $\infty$ , приращение есть

$$\Delta\alpha(j\omega) = l \cdot (-\frac{\pi}{2}) + (n - l) \frac{\pi}{2} = (n - 2l) \frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.  $\square$

### 3.3.2 Критерий Михайлова

**Теорема 6** (Критерий Михайлова). *Полином  $\alpha(s)$  устойчив тогда и только тогда, когда годограф Михайлова  $\alpha(j\omega)$  начинается на положительной вещественной оси и последовательно проходит все  $n$  квадрантов в положительном направлении (против часовой стрелки).*

*Доказательство.* Из принципа аргумента следует, что если все нули характеристического полинома левые, то приращение аргумента характеристического вектора есть  $\Delta \operatorname{Arg} \alpha(j\omega) = \frac{n\pi}{2}$ .  $\square$

### 3.3.3 Критерий Найквиста

До этого все критерии формулировались для разомкнутых систем. Следующий критерий формулируется для замкнутой системы с передаточной функцией  $W(s)$  в прямой цепи (обратная связь отрицательная).

**Теорема 7** (Найквист). *Предположим, что разомкнутая система не имеет полюсов на мнимой оси. Замкнутая система устойчива тогда и только тогда, когда АФЧХ (годограф Найквиста) разомкнутой системы охватывает точку  $(-1, 0j)$  в положительном направлении  $\frac{l}{2}$  раз, где  $l$  — число правых полюсов ПФ разомкнутой системы.*

**Определение 32.** *Годографом Найквиста* называется кривая, описываемая концом вектора  $W(j\omega)$  на комплексной плоскости при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

При наличии мнимых корней у разомкнутой системы формулировка критерия почти не меняется.

## 3.4 Условие граничной (маргинальной) устойчивости

**Определение 33.** Говорят, что линейная система находится на границе устойчивости, если среди корней характеристического уравнения есть чисто мнимые (нейтральные) и нет правых корней.

### 3.4.1 Граничный коэффициент

Пусть дана ПФ разомкнутой системы вида  $W(s) = \frac{k}{s^v} W_0(s)$ ,  $W(0) = 1$ . Тогда устойчивость замкнутой системы может зависеть от коэффициента  $k$ . Такой коэффициент  $k = k_r$ , при котором система находится на границе устойчивости, называется *граничным коэффициентом*.

**Теорема 8** (Условие граничной устойчивости Найквиста.). *Замкнутая система находится на границе устойчивости, если АФЧХ разомкнутой системы проходит через точку  $(-1, 0j)$  и при малой её деформации выполняется критерий устойчивости Найквиста.*

Примером маргинальной замкнутой системы является система с ПФ разомкнутой системы  $W(s) = \frac{5}{s^2-1}$ . Очевидно,  $W(j\omega_0) = -1 + 0j$ , при  $\omega_0 = 2$ .

### 3.4.2 Устойчивость систем с чистым запаздыванием

**Определение 34.** *Чистое запаздывание* — это транспортное запаздывание, т.е. задержка в реакции выхода ОУ на воздействие (например, душ в ванной, а также системы с ленточными конвейерами). ПФ звена чистого запаздывания имеет вид  $W(s) = e^{-\tau s}$ . Разомкнутую систему с запаздыванием запишем в виде

$$W_\tau(s) = e^{-\tau s}W(s), \quad W(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

где  $A(s), B(s)$  — полиномы. Для исследования устойчивости такой системы может быть использован критерий Найквиста, формулировка которого практически остается без изменения.

Частотная передаточная функция, амплитудная и фазовая частотные функции разомкнутой системы имеют вид

$$W_\tau(j\omega) = W(j\omega)e^{-j\tau\omega}, \quad W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{S(j\omega)},$$

$$|W_\tau(j\omega)| = |W(j\omega)|, \quad \varphi_\tau(\omega) = \varphi(\omega) - \tau\omega,$$

где  $\varphi_\tau(\omega) = \arg W_\tau(j\omega)$ ,  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ .

Легко видеть, что АФЧХ  $W_\tau(j\omega)$  отличается от АФЧХ  $W(j\omega)$  только сдвигом по фазе на  $-j\omega$ .

**Пример 12.** Найти граничные значения  $\tau_0$  для чистого запаздывания в замкнутой системе с ПФ  $W(s) = \frac{6e^{-\tau s}}{s(s+1)}$ .



Решение

$$W(j\omega) = \frac{6}{-\omega + j\omega} \quad |W(j\omega)| = \frac{6}{\sqrt{\omega^4 + \omega^2}} = 1$$

$$36 = \omega^4 + \omega^2 \Rightarrow p^2 + p - 36$$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{145}}{2} \quad p_1 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{2} \quad \omega = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{145}}{2}}$$

Найдем  $\tau_0$  по формуле  $-\arctg(\omega) - \omega \cdot \tau_0 = -\pi$

$$\tau_0 = \frac{\arctg(\omega) - \pi}{-\omega} = \frac{\operatorname{arccctg}(\omega)}{\omega}$$

**Ответ:**  $\omega = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{145}}{2}}, \quad \tau_0 \approx 0,4$

### 3.5 Понятие грубости (робастности) САУ

Любая реальная САУ подвержена различным воздействиям, которые могут опускаться при исследовании из-за их незначительности. К ним относятся старение/разрушение, повреждения, погрешности измерений параметров ОУ и прочее. Это приводит к необходимости требования от САУ грубости (робастности), т.е. чтобы САУ работала не только при конкретно данных значениях параметров ОУ, но и при всех предполагаемых/возможных значениях.

**Определение 35.** Пусть дано  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$  — множество возможных значений коэффициентов полинома  $\alpha(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i s^i$ ,  $a = (\alpha_n, \dots, \alpha_0)$ . Полином  $\alpha(s)$  называется *робастно устойчивым* в  $\mathcal{A}$ , если он устойчив для любого  $a \in \mathcal{A}$ .

**Теорема 9** (Необходимое условие устойчивости для робастной устойчивости.). *Все значения коэффициентов полинома  $\alpha(s)$  из множества  $\mathcal{A}$  должны быть одного знака (в данном изложении — больше нуля).*

### 3.5.1 Критерий Харитонова

Пусть множество  $\mathcal{A}$  является параллелепипедом в  $\mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ :

$$\mathcal{A} = \{a : \underline{a}_i \leq \alpha_i \leq \overline{a}_i, i = 0, \dots, n\}.$$

Здесь  $\underline{a}_i$  и  $\overline{a}_i$  — Максимальное и минимальное значения коэффициента  $\alpha_i$  ( $i = 0, \dots, n$ )

**Теорема 10** (Критерий Харитонова). *Полином  $\alpha(s)$  робастно устойчив в  $\mathcal{A}$  тогда и только тогда, когда устойчивы все полиномы Харитонова:*

1.  $k_1(s) = \overline{a}_n s^n + \underline{a}_{n-1} s^{n-1} + \underline{a}_{n-2} s^{n-2} + \dots$
2.  $k_2(s) = \overline{a}_n s^n + \overline{a}_{n-1} s^{n-1} + \underline{a}_{n-2} s^{n-2} + \dots$
3.  $k_3(s) = \underline{a}_n s^n + \overline{a}_{n-1} s^{n-1} + \overline{a}_{n-2} s^{n-2} + \dots$
4.  $k_4(s) = \underline{a}_n s^n + \underline{a}_{n-1} s^{n-1} + \overline{a}_{n-2} s^{n-2} + \dots$

*Доказательство.* Так как по определению робастной устойчивости характеристический полином должен быть устойчивым при всех значениях  $\alpha \in \mathcal{A}$ , то должны быть устойчивыми и полиномы Харитонова как характеристические полиномы, соответствующие четырем различным значениям  $\alpha$  из множества  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Пример 13.** Исследовать на робастную устойчивость полином  $\alpha(s) = s^4 + \alpha_3 s^3 + 2s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$  в области  $1 \leq \alpha_3 \leq 4, 2 \leq \alpha_1 \leq 3, 3 \leq \alpha_0 \leq 5$ .

