плотностью тепловых источников $F(x, t)$ в точке x в момент t[1]). В результате действия этих источников на участке стержня $(x, x+dx)$ за промежуток времени $(t, t+dt)$ выделится количество тепла

$$dQ = SF(x, t)\,dx\,dt \tag{8}$$

или в интегральной форме

$$Q = S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x, t)\,dx\,dt, \tag{9}$$

где Q — количество тепла, выделяющегося на участке стержня (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2).

Уравнение теплопроводности получается при подсчете баланса тепла на некотором отрезке (x_1, x_2) за некоторый промежуток времени (t_1, t_2). Применяя закон сохранения энергии и пользуясь формулами (5), (7) и (9), можно написать равенство

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_1}\right]d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau = \int_{x_1}^{x_2} c\rho\,[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\,d\xi, \tag{10}$$

которое и представляет уравнение теплопроводности в интегральной форме.

Чтобы получить уравнение теплопроводности в дифференциальной форме, предположим, что функция $u(x, t)$ имеет непрерывные производные u_{xx} и u_t[2]).

Пользуясь теоремой о среднем, получаем равенство

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_1}\right]_{\tau=t_3}\Delta t + F(x_4, t_4)\,\Delta x\,\Delta t = \{c\rho\,[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\}_{\xi=x_3}\,\Delta x, \tag{11}$$

[1]) Если, например, тепло выделяется в результате прохождения электрического тока силы I по стержню, сопротивление которого на единицу длины равно R, то $F = 0{,}24\cdot I^2R$.

[2]) Требуя дифференцируемости функций $u(x, t)$, мы, вообще говоря, можем потерять ряд возможных решений, удовлетворяющих интегральному уравнению, но не удовлетворяющих дифференциальному уравнению. Однако в случае уравнений теплопроводности, требуя дифференцируемости решения, мы фактически не теряем возможных решений, так как можно доказать, что если функция удовлетворяет уравнению (10), то она обязательно должна быть дифференцируема.

которое при помощи теоремы о конечных приращениях можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right]_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}}\Delta t\,\Delta x + F(x_4, t_4)\,\Delta x\,\Delta t =$$
$$= \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right]_{\substack{x=x_3\\ t=t_5}}\Delta x\,\Delta t, \quad (12)$$

где t_3, t_4, t_5 и x_3, x_4, x_5 — промежуточные точки интервалов (t_1, t_2) и (x_1, x_2).

Отсюда, после сокращения на произведение $\Delta x\,\Delta t$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}} + F(x, t)\Big|_{\substack{x=x_4\\ t=t_4}} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=t_5\\ x=x_3}}. \quad (13)$$

Все эти рассуждения относятся к произвольным промежуткам (x_1, x_2) и (t_1, t_2). Переходя к пределу при $x_1, x_2 \to x$ и $t_1, t_2 \to t$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}, \quad (14)$$

называемое *уравнением теплопроводности*.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если стержень однороден, то k, c, ρ можно считать постоянными, и уравнение обычно записывают в виде

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$
$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho},$$

где a^2 — постоянная, называемая *коэффициентом температуропроводности*. Если источники отсутствуют, т. е. $F(x, t) = 0$, то уравнение теплопроводности принимает простой вид:

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (14')$$

2. Плотность тепловых источников может зависеть от температуры. В случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося *закону Ньютона*, количество тепла, теряемого стержнем [1]), рассчитанное на единицу длины и времени, равно

$$F_0 = h(u - \theta),$$

[1]) Поскольку в нашем приближении не учитывается распределение температуры по сечению, то действие поверхностных источников эквивалентно действию объемных источников тепла.