Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, видим, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} U\left(t - \tau_\varepsilon^*\right) = U(t),$$

что и доказывает наше утверждение.

Перейдем к представлению решения неоднородного уравнения через $U(t)$ — функцию влияния мгновенного импульса. Разбивая промежуток $(0, t)$ точками τ_i на равные части

$$\Delta\tau = \frac{t}{m},$$

представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t),$$

где

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < \tau_i \text{ и } t \geqslant \tau_{i+1}, \\ f(t) & \text{при} \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}. \end{cases}$$

Тогда функция

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t),$$

где $u_i(t)$ суть решения уравнения $L(u_i) = f_i$ с нулевыми начальными данными.

Если m достаточно велико, то функцию $u_i(t)$ можно рассматривать как функцию влияния мгновенного импульса интенсивности

$$I = f_i(\tau_i)\,\Delta\tau = f(\tau_i)\,\Delta\tau,$$

так что

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} U(t - \tau_i) f(\tau_i)\,\Delta\tau \xrightarrow[\Delta\tau \to 0]{} \int_0^t U(t - \tau) f(\tau)\,d\tau,$$

т. е. мы приходим к формуле

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau) f(\tau)\,d\tau,$$

показывающей, что влияние непрерывно действующей силы можно представлять суперпозицией влияний мгновенных импульсов.

В рассмотренном выше случае $u_n^{(1)}$ удовлетворяет уравнению (50) и условиям $u_n(0) = \dot{u}_n(0) = 0$. Для функции влияния $U(t)$ имеем:

$$\ddot{U} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 U = 0, \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = 1,$$

так что

$$U(t) = \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} at.$$

Отсюда и из (3*) получаем формулу (52)

$$u_n^{(1)}(t) = \int_0^t U(t - \tau) f_n(\tau)\,d\tau = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a (t - \tau) f_n(\tau)\,d\tau.$$

Полученное выше интегральное представление (3*) решения обыкновенного дифференциального уравнения (1*) имеет, как мы убедились, тот же физический смысл, что и формула (59), дающая интегральное представление решения неоднородного уравнения колебаний.

5. **Общая первая краевая задача.** Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения колебаний:

найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \ t > 0 \tag{45}$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned}\right\} t \geqslant 0. \tag{47}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, полагая:

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t),$$

так что $v(x, t)$ представляет отклонение функции $u(x, t)$ от некоторой известной функции $U(x, t)$.

Эта функция $v(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - U(x, 0), \\ v_t(x, 0) &= \bar{\psi}(x); & \bar{\psi}(x) &= \psi(x) - U_t(x, 0); \\ v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), & \bar{\mu}_1(t) &= \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t); & \bar{\mu}_2(t) &= \mu_2(t) - U(l, t). \end{aligned}$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x, t)$, таким образом, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \text{ и } \bar{\mu}_2(t) = 0;$$

для этого достаточно положить

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Тем самым общая краевая задача для функции $u(x, t)$ сведена к краевой задаче для функции $v(x, t)$ при нулевых граничных условиях. Метод решения этой задачи изложен выше (см. п. 4).