*Решение*

В данном случае

$$\mathcal{A} = \{\alpha : \alpha_0 = 1, 2 \leq \alpha_1 \leq 3, \alpha_2 = 2, 1 \leq \alpha_3 \leq 4, \alpha_4 = 1\}$$

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_0 = \overline{\alpha}_0 = 1, \underline{\alpha}_1 = 2, \overline{\alpha}_1 = 3, \underline{\alpha}_2 = \overline{\alpha}_2 = 2, \\ \underline{\alpha}_3 = 1, \overline{\alpha}_3 = 4, \underline{\alpha}_4 = \overline{\alpha}_4 = 1 \end{aligned}$$

Так как  $n = 4$ , то необходимо и достаточно, чтобы были устойчивы полиномы Харитонова  $k_1(s)$  и  $k_2(s)$ .

Таким образом имеем:

$$\begin{aligned}
k_1(s) &: \overline{\alpha_4}, \underline{\alpha_3}, \underline{\alpha_2}, \overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_0}, \\
k_2(s) &: \overline{\alpha_4}, \overline{\alpha_3}, \underline{\alpha_2}, \underline{\alpha_1}, \overline{\alpha_0}, \\
k_1(s) &= s^4 + s^3 + 2s^2 + 3s + 1, \\
k_2(s) &= s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 2s + 1.
\end{aligned}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Необходимое условие устойчивости для обоих полиномов выполняется. По критерию Ляпунова-Шипара для  $n = 4$   $\Delta_3 > 0$ .

Проверим для  $k_1(s)$  и  $k_2(s)$ :

$$\begin{aligned}
k_1(s) : \Delta_3 &= 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (0) = -3, \\
k_2(s) : \Delta_3 &= 2 \cdot 6 - 1 \cdot 6 = 12 - 6 = 6.
\end{aligned}$$

Полиномы  $k_1(s)$  и  $k_2(s)$  являются неустойчивыми, значит полином  $\alpha(s)$  неустойчив

**Пример 14.** Исследовать на робастную устойчивость:

$$W = \frac{b_0 s + b_1}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}$$

$$\begin{aligned}
3 \leq \alpha_1 \leq 4, & & 10 \leq \alpha_2 \leq 15, \\
0,5 \leq \alpha_3 \leq 1, & & b_0 = 2, \\
1,2 \leq \alpha_4 \leq 1,4, & & b_1 = -1.
\end{aligned}$$

*Решение*

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$\alpha(s) = e_0 s^4 + e_1 s^3 + e_2 s^2 + e_3 s + e_4,$$

где  $e_0 = 1$ ,  $e_1 = \alpha_1$ ,  $e + 2 = \alpha_2$ ,  $e_3 = \alpha_3 + b_0$ ,  $e_4 = \alpha_4 + b_1$

Таким образом имеем:

$$\begin{aligned}\underline{e_0} = \overline{e_0} = 1, \quad \underline{e_1} = 3, \quad \overline{e_1} = 4, \quad \underline{e_2} = 10, \quad \overline{e_2} = 15, \\ \underline{e_3} = 2,5, \quad \overline{e_3} = 3, \quad \underline{e_4} = 0,2, \quad \overline{e_4} = 0,4\end{aligned}$$

Так как  $n = 4$ , то необходимо и достаточно, чтобы были устойчивы полиномы Харитонова  $k_1(s)$  и  $k_2(s)$ :

$$\begin{aligned}k_1(s) &= s^4 + 3s^3 + 10s^2 + 3s + 0,4 \\ k_2(s) &= s^4 + 4s^3 + 10s^2 + 2,5s + 0,4\end{aligned}$$

По критерию Лъенара-Шипара проверим  $\Delta_3$ :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0,4 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0,4 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3 = 3 \cdot 30 - 3 \cdot 0 = 90 > 0$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 2,5 & 4 & 0 & 0 \\ 0,4 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 2,5 & 4 & 0 \\ 0 & 0,4 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3 = 2,5 \cdot 40 - 4 \cdot 1,6 = 93,6 > 0$$

Так как полиномы Харитонова устойчивы, то замкнутая система робастно устойчива.

## Глава 4

# Стабилизация линейных систем

### 4.1 Полиномиальная стабилизация (метод полиномиальных уравнений)

Данный метод стабилизации предполагает представление непрерывной части в виде дискретной модели. При этом вся система считается чисто дискретной, что позволяет применять для стабилизации регуляторов хорошо разработанные методы теории дискретных систем. Регулятор представляется в виде отношения полиномов (цифровой фильтр), параметры которого предстоит найти. Поиск параметров осуществляется на основе данных о желаемом расположении полюсов дискретной системы (задача размещения полюсов), которые, как известно, определяют качество переходного процесса. В простых случаях, когда порядок регулятора невелик, применимы графоаналитические методы, однако более универсальными являются методы поиска решения полиномиального уравнения. [5, стр. 98]

Пусть дана замкнутая система с регулятором  $R(s) = \frac{\phi(s)}{\psi(s)}$  в отрицательной обратной связи. Для решения задачи полиномиальной стабилизации воспользуемся следующей теоремой

**Теорема 11.** Если для системы с ПФ  $W(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$  выполнены условия

1. НОД  $(\beta, \alpha) = 1$ ,

2.  $m = \deg \beta < \deg \alpha = n$ ,

тогда для любого полинома  $\gamma(s)$ ,  $\deg \gamma(s) \geq n + m - 1$  существуют полиномы  $\psi(s)$  и  $\phi(s)$ , такие что  $\gamma(s) = \alpha(s)\psi(s) + \beta(s)\phi(s)$ . При этом обеспечивается грубость замкнутой системы (не происходит сокращения степеней в хар. пол-ме).

*Доказательство.* [7, стр. 78-79]

**Следствие 1.** Если  $\deg \gamma = 2n - 1$ , тогда найдутся полиномы со степенями  $\deg \psi = n - 1$ ,  $\deg \phi \leq n - 1$  (нестрого физически реализуемый регулятор).

**Следствие 2.** Если  $\deg \gamma = 2n$ , тогда найдутся полиномы со степенями  $\deg \psi = n$ ,  $\deg \phi \leq n - 1$  (строго физически реализуемый регулятора).

**Пример 15.** Дана система с ПФ  $W(s) = \frac{s-1}{s^2+3s-2}$ . Синтезировать (построить) регулятор методом полиномиальной стабилизации с характеристическим полиномом замкнутой системы  $\gamma(s) = s^3 + 2s^2 + s + 1$ .

*Решение* Пусть  $W(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$ , тогда

$$m = \deg \beta = 1 \quad n = \deg \alpha = 2$$

так как  $m < n$ , то для полинома  $\gamma(s)$ ,

$$\deg \gamma(s) \geq n + m - 1$$

существуют полиномы  $\psi(s)$  и  $\varphi(s)$ , что  $\gamma(s) = \alpha(s) \cdot \psi(s) + \beta(s) \cdot \varphi(s)$ . т.к.  $\deg \gamma(s) = 2n - 1$ , то регулятор является нестрогим физически реализуемым (следствие 2) и

$$\deg \psi = n - 1, \quad \deg \varphi \leq n - 1.$$

Положим, что  $\varphi(s) = \varphi_1 \cdot s + \varphi_0$ ,  $\psi(s) = s + \psi_0$  и  $R(s) = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$ . Тогда

$$(s^2 + 3s - 2)(s + \psi_0) + (s - 1)(\varphi_1 s + \varphi_0) = s^3 + 2s^2 + s + 1, \quad \forall s$$

$$s^3 + (3 + \psi_0 + \varphi_1)s^2 + (3\psi_0 - 2 - \varphi_1 + \varphi_0)s + (-2\psi_0 - \varphi_0) = s^3 + 2s^2 + s + 1$$

$$\begin{cases} 3 + \psi_0 + \varphi_1 = 2 \\ 3\psi_0 - 2 - \varphi_1 + \varphi_0 = 1 \\ -2\psi_0 - \varphi_0 = 1 \end{cases}$$

Отсюда

$$\psi_0 = \frac{3}{2} \quad \varphi_1 = -\frac{5}{2} \quad \varphi_0 = -4$$

то есть

$$R(s) = \frac{5s + 8}{3 - 2s}$$

**Пример 16.** Дана система с ПФ  $W(s) = \frac{s}{s^2 + s - 1}$ . Синтезировать (построить) регулятор методом полиномиальной стабилизации с характеристическим полиномом замкнутой системы  $\gamma(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1$ .

