

Граничные условия дают:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^\alpha + C_2 e^{-\alpha} = 0 \quad (\alpha = l \sqrt{-\lambda}),$$

т. е.

$$C_1 = -C_2 \quad \text{и} \quad C_1(e^\alpha - e^{-\alpha}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае α — действительно и положительно, так что $e^\alpha - e^{-\alpha} \neq 0$. Поэтому

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

2. При $\lambda = 0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

т. е. $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

Если $X(x)$ не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \tag{12}$$

или

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

где n — любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (11) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где D_n — произвольная постоянная.

Итак, только при значениях λ , равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad (13)$$

существуют нетривиальные решения задачи (11)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (14)$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который мы положили равным единице. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (9)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at, \quad (15)$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (1) — (3), заключаем, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (16)$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (4) и представимыми в виде произведения (5) двух функций, одна из которых зависит только от x , другая — от t . Эти решения могут удовлетворить начальным условиям (3) нашей исходной задачи только для частных случаев начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Обратимся к решению задачи (1) — (3) в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (17)$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2). На этом вопросе мы подробнее остановимся несколько позже (см. п. 3 этого параграфа). Начальные условия позволяют определить A_n и B_n . Потребуем, чтобы функция (17)