ласти. Тогда можно воспользоваться формулой Остроградского

$$\iint\limits_S W_n\, d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{W}\, dV$$

и преобразовать уравнение баланса к виду

$$\iiint\limits_V c\rho\,[u(P,\, t_2) - u(P,\, t_1)]\, dV_P =$$

$$= -\int\limits_{t_1}^{t_2} \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{W}\, dV_P\, dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \iiint\limits_V F(P,\, t)\, dV_P\, dt.$$

(Будем предполагать $F(P, t)$ непрерывной функцией своих аргументов.)

Применяя теорему о среднем и теорему о конечных приращениях для функций многих переменных, получим:

$$c\rho \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_3\\ P=P_1}} \Delta t \cdot V = -\operatorname{div} \boldsymbol{W}\Big|_{\substack{t=t_4\\ P=P_2}} \Delta t \cdot V + F\Big|_{\substack{t=t_5\\ P=P_3}} \Delta t \cdot V,$$

где t_3, t_4, t_5 — промежуточные точки на интервале Δt, а P_1, P_2, P_3 — точки в объеме V. Фиксируем некоторую точку $M(x, y, z)$ внутри V и будем стягивать V в эту точку, а Δt стремить к нулю. После сокращения на $\Delta t V$ и указанного предельного перехода получим:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x,\, y,\, z,\, t) = -\operatorname{div} \boldsymbol{W}(x,\, y,\, z,\, t) + F(x,\, y,\, z,\, t).$$

Заменяя $\boldsymbol{W}$ по формуле $\boldsymbol{W} = -k \operatorname{grad} u$, получим дифференциальное уравнение теплопроводности

$$c\rho\, u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F$$

или

$$c\rho u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right) + F.$$

Если среда однородна, то это уравнение обычно записывают в виде

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{c\rho},$$

где $a^2 = k/c\rho$ — коэффициент температуропроводности, или

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad \left(f = \frac{F}{c\rho}\right),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

4. Постановка краевых задач. Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа состоит лишь в задании значений функции $u(x, t)$ в начальный момент t_0.

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На конце стержня $x = 0$ задана температура

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где $\mu(t)$ — функция, заданная в некотором промежутке $t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant T$, причем T есть промежуток времени, в течение которого изучается процесс.

2. На конце $x = l$ задано значение производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t).$$

К этому условию мы приходим, если задана величина теплового потока $Q(l, t)$, протекающего через торцевое сечение стержня,

$$Q(l, t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t)$, где $\nu(t)$ — известная функция, выражающаяся через заданный поток $Q(l, t)$ по формуле

$$\nu(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3. На конце $x = l$ задано линейное соотношение между производной и функцией

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)].$$

Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой θ известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение $x = l$,

$$Q = h(u - \theta)$$

и

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)],$$