*Решение*

$$W(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$$

$$\deg \beta(s) = m = 1; \quad \deg \alpha(s) = n = 2$$

так как  $m < n$ , тогда для полинома  $\gamma(s)$

$$\deg \gamma(s) \leq n + m$$

существуют полиномы  $\psi(s)$  и  $\varphi(s)$ , что  $\gamma(s) = \alpha(s) \cdot \psi(s) + \beta(s) \cdot \varphi(s)$ . Положим, что  $R(s) = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$ .

Так как  $\deg \gamma(s) = 2n$ , то регулятор является строго физически реализуемым и  $\deg \psi(s) = n = 2$ ,  $\deg \varphi \leq n - 2 \Rightarrow \deg \varphi \leq n - 1$ .

Положим, что  $\varphi(s) = \varphi_1 \cdot s + \varphi_0$ ,  $\psi(s) = s + \psi_0$  и  $R(s) = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$ . Тогда

$$(s^2 + s - 1)(\psi_1 \cdot s^2 + \psi_2 \cdot s + \psi_0) + s \cdot (\varphi_1 \cdot s + \varphi_0) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1, \text{ следовательно,}$$

$$\begin{cases} \psi_1 = 1 \\ \psi_2 + \psi_1 = 3 \\ \psi_0 + \psi_2 - \psi_1 + \varphi_1 = 4 \\ \psi_0 - \psi_2 + \varphi_0 = 3 \\ -\psi_0 = 1 \end{cases}$$

Отсюда получим

$$\psi_0 = -1, \quad \psi_1 = 1, \quad \psi_2 = 2, \quad \varphi_0 = 6, \quad \varphi_1 = 4,$$

то есть

$$R(s) = \frac{4s + 6}{s^2 + 2s - 1}.$$

## 4.2 Управляемость и наблюдаемость

При решении задач управления методами пространства состояний предварительно рассматриваются некоторые свойства динамических систем, которые однозначно характеризуют возможности использования известной модели ДС для управления объектом. Такими свойствами являются управляемость и наблюдаемость<sup>1</sup>. Наличие этих свойств у объектов управления позволяет синтезировать управление с помощью простых математических операций. [5, стр. 62]

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), \\ y = h(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $x(t)$  — состояние системы,  $u(t)$  — вход/управление,  $y(t)$  — выход,  $f$  и  $h$  — некоторые функции.

---

<sup>1</sup>См. [3, стр. 269]



**Определение 36.** Система (4.1) называется *управляемой*, если для любого момента  $t_1$  и точки фазового пространства  $x_1$  найдется управление  $u(t)$ , определенное на отрезке  $[0, t_1]$ , такое что для решения  $x(t)$  системы (4.1) выполнено:  $x(t_1) = x_1$  при условии, что  $x(0) = 0$ .

**Определение 37.** Система (4.1) называется *наблюдаемой*, если при  $u \equiv 0$  для любого начального момента  $t_0$  из условия  $y(t) \equiv 0$  при  $t \geq t_0$  следует  $x(t_0) = 0$  и, наоборот, из  $x(t_0) = 0$  следует  $y(t) \equiv 0$  при  $t \geq t_0$ .

#### 4.2.1 Управляемость линейных объектов. Критерий управляемости

Пусть матрицы  $A$  и  $B$  постоянны. Введем в рассмотрение матрицу управляемости для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.2)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Имеет место следующая

**Теорема 12** (Критерий управляемости). *Линейный объект (4.2) управляем тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\text{rg } K_{A,b} = n,$$

где

$$K_{A,b} = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ — матрица управляемости}$$

*Доказательство.* [4, стр. 308-311]

##### Программное управление

Из доказательства критерия управляемости было получено [4, стр. 311], что управление вида

$$u(t) = b^T e^{A^T(t_1-t)} W^{-1}(t_1) x_1$$

переводит систему за время  $t_1$  в состояние  $x_1$  из состояния  $x_0 = 0$ . Это пример *программного управления*, когда в системе нет обратной связи, по состоянию объекта или по выходу.

Как перевести систему из произвольного состояния  $x_0$  в  $x_1$ ?

Используя идею аналогичную идеи из доказательства, получим управление вида

$$u(t) = b^T e^{A^T(t_1-t)} W^{-1}(t_1)(x_1 - e^{At_1} x_0).$$

## 4.2.2 Модальное управление

**Определение 38.** *Модальное управление* — это управление, в котором цель управления достигается за счет назначения корней характеристического полинома ЗАМКНУТОЙ системы. Здесь под целью управления имеется в виду настройка начальной фазы работы САУ или, строго говоря, *переходного режима*. Позже будут рассмотрены различные характеристики переходного режима.

Модальное управление *по состоянию* имеет вид

$$u = -kx,$$

где  $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  — вектор коэффициентов обратной связи. В результате замыкания получим замкнутую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - bk)x, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

**Теорема 13.** Пусть пара  $\{A, b\}$  — управляема и задан полином  $\gamma(s)$ . Тогда существует вектор  $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , такой что  $\sigma(A - bk) = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , где  $s_i$  — корни  $\gamma(s)$ .

**Утверждение 1** (Каноническая форма управляемости). Для любой управляемой системы (4.2) найдется матрица  $M$ , такая что  $|M| \neq 0$  и для

$z = Mx$  выполнено  $\dot{z} = \hat{A}z + \hat{b}u$ , где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### Алгоритм построения вектора $k$

1. Вычислить коэффициенты полинома  $\gamma(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i)$ ;
2. Вычислить  $K_{A,b}$  ( $|K_{A,b}| \neq 0$ , если система управляема);
3. Найти  $\chi_A(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$ ;
4. Вычислить  $K_{\hat{A}, \hat{b}}, \{\hat{A}, \hat{b}\}$  — каноническая форма управляемости;
5. Перемножить  $M = K_{\hat{A}, \hat{b}} K_{A,b}^{-1}$ ;
6. Вычесть  $\hat{k}_i = \gamma_{i-1} - \alpha_{i-1}, i = \overline{1, n}$ ;
7. Умножить:  $k = \hat{k}M$ ;
8. Записать  $u = -kx$ .

**Пример 17.** Синтезировать модальное управление  $u = -kx$ ,  $k = (k_1 \ k_2)$  со спектром  $\{-1, -2\}$  для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} u. \end{cases}$$

*Решение*

$$\gamma(s) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

$$K_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix},$$

так как  $|K_{A,B}| = 3 \neq 0$ , то система управляема

$$X_{A(s)} = \left| s \cdot I - A \right| = \begin{vmatrix} s - 2 & -1 \\ 1 & s - 3 \end{vmatrix} = (s - 2)(s - 3) + 1 = s^2 - 5s + 7$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_{\hat{A}, \hat{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M = K_{\hat{A}, \hat{B}} \cdot K_{A, B}^{-1}$$

$$K_{A, B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{|k_{A, B}|} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}$$

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -11 & 13 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

$$\hat{k}_i = \gamma_{i-1} - \alpha_{i-1}, \quad i = \overline{1 \dots n}$$

$$\hat{k}_1 = 2 - 7 = 5 \quad \hat{k}_2 = 3 + 5 = 8$$

$$k = \hat{k} \cdot M$$

$$k = \begin{pmatrix} -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -11 & 13 \end{pmatrix} \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} -36 & 43 \end{pmatrix}$$

$$u = -kx$$

$$\text{Ответ: } u = \begin{pmatrix} -36 & 43 \end{pmatrix} x.$$

### 4.3 Стабилизация по выходу. Наблюдаемость и наблюдатель.

**Определение 39.** Стабилизация по выходу — задача стабилизации, при которой необходимо стабилизировать данную систему, если известен измеряемый выход  $y(t)$ , зависящий от состояния  $x(t)$ . Система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = cx \end{cases} \quad (4.3)$$

Для линейной системы (4.3) при  $u \equiv 0$  Определение 37 эквивалентно следующему.

