## *Лабораторная работа №6*
## *Матрицы и определители матриц*

***Задание 1.*** Выполнить действия над матрицами (см. табл. 1).

***Задание 2.*** Вычислить определитель $\Delta^{(4)}$ (см. табл. 2) четвёртого порядка:

1) путем понижения порядка (предварительно получив максимальное количество нулей в строке или столбце);
2) путем приведения определителя к треугольному виду.
3) при помощи специальной функции в Maple.

***Задание 3.*** Вычислить определитель $\Delta^{(4)}$ четвёртого порядка (см. табл. 3) ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – параметры) путем понижения порядка, предварительно получив максимальное количество нулей в строке (столбце). Значения коэффициентов $a,b,c,d$ соответствующего варианта студента берутся из табл. 4.

**Таблица 1**

| Вар | Задание |
|---|---|
| **1** | Даны матрицы $A,B,C$: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Вычислить матрицу $D=A\cdot B^T\cdot C^{-1}$; |
| **2** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $D=A^{-1}\cdot B^T\cdot(C+E)$, где $E$ – соответствующего размера единичная матрица; |
| **3** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A^{-1}\cdot B^T\cdot B^{-1}$. Показать, что $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$; |
| **4** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -3\\ -4 & 5 & 6\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B^{-1}\cdot\left(B^T-E\right)\cdot A$. Выяснить, справедливо ли равенство $(AB)^{-1}=A^{-1}\cdot B^{-1}$; |
| **5** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти общий вид матрицы $D=\left(A^{-1}\cdot B^T\cdot C\right)^{-1}$. Указать, при каком условии, наложенном на числа $a,b$, можно найти матрицу $D=\left(A^{-1}\cdot B^T\cdot C\right)^{-1}$; |

| | |
|---|---|
| **6** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Найти, если возможно, матрицу $C=\left(A\cdot A^T\right)^{-1}+B\cdot B^T$. Выяснить, выполняется ли матричное равенство $\left(A\cdot A^T\right)^{-1}=\left(A^T\right)^{-1}A^{-1}$; |
| **7** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) $A^{-1}$ (сделать проверку); 2) $D=A^T\cdot B\cdot(2C+E)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B\cdot B^T\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку. |
| **8** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) $A^{-1}$ (сделать проверку); 2) $D=A^T\cdot B\cdot(E-2C)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку; |
| **9** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) $(A+E)^{-1}$ (сделать проверку); 2) $D=(A+E)^{-1}\cdot B\cdot(E-C)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку; |
| **10** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) $(A+E)^{-1}$ (сделать проверку); 2) $D=(A+E)^{-1}\cdot B\cdot(E-C)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку; |
| **11** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B^{-1}\cdot\left(B^T+E\right)\cdot A$. Выяснить, справедливо ли матричное равенство $(AB)^{-1}=A^{-1}\cdot B^{-1}$; |

| | |
|---|---|
| **12** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Вычислить матрицу $D=(A+E)\cdot B\cdot(C-E)^{-1}$; |
| **13** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) $(A+E)^{-1}$ (сделать проверку); 2) $D=(A+E)^{-1}\cdot B\cdot(E-C)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку; |
| **14** | Даны матрицы $A,B,C$: $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Вычислить матрицу $D=A^{-1}\cdot\left(-B^T\right)\cdot C^{-1}$; |
| **15** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицы: 1) $(A+E)^{-1}$ (сделать проверку); 2) $D=(A-E)^{-1}\cdot B\cdot(E-C)$. 3) Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку; |
| **16** | Найти значение многочлена $f(x)=x^2-2x$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}$ |
| **17** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$. Найти матрицу $D=A^{-1}\cdot B^T\cdot(C-E)^{-1}$, $E$ – соответствующего размера единичная матрица; |
| **18** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $D=\left(2A^{-1}-B\right)\cdot C$. Проверить, выполняется ли для данных матриц $A,B$ матричное равенство $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$; |
| **19** | Найти значение многочлена $f(x)=x^2-3x+1$ от матрицы $A$ (вычислить $f(A)=A^2-3A+E$): 1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$; |

| | |
|---|---|
| **20** | Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $D=(A+E)^{-1}\cdot B\cdot(E+C)$. Выяснить, существуют ли матрицы $\left(B^T\cdot B\right)^{-1}$, $\left(C\cdot C^T\right)^{-1}$. Если да, то найти их. Сделать проверку; |

