Вернемся теперь к нашей краевой задаче. Мы должны прежде всего убедиться в непрерывности функции

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad (32)$$

откуда будет следовать, что $u(x,t)$ непрерывно примыкает к своим начальным и граничным значениям. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда для $u(x,t)$, так как общий член этого ряда — непрерывная функция, а равномерно сходящийся ряд непрерывных функций определяет непрерывную функцию. Пользуясь неравенством

$$|u_n(x, t)| \leqslant |A_n| + |B_n|,$$

заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \quad (33)$$

является мажорантным для ряда (32). Если мажорантный ряд (33) сходится, то ряд (32) сходится равномерно, то есть функция $u(x,t)$ непрерывна.

Чтобы убедиться в том, что $u_t(x,t)$ непрерывно примыкает к своим начальным значениям, надо доказать непрерывность этой функции, для чего достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} a\frac{\pi n}{l}\left(-A_n \sin\frac{\pi n}{l} at + B_n \cos\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x \quad (34)$$

или сходимость мажорантного ряда

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|). \quad (35)$$

Наконец, чтобы убедиться в том, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению, т. е. применим обобщенный принцип суперпозиции, достаточно доказать возможность двукратного почленного дифференцирования ряда для $u(x,t)$, для чего в свою очередь достаточно доказать равномерную сходимость рядов

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

которым с точностью до множителей пропорциональности соответствует общий мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|). \tag{36}$$

Так как

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n,$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx,$$

то наша задача сводится к доказательству сходимости рядов

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k = 0, 1, 2), \\ &\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k = -1, 0, 1). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

С этой целью мы используем известные[1]) свойства рядов Фурье.

Если периодическая с периодом $2l$ функция $F(x)$ имеет k непрерывных производных, а $(k+1)$-я производная ее кусочно-непрерывна, то числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|), \tag{38}$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье, сходится. Если речь идет о разложении в ряд по $\sin \frac{\pi n}{l} x$ функции $f(x)$, заданной только в промежутке $(0, l)$, то надо, чтобы предшествующие требования были выполнены для функции $F(x)$, получающейся при нечетном продолжении $f(x)$. В частности, для непрерывности $F(x)$ необходимо, чтобы $f(0) = 0$, так как в противном случае при нечетном продолжении получится разрыв в точке $x = 0$; аналогично этому в точке $x = l$ должно быть $f(l) = 0$, так как продолженная функция непрерывна и периодична с периодом $2l$. Непрерывность первой производной при $x = 0$, $x = l$ получается автоматически при нечетном продолжении. Вообще для непрерывности четных производных продолженной функции надо

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1967; Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.