**Определение 40.** Система (4.3) называется *наблюдаемой*, если для любых начальных условий  $x_1 \neq x_0$  следует, что  $y(x_1, t) \neq y(x_0, t)$ .

Для того чтобы различить по выходу  $y(t)$  начальное состояние  $x(t)$  необходимо ввести понятие наблюдателя.

**Определение 41.** Наблюдатель — динамическая система, которая позволяет оценить (различить) по выходу  $y(t)$  начальное состояние  $x(t)$ .

Выходом наблюдателя является оценка  $\tilde{x}(t)$  реального состояния системы  $x(t)$ , т.е.  $|x(t) - \tilde{x}(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Наблюдатель можно строить в различных формах. Например, самая общая форма линейного наблюдателя имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = H\tilde{x} + h_y y + h_u u,$$

где  $y$  и  $u$  — известные величины, а  $\tilde{x}(t)$  — оценка состояния системы.

### 4.3.1 Критерий наблюдаемости для линейных систем.

**Теорема 14** (Критерий наблюдаемости). Система (4.3) наблюдаема тогда и только тогда, когда  $\text{rg } N_{C,A} = n$ , где

$$N_{C,A} = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ — матрица наблюдаемости}$$

*Доказательство.* [4, стр. 315-318] □

### 4.3.2 Наблюдатель Люенбергера

Так как матрицы  $A$ ,  $b$  и  $c$  известны, то их можно использовать при построении наблюдателя. Например, наблюдатель

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + bu$$

дает оценку только для устойчивых систем. Запишем уравнение для ошибки  $e(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ , вычитая из уравнения наблюдателя уравнение объекта (4.3):

$$\dot{e} = Ae.$$

Из устойчивости матрицы  $A$  получим  $e(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Отсюда видно, что скорость сходимости ошибки к нулю определяется целиком исходным объектом.

Если же система неустойчива, либо есть требование к скорости сходимости оценки, то рассмотренный наблюдатель не подходит.

Классическим наблюдателем является наблюдатель Люенбергера<sup>2</sup> вида

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + l(y - c\tilde{x}) + bu,$$

где  $y = cx$ ,  $l \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  — вектор параметров.

Снова записав уравнение для ошибки, получим

$$\dot{e} = Ae - l \cdot c \cdot e = A_l e,$$

где  $A_l = A - l \cdot c$ . Для последней матрицы возможен выбор произвольного желаемого спектра за счет выбора вектора  $l$  (при условии, что исходная система наблюдаема).

## 4.4 Теорема существования наблюдателя Люенбергера

**Теорема 15.** Пусть система (4.3) наблюдаема и задан спектр  $\Gamma = \{s_1, \dots, s_n\}$  — корни полинома  $\gamma(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i s^i$ . Тогда существуют  $l \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , такой что  $\sigma(A - l \cdot c) = \Gamma$ .

---

<sup>2</sup>См. [6, стр. 119]

**Утверждение 2** (Каноническая форма наблюдаемости). Для любой наблюдаемой системы (4.3) найдется матрица  $M$ , такая что  $|M| \neq 0$  и для  $z = Mx$  выполнено  $\dot{z} = \hat{A}z + \hat{b}u$ , где

$$\hat{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{c} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Пусть

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ y = Cx, & C \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{cases}$$

Из условия, что  $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow y(t_i, x_1) \neq y(t_i, x_2)$ , где  $y(t_i, x_k)$  — выход по  $x_k$ , мы можем сделать вывод:  $\text{rang } N_{C,A} = n$ .

По формуле Коши получаем, что  $\dot{x} = Ax \Rightarrow x(t) = e^{At}x_0$  и  $y(t) = e^{At}x_0C$

Докажем от противного:

Пусть  $\text{rang } N_{C,A} < n$ . Тогда  $\exists \vec{v} \neq 0 : N_{C,A} \cdot \vec{v} = 0$ .

По теореме Гамильтона-Келли:

$$A^q = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^q \cdot A^i, \quad q \geq 0, \quad C \cdot A^q \cdot v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^q \cdot C \cdot A^i \cdot v = 0, \quad (4.4)$$

где  $\alpha_i^q$  — коэффициент с двойной индексацией

Из (4.4) следует, что

$$C \cdot v = 0,$$

$$C \cdot A \cdot v = 0,$$

$$C \cdot A^{n-1} \cdot v = 0.$$

Выберем  $x_1 = 0, x_2 = v$ . Тогда

$$y(t, v) = C \cdot e^{At} \cdot x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C \cdot A^i \cdot v \cdot t^i}{i!}. \quad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что

$$\left. \begin{aligned} y(t, 0) &= 0, \\ y(t, v) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C \cdot A^i \cdot v \cdot t^i}{i!} = 0, \end{aligned} \right| \Rightarrow \text{rang } N_{C, A} = n.$$

Докажем в обратную сторону: если  $\text{rang } N_{C, A} = n$ , то система наблюдаема

Пусть  $x_1 \neq x_2$  и  $y(t_i, x_1) = y(t_i, x_2)$ . Тогда

$$0 = y(t_i, x_1) - y(t_i, x_2) = C \cdot e^{At} \cdot x_1 - C \cdot e^{At} \cdot x_2 = C \cdot e^{At} \cdot v,$$

где  $v = x_1 - x_2$  и  $v \neq 0$ . Тогда

$$C \cdot e^{At} \cdot v = 0 \quad \forall t \in [0; +\infty)$$

После дифференцирования  $n - 1$  раз получаем:

$$\begin{aligned} C \cdot A \cdot e^{At} \cdot v &= 0, \\ C \cdot A^2 \cdot e^{At} \cdot v &= 0, \\ &\dots \\ C \cdot A^{n-1} \cdot e^{At} \cdot v &= 0 \end{aligned}$$

при  $t = 0$

$$\begin{aligned} C \cdot A \cdot v &= 0, \\ C \cdot A^2 \cdot v &= 0, \\ &\dots \\ C \cdot A^{n-1} \cdot v &= 0. \end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$N_{C, A} \cdot v = 0 \Rightarrow \text{rang } N_{C, A} < n,$$

что противоречит условию  $\text{rang } N_{C, A} = n$ , следовательно, система наблюдаема.  $\square$



### Алгоритм построения вектора $l$

1. Вычислить коэффициенты полинома  $\gamma(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i)$ ;
2. Вычислить  $N_{C,A}$  ( $|N_{C,A}| \neq 0$ , если система наблюдаема);
3. Найти  $\chi_A(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$ ;
4. Вычислить  $N_{\hat{c},\hat{A}}, \{\hat{c}, \hat{A}\}$  — каноническая форма наблюдаемости;
5. Перемножить  $M^{-1} = N_{c,A}^{-1}N_{\hat{c},\hat{A}}$ ;
6. Вычесть  $\hat{l}_i = \gamma_{i-1} - \alpha_{i-1}, i = \overline{1, n}$ ;
7. Умножить:  $l = M^{-1}\hat{l}$ ;
8. Записать  $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + l(y - c\tilde{x}) + bu$

**Пример 18.** Синтезировать наблюдатель Люенбергера со спектром  $\{-1, -2\}$  для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} u, \\ y = (1 \quad -2)x \end{cases}.$$

*Решение*

1. Вычислим полином  $\gamma(s)$ :

$$\gamma(s) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

2. Вычислим  $N_{C,A}$ :

$$N_{C,A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \text{ так как } |N_{C,A}| = -7 \text{ и } |N_{C,A}| \neq 0, \text{ то система наблюдаема}$$

3. Найдем  $\chi_A(C) = |SI - A| = \begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ -1 & s-3 \end{vmatrix} = (s-2)(s-3) + 1 = s^2 - 5s + 7$ .