**Таблица 2**

| Вар | Определитель | Вар | Определитель | Вар | Определитель |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{vmatrix}8 & 7 & 2 & 0\\ -8 & 2 & 4 & 3\\ 5 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 7 & 2 & -2\end{vmatrix}$ | **2** | $\begin{vmatrix}2 & 3 & -3 & 4\\ 2 & 4 & -2 & -2\\ 3 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 4 & 1\end{vmatrix}$ | **3** | $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 5 & 2\\ -2 & -5 & 0 & 4\\ 3 & -2 & -4 & 0\end{vmatrix}$ |
| **4** | $\begin{vmatrix}3 & 4 & 3 & 6\\ 9 & 8 & 5 & 9\\ 3 & 7 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$ | **5** | $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 5 & 7 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 5 & -2\\ -1 & -3 & -2 & 1\end{vmatrix}$ | **6** | $\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & -3 & 9 & -27\\ 1 & 4 & 16 & 64\\ 1 & -2 & 4 & -8\end{vmatrix}$ |
| **7** | $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{vmatrix}$ | **8** | $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 4 & 1\end{vmatrix}$ | **9** | $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 3\\ 6 & -3 & -4 & 2\\ 4 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$ |
| **10** | $\begin{vmatrix}-3 & 0 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 2 & -3\end{vmatrix}$ | **11** | $\begin{vmatrix}-1 & -2 & -3 & -4\\ 4 & 5 & 6 & -2\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{vmatrix}$ | **12** | $\begin{vmatrix}3 & 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 3 & 3\\ 5 & -5 & -3 & 7\end{vmatrix}$ |
| **13** | $\begin{vmatrix}2 & 3 & -3 & 4\\ 2 & 4 & -2 & -2\\ 3 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 4 & 1\end{vmatrix}$ | **14** | $\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 2 & 5 & 6 & -4\\ 4 & 5 & -2 & 3\\ 3 & 8 & 24 & -19\end{vmatrix}$ | **15** | $\begin{vmatrix}2 & 7 & 4 & 5\\ 4 & 4 & 8 & 5\\ 1 & -9 & -3 & -5\\ 3 & 5 & 7 & 5\end{vmatrix}$ |
| **16** | $\begin{vmatrix}5 & 3 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 3 & 7\\ 2 & 2 & 3 & -3\end{vmatrix}$ | **17** | $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 1 & 3\\ 3 & 5 & -2 & 3\\ 2 & 8 & -3 & 9\end{vmatrix}$ | **18** | $\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 3 & -1 & -5 & 9\\ 7 & 3 & 5 & 1\\ 7 & 5 & 3 & 1\end{vmatrix}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **19** | $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 4 & 8 \\ 4 & -9 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ | **20** | $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ | **21** | $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ |

**Таблица 3**

| **Вар** | Определитель $\Delta^{(4)}$ | **Вар** | Определитель $\Delta^{(4)}$ |
|---|---|---|---|
| **1–7** | $\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 2 & a & b & c \\ b & 2c & a+b & -a \\ -d & -a & c+b & 0 \end{vmatrix}$ | **8–14** | $\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d & a+d \\ 1 & -a & -b & -c \\ -b & 2 & b-c & a-d \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix}$ |
| **15–22** | $\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} a-b & 1 & 2c & \alpha_1 \\ b-c & -a & 3b & \alpha_2 \\ c-d & -b & 2a & \alpha_3 \\ d-a & -c & 0 & \alpha_4 \end{vmatrix}$ | | |

**Таблица 4**

| **Вар** | *a* | *b* | *c* | *d* | **Вар** | *a* | *b* | *c* | *d* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 2 | 3 | 4 | **11** | 2 | 3 | 1 | 3 |
| **2** | 2 | 4 | 3 | 1 | **12** | 1 | 3 | 3 | 4 |
| **3** | 3 | 2 | 1 | 4 | **13** | 3 | 4 | 3 | 2 |
| **4** | 4 | 1 | 2 | 3 | **14** | 2 | 2 | 3 | 4 |
| **5** | 2 | 4 | 1 | 3 | **15** | 3 | 3 | 2 | 3 |
| **6** | 2 | 1 | 3 | 2 | **16** | 3 | 4 | 4 | 2 |
| **7** | 1 | 3 | 4 | 2 | **17** | 3 | 2 | 4 | 1 |
| **8** | 2 | 3 | 1 | 2 | **18** | 2 | 3 | 4 | 3 |
| **9** | 2 | 3 | 1 | 4 | **19** | 4 | 4 | 2 | 1 |
| **10** | 3 | 2 | 1 | 4 | **20** | 2 | 2 | 4 | 3 |

***Задание 4.*** Вычислить обратную матрицу для матрицы А при помощи нахождения алгебраических дополнений, т.е. опираясь на формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

**Таблица 5**

| Вар | Матрица $A$ | Вар | Матрица $A$ |
|---|---|---|---|
| **1** | $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5 & 1\end{pmatrix}$ | **2** | $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 2 & 3\\ 1 & 10 & 3 & 6\\ 6 & 10 & 1 & 4\end{pmatrix}$ |
| **3** | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ | **4** | $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 3 & 7\\ 2 & -1 & 2 & -3\\ -5 & 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$ |
| **5** | $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & -1{,}5\end{pmatrix}$ | **6** | $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$ |
| **7** | $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -1 & 6\\ 1 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ | **8** | $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$ |
| **9** | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & -3 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -10 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ | **10** | $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$ |
| **11** | $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -1 & -3\\ 1 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ | **12** | $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 3 & -1\\ 1 & 3 & -8 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ |
| **13** | $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ | **14** | $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$ |
| **15** | $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 24\\ 0 & 1 & 5 & 6\\ -3 & 4 & 10 & 6\\ 0 & -6 & 0 & -6\end{pmatrix}$ | **16** | $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3 & 3\\ 2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **17** | $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$ | **18** | $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1 & -3\\ 4 & 3 & 2 & -4\end{pmatrix}$ |
| **19** | $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -1 & -2\\ 2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$ | **20** | $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ |