Полученное выше интегральное представление (3*) решения обыкновенного дифференциального уравнения (1*) имеет, как мы убедились, тот же физический смысл, что и формула (59), дающая интегральное представление решения неоднородного уравнения колебаний.

5. Общая первая краевая задача. Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения колебаний:

найти решение уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x, t), \quad 0<x<l, \ t>0 \tag{45}$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0)&=\varphi(x),\\ u_t(x, 0)&=\psi(x), \end{aligned}\right\} \quad 0\leqslant x\leqslant l; \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t)&=\mu_1(t),\\ u(l, t)&=\mu_2(t), \end{aligned}\right\} t\geqslant 0. \tag{47}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, полагая:

$$u(x, t)=U(x, t)+v(x, t),$$

так что $v(x, t)$ представляет отклонение функции $u(x, t)$ от некоторой известной функции $U(x, t)$.

Эта функция $v(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+\bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t)=f(x, t)-[U_{tt}-a^2U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} v(x, 0)&=\bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x)&=\varphi(x)-U(x, 0),\\ v_t(x, 0)&=\bar{\psi}(x); & \bar{\psi}(x)&=\psi(x)-U_t(x, 0);\\ v(0, t)&=\bar{\mu}_1(t), & \bar{\mu}_1(t)&=\mu_1(t)-U(0, t),\\ v(l, t)&=\bar{\mu}_2(t); & \bar{\mu}_2(t)&=\mu_2(t)-U(l, t). \end{aligned}$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x, t)$, таким образом, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t)=0 \text{ и } \bar{\mu}_2(t)=0;$$

для этого достаточно положить

$$U(x, t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)].$$

Тем самым общая краевая задача для функции $u(x, t)$ сведена к краевой задаче для функции $v(x, t)$ при нулевых граничных условиях. Метод решения этой задачи изложен выше (см. п. 4).

6. Краевые задачи со стационарными неоднородностями. Весьма важным классом задач являются краевые задачи со стационарными неоднородностями, когда граничные условия и правая часть уравнения не зависят от времени

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \tag{45'}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= u_1, \quad u_1 = \text{const}, \\ u(l, t) &= u_2, \quad u_2 = \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{47'}$$

В этом случае решение естественно искать в виде суммы

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

где $\bar{u}(x)$ — стационарное состояние (статический прогиб) струны, определяемое условиями

$$a^2 \bar{u}''(x) + f_0(x) = 0,$$
$$\bar{u}(0) = u_1,$$
$$\bar{u}(l) = u_2,$$

а $v(x, t)$ — отклонение от стационарного состояния. Нетрудно видеть, что функция $\bar{u}(x)$ равна

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{x}{l}\int_0^l d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2}\, d\xi_2 - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2}\, d\xi_2.$$

В частности, если $f_0 = \text{const}$, то

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2}(lx - x^2).$$

Функция $v(x, t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

с однородными граничными условиями

$$v(0, t) = 0,$$
$$v(l, t) = 0$$

и начальными условиями

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \bar{u}(x),$$
$$v_t(x, 0) = \psi(x).$$

Таким образом, v является решением простейшей краевой задачи, рассмотренной нами в п. 1 настоящего параграфа.