4. Вычислим  $N_{\hat{C}, \hat{A}}$

Для этого вычислим  $\hat{C} : \hat{C} = (10)$  и  $\hat{A} :$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow N_{\hat{C}, \hat{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

5. Получим матрицу  $M^{-1}$ :  $M^{-1} = N_{C,A}^{-1} \cdot N_{\hat{C}, \hat{A}}$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-7} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислим вектор  $l$ :

$$\begin{aligned} \hat{l}_i &= p_{i-1} - \alpha_{i_1}, \quad i = \overline{1 \dots n}, \\ \hat{l}_1 &= p_0 - \alpha_0 = -5, \\ \hat{l}_2 &= p_1 - \alpha_1 = -8. \end{aligned}$$

7. Вычислим  $l$ :

$$l = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

8. Выпишем ответ:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \tilde{x} + \begin{pmatrix} -13 \\ -8 \end{pmatrix} \left( y - \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \tilde{x} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} u.$$

## 4.5 Модальное управление по выходу. Принцип разделения задач стабилизации и наблюдения

После того, как была получена оценка состояния, можно надеяться, что управление вида

$$u = -k\tilde{x}, \tag{4.6}$$

где  $\tilde{x}(t)$  — оценка состояния  $x(t)$ , будет обладать стабилизирующей способностью рассмотренного ранее модального управления по состоянию.

Вопрос: решает ли задачу стабилизации управление (4.6)?

Выпишем подробно замкнутую систему, которая получается в результате подстановки такого управления. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = cx, \\ \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + l(y - c\tilde{x}) + bu, \\ u = -k\tilde{x}. \end{cases}$$

После подстановок:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - bk\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{x}} = lc\tilde{x} + (A - bk - lc)\tilde{x}. \end{cases}$$

Последняя система удобно переписывается в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} A & -bk \\ lc & A - bk - lc \end{pmatrix}}^{\bar{A}} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что характеристический полином замкнутой системы с наблюдателем равен  $z(s) = |sI_{2n} - \bar{A}| = |sI_n - (A - bk)| |sI_n - (A - lc)|$ . Заметим, что  $\deg z = 2n$ .

Это наблюдение включает в себе *принцип разделения задач стабилизации и наблюдения* — их можно выполнять независимо друг от друга.

Весь алгоритм состоит из двух этапов, рассмотренных ранее: построение наблюдателя и построение модального управления по состоянию.

Пусть требуется присвоить замкнутой системе характеристический полином  $\gamma_1(s)$ , используя наблюдатель Люенбергера с характеристическим полиномом  $\gamma_2(s)$ .

1. Построить для полинома  $\gamma_1(s)$  модальное управление (найти вектор  $k$ );
2. Построить наблюдатель Люенбергера для полинома  $\gamma_2(s)$ ;
3. Выписать наблюдатель и модальное управление (это ответ).

## Глава 5

# Качество непрерывных систем управления

### 5.1 Показатели качества и типовые воздействия

Оказывается, рассмотренного ранее свойства устойчивости САУ недостаточно для описания качества его работы (точности, скорости и пр.). Например, в механических системах наличие колебаний (напр. качание деталей) ускоряет износ частей САУ, которые участвуют в этом движении. Устойчивость тоже иногда нуждается в оценке: насколько быстро система оказывается в заданном режиме.

Наиболее полной характеристикой качества САУ является ошибка регулирования

$$e(t) = g(t) - y(t).$$

Зачастую при практической реализации есть определенные пожелания к виду (или поведению) этой функции, которые так или иначе могут быть сформулированы в виде математических выражений. Существует набор так называемых *показателей качества* — это числовые показатели, характеризующие определенную часть работы системы. Эти показатели вычисляются **только** для устойчивых систем.

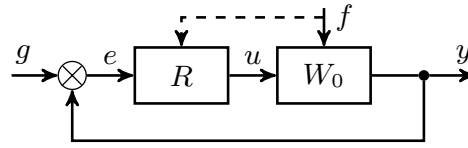


Рис. 5.1: Типовая система

На рисунке 5.1:  $W_0(s)$  — ПФ объекта управления,  $R(p)$  — регулятор,  $p = \frac{d}{dt}$ ,  $f(t)$  — возмущение. Имеем  $y(t) = W_{yg}(p)g(t) + W_{yf}(p)f(t)$ , где  $W_{yf}(s)$  — ПФ от возмущения к выходу. Тогда при задающем воздействии равном функции Хевисайда  $\chi(t)$  ошибка имеет вид

$$e(t) = W_{eg}(p)\chi(t) + W_{ef}(p)f(t),$$

где  $W_{eg}(p) = 1 - W_{yg}$  — ПФ от задающего воздействия к ошибке и  $W_{ef} = -W_{yf}$  — ПФ от возмущения к ошибке.

В результате ошибка представима в виде

$$e(t) = e_g(t) + e_f(t),$$

где  $e_g(t) = W_{eg}(p)g(t)$ ,  $e_f(t) = W_{ef}(p)f(t)$ . Показатели качества, естественно, исследуют отдельно по задающему воздействию и по возмущению.

Еще одним аспектом различения показателей качества является режим работы САУ. Выделяют переходный режим и установившийся режим. Из курса ОДУ известно, что выход системы можно представить в виде

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{вын}}(t),$$

на которое опирается введение терминов в ТАУ

$$y(t) = y_{\text{пр}}(t) + y_{\infty}(t),$$

где  $y_{\text{пр}}(t)$  содержит в себе, как слагаемые,  $y_{\text{св}}(t)$  и часть из  $y_{\text{вын}}(t)$ ,  $y_{\infty}(t)$  целиком содержится в  $y_{\text{вын}}(t)$ .

*Комментарий.* Понять последнее удобнее всего на ОДУ, например, второго порядка с правой частью равной 1. Тогда  $y_{\infty}(t) = \text{const}$ , а все остальное в решении будет переходной составляющей  $y_{\text{пр}}(t)$ . Если входное воздействие не константа, а гармонический сигнал, входное решение ОДУ также может быть разбито на составляющие без особого труда, если вспомнить о свойствах линейного звена при прохождении сквозь него гармонического сигнала.

*Показатели качества в переходном режиме* строятся при *типовом внешнем воздействии*  $g(t) = A \cdot \chi(t)$  — функция Хевисайда, где  $A = \text{const}$ . Обычно полагают  $A = 1$ .

*Показатели качества в установившемся режиме* строятся при типовых воздействиях вида  $A \cdot \chi(t)$ ,  $At$ ,  $At^2$ , ....

И те и другие показатели рассматриваются при нулевых начальных условиях. Перейдем к рассмотрению показателей качества в переходном режиме.

### 5.1.1 Прямые показатели качества

Ошибка при ступенчатом воздействии (step response) имеет вид

$$e(t) = 1(t) - h(t),$$

где  $h(t)$  — переходная функция. Из-за простой связи  $h(t)$  и  $e(t)$  показатели качества определяют по  $h(t)$ .

**Определение 42.** Прямыми показателями качества называются показатели, определяемые непосредственно по переходной характеристике.

Определения показателей качества в переходном режиме:

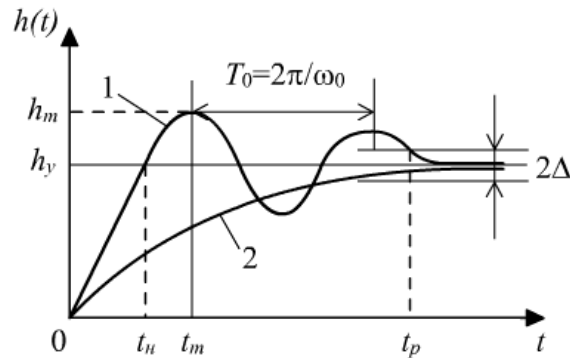


Рис. 5.2: Переходная функция системы

1. *Временем регулирования  $t_p$*  называется время, за которое значение переходной функции  $h(t)$  входит в  $\delta$ -трубку и не выходит из неё, т.е.  $|h(t) - h_\infty| < \delta$  при  $t \geq t_p$ , где  $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ ,  $\delta$  — заданное число, которое обычно полагают 5-10% от  $|h_\infty|$ ;
2. *Временем нарастания  $t_n$*  называется время, через которое значение переходной функции впервые становится равным  $h_\infty$ ;
3. *Перерегулированием  $\sigma$*  называют число, равное

$$\sigma = \left| \frac{h_m - h_\infty}{h_\infty} \right| \cdot 100\%,$$

где  $h_m$  — максимальное значение, принимаемое  $h(t)$ .

