откуда

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}(x, t) \leqslant \bar{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) + \varepsilon, \\ \underline{u}(x, t) \geqslant \underline{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) - \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

В силу неотрицательности функции $G(x, \xi, t)$ из формулы (24) следует, что

$$\underline{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \bar{u}(x, t). \tag{25}$$

Отсюда получаем неравенства

$$\varphi(x_0) - \varepsilon \leqslant u(x, t) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon)$$

или

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

что и требовалось доказать. Ограниченность функции $|u(x, t)|$ следует из (25) и из ограниченности функций $\bar{u}(x, t)$ и $\underline{u}(x, t)$. Этим теорема доказана.

4. Неоднородное уравнение теплопроводности. Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = 0 \tag{26}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Будем искать решение этой задачи $u(x, t)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (11), т. е. по функциям $\left\{\sin \frac{\pi n}{l} x\right\}$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{27}$$

считая при этом t параметром. Для нахождения функции $u(x, t)$ надо определить функции $u_n(t)$. Представим функцию $f(x, t)$ в виде ряда

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \tag{28}$$

Подставляя предполагаемую форму решения в исходное уравнение (1), будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l}x\left\{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}(t) - f_n(t)\right\} = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$\dot{u}_n(t) = -a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) + f_n(t). \tag{29}$$

Пользуясь начальным условием для $u(x, t)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x = 0,$$

получаем начальное условие для $u_n(t)$:

$$u_n(0) = 0. \tag{30}$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (29) с нулевым начальным условием (30)[1]), находим:

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau. \tag{31}$$

Подставляя выражение (31) для $u_n(t)$ в формулу (27), получим решение исходной задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{32}$$

Воспользуемся выражением (28) для $f_n(\tau)$ и преобразуем найденное решение (32):

$$u(x, t) = \int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right\} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{33}$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi \tag{34}$$

совпадает с функцией источника, определяемой формулой (18).

---

[1]) См. мелкий шрифт в конце п. 4, § 3, гл. II.