Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \tag{1}$$

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением

гиперболического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,
эллиптического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,
параболического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$[1]).

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2, \quad D = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как функциональный определитель (якобиан) D преобразования переменных отличен от нуля. В различных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа — комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (9) и (10) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{11}$$

приводим уравнение (4) после деления на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad \text{где} \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}.$$

Это — так называемая каноническая форма уравнений гиперболического типа[2]). Часто пользуются второй канонической

---

[1]) Эта терминология заимствована из теории кривых 2-го порядка.

[2]) Для того чтобы было возможно введение новых переменных ξ и η через функции φ и ψ, надо убедиться в независимости этих функций, достаточным условием чего является отличие от нуля соответствующего функционального определителя. Пусть функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

в некоторой точке M обращается в нуль. Тогда имеет место пропорциональформой. Положим

$$\xi=\alpha+\beta,\quad \eta=\alpha-\beta,$$

т. е.

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2},\quad \beta=\frac{\xi-\eta}{2},$$

где α и β — новые переменные. Тогда

$$u_\xi=\frac{1}{2}(u_\alpha+u_\beta),\quad u_\eta=\frac{1}{2}(u_\alpha-u_\beta),\quad u_{\xi\eta}=\frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}).$$

В результате уравнение (4) примет вид

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=\Phi_1\qquad(\Phi_1=4\Phi).$$

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$, уравнения (9) и (10) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): $\varphi(x,y)=\mathrm{const}$. Положим в этом случае

$$\xi=\varphi(x,y)\quad\text{и}\quad\eta=\eta(x,y),$$

где $\eta(x,y)$ — любая функция, не зависимая от φ. При таком выборе переменных коэффициент

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=\left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x+\sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)^2=0,$$

так как $a_{12}=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y=$$
$$=\left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x+\sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x+\sqrt{a_{22}}\,\eta_y\right)=0.$$

После деления уравнения (4) на коэффициент при $u_{\eta\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta}=\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\quad\left(\Phi=-\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}\right).$$

ность строк, т. е.

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=\frac{\psi_x}{\psi_y},$$

что, однако, невозможно, так как

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=-\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}\quad\text{и}\quad\frac{\psi_x}{\psi_y}=-\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$
$$\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0\right)$$

(при этом мы считаем $a_{11}\neq 0$, что не является ограничением общности). Тем самым независимость функций φ и ψ установлена.