В частности, возможно, что  $h_\infty = 0$ , тогда перерегулирование определяется формулой  $\sigma = \frac{y_m}{A} \cdot 100\%$ , где  $y_m$  — максимальное значение выхода при возмущении  $f(t) = A \cdot \chi(t)$ ;

4. *Числом колебаний  $N_k$*  называют количество полных колебаний  $h(t)$  за время регулирования.

### 5.1.2 Косвенные показатели качества (корневые)

*Косвенными показателями качества* называются показатели, определяемые не по переходной функции.

К *корневым показателям* качества относят *степень колебательности*  $\mu$  и *степень устойчивости*  $\eta$ :

1.  $\eta = \min_j |\operatorname{Re} s_j| = -\max_j \operatorname{Re} s_j$ , где  $s_j$  — корни характеристического полинома САУ;

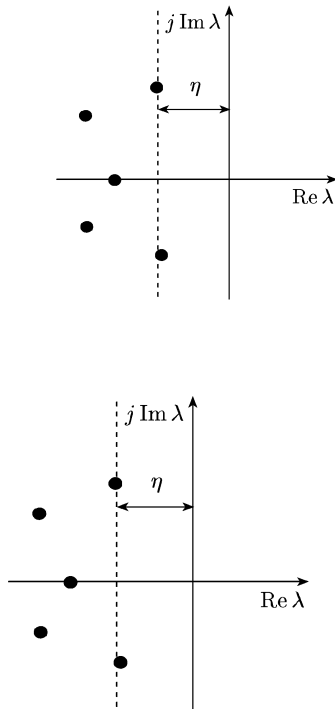
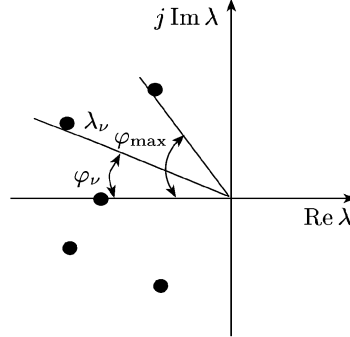


Рис. 5.3: Статическая характеристика П-звена

2.  $\mu = \max_j \left| \frac{\operatorname{Im} s_j}{\operatorname{Re} s_j} \right| = \max_j \operatorname{tg} \phi_j$ , где  $\phi_j$  — угол наклона вектора с концом в корне  $s_j$  к отрицательному направлению вещественной оси.





### 5.1.3 Степень устойчивости

Как определить степень устойчивости  $\eta$ , не находя корней? Обычно этот вопрос упрощают до вопроса сравнения данного положительного числа  $c$  с  $\eta$ . Сравнение же можно выполнить, не вычисляя корней полинома.

Рассмотрим полином  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s - c)$ . Корни полинома  $\tilde{\gamma}(s)$  сдвинуты вправо относительно корней  $\gamma(s)$  ровно на  $c$ . Если полином  $\tilde{\gamma}(s)$  остался устойчивым, тогда, очевидно,  $\eta > c$  в противном случае  $\eta \leq c$ .

Пусть  $\tilde{\gamma}(s) = s^n + \tilde{\gamma}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{\gamma}_1s + \tilde{\gamma}_0$ .

Тогда

$$\left. \frac{d^i \tilde{\gamma}}{ds^i} \right|_{s=0} = i! \tilde{\gamma}_i, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

С другой стороны  $\left. \frac{d^i \tilde{\gamma}}{ds^i} \right|_{s=0} = \left. \frac{d^i \gamma(s-c)}{ds^i} \right|_{s=0} = \left. \frac{d^i \gamma(s)}{ds^i} \right|_{s=-c}$ . Поэтому имеем

$$\tilde{\gamma}_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i \gamma(s)}{ds^i} \right|_{s=-c}.$$

**Пример 19.** Пусть  $\gamma(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 3s + 1$ . Сравнить степень устойчивости данного полинома с  $c = 0.5$ .

### 5.1.4 Показатели качества в переходном режиме. Косвенные показатели качества (интегральные)

Представим ошибку в виде

$$e(t) = e_{\pi}(t) + e_{\infty}(t),$$

где  $e_{\pi}(t)$  и  $e_{\infty}(t)$  — переходная и установившаяся составляющие ошибки. Так как в данном случае типовое воздействие  $g(t) \equiv \chi(t)$ , то  $e_{\infty}(t) = \text{const} = 1 - h_{\infty}$ .

Рассмотрим функционал  $J_{20} = \int_0^{\infty} e_{\pi}^2(t) dt$ . Это число называется *интегральной квадратической ошибкой* (оценкой), оно характеризует стремление ошибки  $e_{\pi}(t)$  к нулю, в частности, из  $J_{20} \rightarrow 0$  следует  $\max_{t \in [0, \infty]} |e_{\pi}(t)| \rightarrow 0$ .

Однако, даже при малой оценке  $J_{20}$  возможно, что переходный процесс будет колебательным, поэтому используют *обобщенные интегральные квадратические оценки*.

## 5.2 Интегральные показатели качества

Обобщенными интегральными квадратическими оценками называют функционалы вида

$$J_{2k} = \int_0^{\infty} \left[ e_{\pi}^2(t) + \tau_1^2 \dot{e}_{\pi}^2(t) + \dots + \tau_k^2 e_{\pi}^{(k)2}(t) \right] dt,$$

где  $\tau_i$  — некоторые числа, определяемые в зависимости от требований качества САУ. Смысл этих параметров виден из следующего.

Нетрудно представить  $J_{21} = \int_0^{\infty} [e_{\pi}^2(t) + \tau^2 \dot{e}_{\pi}^2(t)] dt$  в виде

$$J_{21} = \int_0^{\infty} [e_{\pi}(t) + \tau \dot{e}_{\pi}(t)]^2 dt - 2\tau \int_0^{\infty} e_{\pi}(t) \dot{e}_{\pi}(t) dt,$$

где нетрудно видеть  $\int_0^{\infty} e_{\pi}(t) \dot{e}_{\pi}(t) dt = -\frac{1}{2} e_{\pi}^2(0)$ .

Откуда получим, что

$$J_{21} = \int_0^{\infty} [e_{\pi}(t) + \tau \dot{e}_{\pi}(t)]^2 dt + \tau e_{\pi}^2(0).$$

Таким образом, минимум функционала  $J_{21}$  достигается при  $e_{\pi}(t)$ , удовлетворяющем уравнению

$$\tau \dot{e}_{\pi}(t) + e_{\pi}(t) = 0.$$

Можно аналогично получить, что  $J_{2k}$  достигает минимума, если выполнено уравнение

$$\tau_k \overset{(k)}{e}_{\pi}(t) + \dots + \tau_1 \dot{e}_{\pi}(t) + e_{\pi}(t) = 0.$$

### 5.2.1 Вычисление интегральных показателей качества

Для вычисления интегральных оценок удобно использовать равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(i\omega)|^2 d\omega.$$

Тогда

$$J_{20} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_{\pi}(i\omega)|^2 d\omega$$

$$J_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_{\pi}(i\omega)|^2 + \tau_1^2 |\dot{E}_{\pi}(i\omega)|^2 + \dots + \tau_k^2 |\overset{(k)}{E}_{\pi}(i\omega)|^2 d\omega,$$

где  $E_{\pi}(s) = L\{e_{\pi}(t)\}$ ,  $\dot{E}_{\pi}(s) = L\{\dot{e}_{\pi}(t)\}$ ,  $\dots$ .

Так как  $\dot{E}_{\pi}(s) = sE_{\pi}(s) - e_{\pi}(0)$ , то

$$J_{21} = J_{20} + \frac{\tau^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |i\omega E_{\pi}(i\omega) - e_{\pi}(0)|^2 d\omega,$$

где  $e_{\pi}(0)$  находится из свойства преобразования Лапласа  $e_{\pi}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE_{\pi}(s)$ .

