

Лабораторная работа №2

Точечная оценка параметров распределения

Цель работы – получение точечных оценок параметров заданных законов распределения методом моментов и максимального правдоподобия и расчет их характеристик.

Порядок выполнения работы

1. В соответствии с номером варианта, используя генератор псевдослучайных чисел (встроенную в математический пакет функцию), генерировать выборку из заданного непрерывного распределения объемом $N=10000$ с заданными для вашего распределения параметрами. Тем, у кого распределение двухпараметрическое, необходимо зафиксировать один из параметров и искать оценку другого. Тем у кого попался равномерный закон распределения – заменить его на нормальный закон с параметрами $\mu=1$, $\sigma=2$.

2. Получение точечных оценок по заданной выборочной совокупности.

2.1. По заданной совокупности выборочных значений найти оценку параметра заданного распределения, из которого генерировалась выборка, используя метод моментов. Для этого:

-составить уравнение, приравняв какой-либо теоретический момент соответствующему эмпирическому моменту того же порядка

- решить получившиеся уравнение относительно оцениваемого вами параметра

-проанализировать поведение оценки параметра при изменении объема выборки. Для этого выполнить следующее: генерировать 1000 выборочных реализаций объемом $N=10$. Для каждой из них посчитать оценку. Построить график зависимости полученной точечной оценки от номера реализации. Также для сравнения нанести на график точное значение параметра.

Далее проделать все то же самое для $N=100$, 10000 .

Проанализировать полученные графические зависимости и сделать выводы.

2.2. По заданной совокупности выборочных значений найти оценку параметра заданного распределения, из которого генерировалась выборка, используя метод максимального правдоподобия. Для этого необходимо:

- построить график функции правдоподобия от оцениваемого параметра

- найти положение максимума этой функции. Это значение и будет точечной оценкой

- проанализировать поведение оценки при изменении объема выборки. Для этого выполнить следующее: генерировать 1000 выборочных реализаций объемом $N=10$. Для каждой из них посчитать оценку. Построить график зависимости полученной точечной оценки от номера реализации. Также для сравнения нанести на график точное значение параметра.

Далее проделать все то же самое для $N=100$, 10000 .

Проанализировать полученные графические зависимости и сделать выводы.

-проанализировать поведение функции правдоподобия при изменении объема выборки. Для этого построить функцию правдоподобия при объемах выборки $N=10$, 100 , 10000 . Сравнить полученные графические зависимости и сделать выводы

2.3. Оценить дисперсию, смещение и рассеяние оценки параметра по 100 выборочным реализациям

3. Расчет гистограммы относительных частот.

3.1. Построить гистограмму по уже описанному в первой лабораторной работе алгоритму

3.2. Нанести на один и тот же график плотность вероятности того теоретического распределения, из которого генерируется выборка

3.3 Нанести на тот же график плотность вероятности того теоретического распределения, из которого генерируется выборка но вместо истинного значения параметра, подставить оценку, полученную ранее с использованием одного из методов точечного оценивания.

3.4 Сделать выводы

Данный пункт задания проделать при объемах выборки $N=10, 100, 10000$.

4. Расчет эмпирической функции распределения.

Выполнить расчет эмпирической функции распределения для негруппированных данных. Также, необходимо рассчитать и построить вместе с этой функцией график теоретической функции того распределения, из которого выборка генерировалась с заданными в условии параметрами. И построить график теоретической функции распределения, подставив вместо истинного значения параметра его оценку. Сравнить все представленные функции и сделать выводы

Данный пункт задания проделать при объемах выборки $N=10, 100, 10000$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение точечной оценки параметров распределения.
2. Дайте определение несмещенности точечных оценок параметров. Приведите примеры несмещенных и смещенных оценок.
3. Дайте определение эффективности точечной оценки параметров. Как найти эффективную оценку и ее дисперсию, используя критерий Рао-Крамера? Приведите примеры эффективных оценок.
4. Как зависит дисперсия эффективной оценки, найденной по критерию Рао-Крамера, от объема выборки?
5. Дайте определение состоятельности оценки. Сформулируйте условия, при которых оценка будет состоятельной. Приведите примеры состоятельных оценок параметров.
6. В чем состоит выборочный метод оценивания?
7. Какими характеристиками пользуются для количественной оценки расхождения между оцениваемым параметром и статистической оценкой?
8. Какая (и почему?) числовая характеристика статистического распределения называется «исправленной» выборочной дисперсией, а какая (и почему?) – «исправленным» средним квадратическим отклонением?
9. При каком числе наблюдений требование несмещенности оценки является особенно важным?
10. Доказать, что выборочная дисперсия является смещенной оценкой истинной дисперсии, а выборочное среднее – несмещенной оценкой математического ожидания
11. Почему выборочные моменты можно считать оценками соответствующих теоретических моментов?
12. Что такое функция правдоподобия? Дайте определение для дискретного и непрерывного случая
13. В чем заключается метод максимального правдоподобия оценки параметров? Каковы свойства оценок, полученных этим методом?
14. В чем заключается метод моментов оценки параметров?