вследствие чего интегральное уравнение колебаний приводится к виду

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_1}\{\rho u_{tt}-T_0(u_{xx}+u_{yy})-F(x,\ y,\ t)\}\,dx\,dy\,dt=0.$$

Пользуясь теоремой о среднем, произвольностью выбора S_1 и промежутка времени (t_1, t_2), делаем заключение о тождественном равенстве нулю выражения в фигурных скобках. Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению колебаний мембраны

$$\rho u_{tt}=T_0(u_{xx}+u_{yy})+F(x,\ y,\ t). \tag{31}$$

Для однородной мембраны уравнение колебаний можно записать в виде

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,\ y,\ t)\qquad\left(a^2=\frac{T_0}{\rho}\right), \tag{32}$$

где $f(x, y, t)$ — плотность силы, рассчитанная на единицу массы мембраны.

6. Уравнения гидродинамики и акустики. Для характеристики движения жидкости пользуются функциями $v_1(x, y, z, t)$, $v_2(x, y, z, t)$, $v_3(x, y, z, t)$, представляющими компоненты вектора скорости v в точке $(x,\ y,\ z)$ в момент t (эйлеровы переменные). Величинами, характеризующими движение жидкости, являются также плотность $\rho(x, y, z, t)$, давление $p(x, y, z, t)$ и плотность внешних действующих сил $\boldsymbol{F}(x,\ y,\ z,\ t)$ (если они имеются), рассчитанная на единицу массы.

Рассмотрим некоторый объем жидкости T и подсчитаем действующие на него силы. Пренебрегая силами трения, обусловленными вязкостью, т. е. рассматривая идеальную жидкость, получим для результирующей сил давления выражение в виде поверхностного интеграла

$$-\iint_S p\boldsymbol{n}\,dS, \tag{33}$$

где S — поверхность объема T, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали. Формула Остроградского[1]) дает:

$$-\iint_S p\boldsymbol{n}\,dS=-\iiint_T \operatorname{grad} p\,d\tau. \tag{34}$$

[1]) В самом деле, $p\boldsymbol{n}=p\cos(n, x)\boldsymbol{i}+p\cos(n, y)\boldsymbol{j}+p\cos(n, z)\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные векторы в системе координат $(x,\ y,\ z)$,

$$\iint_S p\cos(n,\ x)\,dx=\iiint_T\frac{\partial p}{\partial x}\,d\tau\ \text{ и т. д.}$$

При вычислении ускорения какой-либо точки жидкости необходимо учесть перемещение самой точки. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — уравнение траектории этой точки. Вычислим производную скорости по времени

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}v_1 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}v_2 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}v_3 = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v},$$

где

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Такая производная по времени, учитывающая движение частицы среды (субстанции), называется субстанциональной или материальной. Уравнение движения жидкости выражает обычную связь между ускорением частиц и действующими на них силами

$$\iiint\limits_T \rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\,d\tau = -\iiint\limits_T \operatorname{grad} p\,d\tau + \iiint\limits_T \rho\boldsymbol{F}\,d\tau, \tag{35}$$

где последний интеграл представляет собой равнодействующую внешних сил, приложенных к объему T. Отсюда в силу произвольности объема T получаем уравнение движения идеальной жидкости в форме Эйлера

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \boldsymbol{F}. \tag{36}$$

Перейдем к выводу уравнения непрерывности. Если внутри T нет никаких источников или стоков, то изменение в единицу времени количества жидкости, заключенной внутри T, равно потоку через границу S

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_T \rho\,dt = -\iint\limits_S \rho\,\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\,dS. \tag{37}$$

Преобразование поверхностного интеграла в объемный дает

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}\right)d\tau = 0.$$

Так как это равенство справедливо для сколь угодно малых объемов, то отсюда следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{38}$$