Таким образом, вычисление этих оценок связано с вычислением интегралов вида

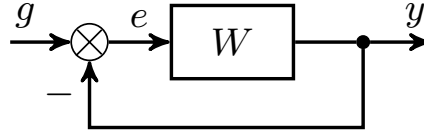
$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{b_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + b_1 i\omega + b_0}{a_n(i\omega)^n + \dots + a_1 i\omega + a_0} \right|^2 d\omega,$$

которые вычисляются с помощью вычетов ТФКП.

Частные случаи:

$$\begin{aligned} n = 1 : \quad I_1 &= \frac{b_0^2}{2a_1 a_0}; \\ n = 2 : \quad I_2 &= \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2a_2 a_1 a_0}; \\ n = 3 : \quad I_3 &= \frac{b_0^2 a_2 a_3 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + b_2^2 a_0 a_1}{2a_3 a_0 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}. \end{aligned}$$

**Пример 20.** Вычислить среднеквадратические ошибки  $J_{20}$  и  $J_{21}$  для системы с ПФ  $W(s) = \frac{3}{0.1s+1}$ ,  $g = \chi(t)$  и  $f = 0$ .



## 5.3 Установившийся режим

### 5.3.1 Показатели качества в установившемся режиме

Вспомним, что в *установившемся режиме* рассматриваются типовые воздействия вида  $A, At, At^2, \dots$ . Тогда в представлении ошибки по задающему воздействию, например, имеем

$$e_g(t) = e_g(t) + e_{g\infty}(t),$$

где интересующая нас функция  $e_{g\infty}(t)$  такова, что для воздействий  $At, At^2, \dots$  не существует конечного предела  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{g\infty}(t)$ . Это связано с тем, что задающее воздействие  $g(t)$  растущая функция. В частности, если выполнено  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{g\infty}(t) = 0$  для  $g(t) = At^r$  и не выполнено для  $g(t) = At^{r+1}$ , тогда говорят, что система обладает  $r$ -м порядком астатизма, т.е. система в установившемся режиме не реагирует (инвариантна) к таким воздействиям.

Сказанное выше также относится и к ошибке по возмущению  $e_f(t)$ .

### 5.3.2 Коэффициенты ошибок в установившемся режиме

ПФ  $W_{eg}(s)$  устойчивой системы можно разложить в ряд Тейлора в правой комплексной полуплоскости

$$W_{eg}(s) = W_{eg}(0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{dW_{eg}(s)}{ds} \right|_{s=0} s + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 W_{eg}(s)}{ds^2} \right|_{s=0} s^2 + \dots$$

в силу аналитичности функции  $W_{eg}(s)$  в некоторой области, содержащей правую полуплоскость с границей (место для медитации). Тогда из равенства

$$E_g(s) = W_{eg}(s)G(s),$$

получим (место для медитации)

$$e_{g\infty}(t) = C_{g0}g(t) + C_{g1}\dot{g}(t) + C_{g2}\ddot{g}(t) + \dots,$$

где  $C_{gi} = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W_{eg}(s)}{ds^i} \right|_{s=0}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

Аналогичное представление верно и для ошибки по возмущению:

$$e_{f\infty}(t) = C_{f0}f(t) + C_{f1}\dot{f}(t) + C_{f2}\ddot{f}(t) + \dots,$$

где  $C_{fi} = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W_{ef}(s)}{ds^i} \right|_{s=0}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

Первые три ошибки имеют свои имена

1.  $C_{g0}$ ,  $C_{f0}$  — коэффициенты позиционной ошибки (по воздействию и возмущению)

2.  $C_{g1}, C_{f1}$  — коэффициенты ошибки по скорости (по воздействию и возмущению)
3.  $C_{g2}, C_{f2}$  — коэффициенты ошибки по ускорению (по воздействию и возмущению)

**Определение 43.** Статической ошибкой называют установившуюся ошибку при единичном ( $g(t) = \chi(t)$ ) входном воздействии.

**Определение 44.** САУ называют статической, если её статическая ошибка отлична от нуля.

**Определение 45.** САУ называют астатической, если её статическая ошибка равна нулю.

**Определение 46.** Говорят, что САУ имеет  $r$ -ый порядок астатизма (по возмущению/воздействию), если первые  $r$  коэффициентов ошибок равны нулю, а  $r + 1$  — не равен.

## 5.4 Астатическая САУ

Пусть система обладает  $r$ -м порядком астатизма по воздействию. Тогда при воздействии  $g(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{r-1} t^{r-1}$  ошибка равна  $e_{g\infty}(t) = 0$ . А для воздействия  $g(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_r t^r$  имеем ошибку  $e_{g\infty}(t) = \text{const}$ .

Кроме того, для такой системы можно вычислять коэффициенты ошибок по формуле

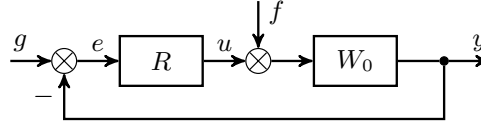
$$C_{gi} = \left. \frac{W_{eg}(s)}{s^i} \right|_{s=0},$$

где  $i = \overline{0, r}$ . Аналогично для коэффициентов по возмущению.

### 5.4.1 Структура астатической по воздействию САУ

Рассмотрим подробнее систему с  $r$ -м порядком астатизма *по воздействию* со следующей структурной схемой:

Тогда  $W_{eg}(s) = s^r \bar{W}_{eg}(s)$ , где  $\bar{W}_{eg}(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$  и  $q(0) \neq 0$ .



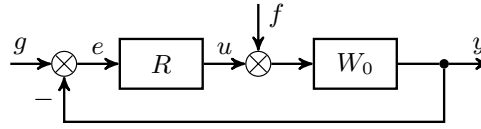
ПФ прямой цепи  $W(s) = W_0(s)R(s)$ , где  $W_0(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$ ,  $R(s) = \frac{\phi(s)}{\psi(s)}$ . Из структурной схемы имеем

$$W_{eg}(s) = \frac{1}{1 + W_0 R} = \frac{\alpha\psi}{\alpha\psi + \beta\phi}$$

откуда следует, что  $\alpha(s)\psi(s) = s^r q(s)$ .

#### 5.4.2 Структура астатической по возмущению САУ

Рассмотрим подробнее систему с  $r$ -м порядком астатизма *по возмущению* со следующей структурной схемой:



Тогда  $W_{ef}(s) = s^r \bar{W}_{ef}(s)$ , где  $\bar{W}_{ef}(s) = \frac{h(s)}{k(s)}$  и  $h(0) \neq 0$ .

По аналогии с предыдущим случаем получим

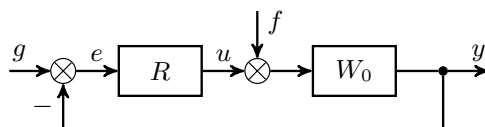
$$W_{ef}(s) = -\frac{W_0}{1 + W_0 R} = -\frac{\beta\psi}{\alpha\psi + \beta\phi}$$

откуда следует, что  $\beta(s)\psi(s) = -s^r h(s)$ .

**Пример 21.** Даны ОУ и регулятор с ПФ вида

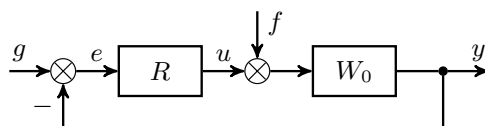
$$W_0(s) = \frac{4}{s(s+1)}, \quad R(s) = \frac{5s+1}{10s}.$$

Задающее воздействие и возмущение имеют вид  $g(t) = 1 + 0.1t$  и  $f(t) = 0.2 + 0.2t$ . Определить установившиеся ошибки  $e_{g\infty}(t)$  и  $e_{f\infty}(t)$ , если система описывается структурной схемой



## 5.5 Синтез САУ с заданным качеством. Пример

**Пример 22.** Для системы, изображенной на структурной схеме с  $W(s) = \frac{10}{s(s+10)}$ , синтезировать регулятор  $R(s) = k$  (П-регулятор), чтобы степень колебательности  $\mu$  системы была равна нулю и интегральная ошибка  $J_{21}$  при  $\tau = 0.5$  была минимальна.



