позволяет привести уравнение (21) к более простому виду

$$U_{xx}-U_{yy}+c_1U=0,\quad c_1=\frac{1}{4}(4c^2-a^2-b^2),\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0 \tag{25}$$

с дополнительными условиями

$$U|_{y=0}=\varphi(x)e^{\frac{a}{2}x}=\varphi_1(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{22'}$$

$$U_y|_{y=0}=\left(\psi(x)-\frac{b}{2}\varphi(x)\right)e^{\frac{a}{2}x}=\psi_1(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{23'}$$

если только выбрать параметры λ и μ соответствующим образом, полагая

$$\lambda=\frac{a}{2},\quad \mu=-\frac{b}{2}. \tag{26}$$

Определение функции $U(x, y)$ по начальным данным и уравнению (25) сводится к построению функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$.

Функция v должна удовлетворять условиям:

$$v_{xx}-v_{yy}+c_1v=0, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}&v=1 \text{ на характеристике } MP,\\ &v=1 \text{ на характеристике } MQ \text{ (рис. 28).}\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Будем искать v в виде

$$v=v(z), \tag{29}$$

где

$$z=\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}\quad \text{или}\quad z^2=(x-\xi)^2-(y-\eta)^2. \tag{30}$$

На характеристиках MP и MQ переменная z обращается в нуль, так что $v(0)=1$. Далее, левая часть уравнения (27) преобразуется следующим образом:

$$v_{xx}-v_{yy}+c_1v=v''(z)(z_x^2-z_y^2)+v'(z)(z_{xx}-z_{yy})+c_1v=0.$$

Дифференцируя выражение для z^2 дважды, по x и y, получим:

$$zz_x=x-\xi,$$
$$zz_y=-(y-\eta),$$
$$zz_{xx}+z_x^2=1,$$
$$zz_{yy}+z_y^2=-1.$$

Отсюда и из формулы (30) находим:

$$z_x^2-z_y^2=1,\quad z_{xx}-z_{yy}=\frac{1}{z}.$$

Уравнение для v принимает следующий вид:

$$v''+\frac{1}{z}v'+c_1v=0$$

при условии $v(0)=1$. Решением этого уравнения является функция Бесселя нулевого порядка (см. Дополнение II, часть I, § 1)

$$v(z)=J_0(\sqrt{c_1}\,z)$$

или

$$v(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=J_0\left(\sqrt{c_1\left[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2\right]}\right). \tag{31}$$

Воспользуемся теперь для нахождения $U(x,\ y)$ формулой (10), которая в нашем случае принимает вид

$$U(M)=\frac{U(P)+U(Q)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_P^Q (vU_\eta\,d\xi-Uv_\eta\,d\xi)\quad (d\eta=0). \tag{32}$$

Вычислим предварительно интеграл по отрезку PQ ($\eta=0$):

$$\int\limits_P^Q (vU_\eta-Uv_\eta)\,d\xi=\int\limits_{x-y}^{x+y}\Big\{J_0\left(\sqrt{c_1\left[(x-\xi)^2-y^2\right]}\right)U_\eta(\xi,\ 0)-$$
$$-\frac{U(\xi,\ 0)\sqrt{c_1}\,yJ_0'\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\varepsilon)^2-y^2}\right)}{\sqrt{c_1\left[(x-\xi)^2-y^2\right]}}\Big\}\,d\xi. \tag{33}$$

Пользуясь начальными условиями (22′), (23′), находим:

$$U(x,\ y)=\frac{\varphi_1(x-y)+\varphi_1(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\psi_1(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{c_1}\,y\int\limits_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\varphi_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}, \tag{34}$$

откуда в силу (24), (22′) и (23′) получаем формулу

$$u(x,\ y)=\frac{\varphi(x-y)\,e^{-\frac{a-b}{2}y}+\varphi(x+y)\,e^{\frac{a+b}{2}y}}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int\limits_{x-y}^{x+y}\Big\{\frac{b}{2}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)-$$
$$-\sqrt{c_1}\,y\,\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\Big\}e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int\limits_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\psi(\xi)\,d\xi, \tag{35}$$

дающую решение поставленной задачи.