Подставляя выражение (3) в (1), получаем:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2,$$

где λ^2 — параметр разделения. Отсюда следует:

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{4}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{5}$$

Решая уравнения (4) и (5), найдем частные решения уравнения (1) вида

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i\lambda x}, \tag{6}$$

удовлетворяющие условию ограниченности. Здесь λ — любое вещественное число $-\infty < \lambda < \infty$; поэтому в (6) возьмем знак «плюс» и образуем функцию

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda. \tag{7}$$

Если производные, входящие в уравнение (1), можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла (7), то функция (7), очевидно, будет удовлетворять уравнению (1) как суперпозиция частных решений этого уравнения.

Требуя выполнения начального условия при $t = 0$, будем иметь

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{8}$$

Воспользуемся теперь формулой обратного преобразования интеграла Фурье:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi \right) e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda \right) \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

Внутренний интеграл в (10) равен [1])

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), приходим к интегральному представлению искомого решения

$$u(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ \xi;\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{12}$$

где

$$G(x,\ \xi;\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{13}$$

Функцию $G(x,\xi;t)$, определяемую формулой (13), часто называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$G(x,\ \xi;\ t-t_0) = \frac{Q}{c\rho 2\sqrt{\pi a^2(t-t_0)}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \tag{13'}$$

представляет температуру в точке x в момент времени t, если в начальный момент времени $t=t_0$ в точке ξ выделяется количество тепла $Q=c\rho$.

Функция $G(x,\xi,t-t_0)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным (x,t) [2]), что можно проверить непосредственным дифференцированием.

---

[1]) Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

[2]) В самом деле,

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{x-\xi}{2\,[a^2(t-t_0)]^{3/2}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{[a^2(t-t_0)]^{3/2}} + \frac{(x-\xi)^2}{4\,[a^2(t-t_0)]^{5/2}}\right]e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-\frac{a^2}{2\,[a^2(t-t_0)]^{3/2}} + \frac{a^2(x-\xi)^2}{4\,[a^2(t-t_0)]^{5/2}}\right]e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

т. е.

$$G_t = a^2 G_{xx}.$$