## 5.6 Синтез САУ по желаемой передаточной функции

Во многих случаях синтез САУ с заданным качеством можно свести к синтезу САУ по желаемой передаточной функции  $\tilde{W}(s)$ . Тогда первым шагом производится выбор передаточной функции, которая удовлетворяет требуемому качеству, а затем производится синтез САУ по желаемой ПФ.

Общие требования к замкнутой системе:

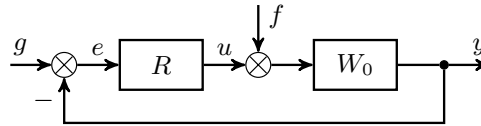
1. физическая реализуемость  $R(s)$  и строгая ф.р.  $\tilde{W}(s)$  ;
2. порядок ПФ  $\tilde{W}(s)$  не меньше ПФ  $W(s)$ ;
3. грубость относительно свойства устойчивости, т.е. устойчивость при малой вариации параметров системы сохраняется.



Рассмотрим следующие требования к качеству САУ:

1. требование к степени устойчивости:  $\eta > c = \text{const}$ ;
2. апериодичность переходного процесса;
3. порядок астатизма равен  $r$  (по воздействию и по возмущению).

### 5.6.1 Постановка задачи



Нетрудно вычислить ПФ замкнутой системы:

$$W_{yg}(s) = \frac{RW_0}{1 + RW_0}. \quad (5.1)$$

Задача. Требуется найти  $R$  такой, что  $W_{yg}(s) = \tilde{W}(s)$  — желаемая ПФ, удовлетворяющая общим требованиям и требованиям к качеству.

Требования к апериодичности и степени устойчивости системы, а также общее требование 2 на порядок разрешаются выбором знаменателя  $\tilde{W}(s) = \frac{\xi(s)}{\gamma(s)}$ . Будем считать, что  $\gamma(s)$  выбран.

### 5.6.2 Исследование

Из (5.1) следует, что

$$\tilde{W}(1 + RW_0) = RW_0 \implies R = \frac{1}{W_0} \frac{\tilde{W}}{1 - \tilde{W}}.$$

Выполнение пункта 3 общих требований в данном случае связано с сокращением неустойчивых нулей и полюсов регулятора и ОУ. Действительно, представим  $W_0(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{\beta^-(s)\beta^+(s)}{\alpha^-(s)\alpha^+(s)}$ , где знаки  $-$  и  $+$  означают устойчивость и неустойчивость корней полиномов. Тогда

$$R(s) = \frac{\alpha^-(s)\alpha^+(s)}{\beta^-(s)\beta^+(s)} \frac{\tilde{W}}{1 - \tilde{W}}.$$

Чтобы сокращений не было, потребуем

$$\tilde{W}(s) = \frac{\beta^+(s)M(s)}{\gamma(s)} \quad \text{и} \quad 1 - \tilde{W}(s) = \frac{\alpha^+(s)N(s)}{\gamma(s)}.$$

Система будет иметь  $r$ -й порядок астатизма по воздействию, если в контуре замкнутой системы расположены  $r$  интегрирующих звеньев, т.е. совокупно в знаменателях регулятора и ОУ содержится  $s^r$ . Учтем, что исходная система может давать вклад в порядок астатизма, если  $\alpha^+(s) = s^{k_\alpha} \alpha^*(s)$ , где  $\alpha^*(0) \neq 0$ . Тогда положив

$$1 - \tilde{W}(s) = \frac{\alpha^+(s)s^{l_g}N(s)}{\gamma(s)}, \quad (5.2)$$

где  $l_g = r - k_\alpha$ , удовлетворим требованию астатизма по воздействию.

Заметим, что

$$W_{ef}(s) = \frac{W}{1 + WR} = \frac{\beta\psi}{\alpha\psi + \beta\phi},$$

где  $\psi$  — знаменатель  $R(s)$ . Очевидно, что астатизм  $r$ -го порядка по возмущению  $f$  достигается, если знаменатель  $R(s)$  содержит член  $s^{l_f} = s^{r-k_\beta}$ , где  $k_\beta : \beta(s) = s^{k_\beta} \beta^*(s)$ ,  $\beta^*(0) \neq 0$ . Таким образом, заменив  $l_g$  на  $l = \max\{l_g, l_f\}$  в (5.2) удовлетворим всем требованиям качества.

Определим вид полученного регулятора. Сложив два выражения

$$\tilde{W}(s) = \frac{\beta^+(s)M(s)}{\gamma(s)} \quad \text{и} \quad 1 - \tilde{W}(s) = \frac{\alpha^+(s)s^l N(s)}{\gamma(s)},$$

получим

$$1 = \frac{\beta^+(s)M(s) + \alpha^+(s)s^l N(s)}{\gamma(s)},$$

откуда

$$\gamma(s) = \beta^+(s)M(s) + \alpha^+(s)s^l N(s). \quad (5.3)$$

В последнем уравнении необходимо подобрать полиномы  $M(s)$  и  $N(s)$ , а точнее определить степени, при которых такие полиномы найдутся. Обозначим  $\deg \alpha^+ = n_{\alpha+}$ ,  $\deg \beta^+ = n_{\beta+}$ ,  $\deg M = n_M$ ,  $\deg N = n_N$ ,  $\deg \gamma = n_\gamma$ ,  $\deg \beta = n_\beta$ ,  $\deg \alpha = n_\alpha$ . Для разрешимости (5.3) достаточно потребовать, чтобы число неизвестных  $(n_M + n_N + 2)$  было больше числа уравнений  $(n_\gamma + 1)$ :

$$\boxed{n_\gamma - 1 \leq n_M + n_N}.$$

Для выполнения требования физической осуществимости  $R(s)$  вида

$$R(s) = \frac{\alpha^-(s)\alpha^+(s)}{\beta^-(s)\beta^+(s)} \frac{\tilde{W}}{1 - \tilde{W}}$$

достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$n_\alpha + n_{\beta+} + n_M \leq n_\beta + l + n_{\alpha+} + n_N \implies$$

$$\boxed{n_M - n_N \leq n_\beta - n_{\beta+} - (n_\alpha - n_{\alpha+}) + l}.$$

Строгая физическая реализуемость  $\tilde{W}(s)$  достигается только тогда, когда степень числителя меньше степени знаменателя, т.е.

$$\boxed{n_\gamma > n_{\beta+} + n_M}.$$

Условие

$$1 - \tilde{W}(s) = \frac{\alpha^+(s)s^l N(s)}{\gamma(s)}$$

выполнено, только если выполнено равенство

$$\boxed{n_\gamma = n_{\alpha+} + l + n_N}.$$

**Пример 23.** ПФ ОУ имеет вид  $W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ . Требования:

1.  $e_\pi(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^{-t}$ .
2.  $e_{g\infty} = 0$ , при  $g = \text{const}$ .
3.  $e_{f\infty} = 0$ , при  $f = \text{const}$ .

# Литература

- [1] Ким Д. П. *Теория автоматического управления. Линейные системы*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 168 с., ISBN 5-9221-0379-2.
- [2] Ким Д. П., Дмитриева Н. Д. *Сборник задач по теории автоматического управления. Линейные системы*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 168 с., ISBN 968-5-9221-0873-7.
- [3] Воронов А. А. *Теория автоматического управления. Часть 1* Н. А. Бабаков, А. А. Воронов, А. А. Воронова и др.; Под ред. А, А., Воронова.—2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986.
- [4] Воронов А. А. *Теория автоматического управления. Часть 2* Н. А. Бабаков, А. А. Воронов, А. А. Воронова и др.; Под ред. А, А., Воронова.—2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986.
- [5] Муромцев Д. Ю. *Анализ и синтез дискретных систем* Д.Ю. Муромцев, Е.Н. Яшин. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011.
- [6] Андриевский Б. Р. *Теоретические основы автоматизированного управления*: кхм
- [7] Первозванский А. А. *Курс теории автоматического управления : учебное пособие для вузов* А. А. Первозванский. - Москва: Наука, 1986.

- [8] *Метод пространства состояний в теории непрерывных систем автоматического управления* <http://pandia.ru/text/80/295/1133.php>