Слагаемое αu_t в правой части уравнения соответствует трению, пропорциональному скорости.

Рассмотрим сначала задачу о распространении периодического граничного режима:

$$u(l, t) = A\cos\omega t \quad (\text{или } u(l, t) = B\sin\omega t), \tag{62}$$

$$u(0, t) = 0. \tag{63}$$

Для дальнейшего нам удобнее записать граничное условие в комплексной форме

$$u(l, t) = Ae^{i\omega t}. \tag{64}$$

Если

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t)$$

удовлетворяет уравнению (61) с граничными условиями (63) и (64), то $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$ — его действительная и мнимая части — в отдельности удовлетворяют тому же уравнению (в силу его линейности), условию (63) и граничным условиям при $x = l$

$$u^{(1)}(l, t) = A\cos\omega t,$$

$$u^{(2)}(l, t) = A\sin\omega t.$$

Итак, найдем решение задачи

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - \alpha u_t,\\ u(0, t) &= 0,\\ u(l, t) &= Ae^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Полагая

$$u(x, t) = X(x)\,e^{i\omega t}$$

и подставляя это выражение в уравнение, получим для функции $X(x)$ следующую задачу:

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i\alpha\frac{\omega}{a^2}\right), \tag{66}$$

$$X(0) = 0, \tag{67}$$

$$X(l) = A. \tag{68}$$

Из уравнения (66) и граничного условия (67) находим:

$$X(x) = C\sin kx.$$

Условие при $x = l$ дает:

$$C = \frac{A}{\sin kl}, \tag{69}$$

так что

$$X(x) = A\frac{\sin kx}{\sin kl} = X_1(x) + iX_2(x), \tag{70}$$

где $X_1(x)$ и $X_2(x)$ — действительная и мнимая части $X(x)$.

Искомое решение можно представить в виде

$$u(x, t) = [X_1(x) + iX_2(x)]\, e^{i\omega t} = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t),$$

где

$$u^{(1)}(x, t) = X_1(x)\cos\omega t - X_2(x)\sin\omega t,$$
$$u^{(2)}(x, t) = X_1(x)\sin\omega t + X_2(x)\cos\omega t.$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$, найдем, что

$$\bar{k} = \lim_{\alpha\to 0} k = \frac{\omega}{a} \tag{71}$$

и, соответственно,

$$\bar{u}^{(1)}(x, t) = \lim_{\alpha\to 0} u^{(1)}(x, t) = A\,\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega}{a}l}\cos\omega t, \tag{72}$$

$$\bar{u}^{(2)}(x, t) = \lim_{\alpha\to 0} u^{(2)}(x, t) = A\,\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t. \tag{73}$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty;\\ &u(0, t) = \mu_1(t), \quad t > -\infty;\\ &u(l, t) = \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{I$_0$}$$

которую будем называть задачей (I_0). Очевидно, что $\bar{u}^{(1)}(x, t)$ и $\bar{u}^{(2)}(x, t)$ являются решениями задачи (I_0) при граничных условиях

$$\bar{u}^{(1)}(0, t) = 0, \quad \bar{u}^{(1)}(l, t) = A\cos\omega t,$$
$$\bar{u}^{(2)}(0, t) = 0, \quad \bar{u}^{(2)}(l, t) = A\sin\omega t.$$

Решение задачи при $\alpha = 0$ существует не всегда. Если частота вынужденных колебаний ω совпадает с собственной частотой ω_n колебаний струны с закрепленными концами

$$\omega = \omega_n = \frac{\pi n}{l}a,$$

то знаменатель в формулах для $\bar{u}^{(1)}$ и $\bar{u}^{(2)}$ обращается в нуль и решения задачи без начальных условий не существует.

Этот факт имеет простой физический смысл: при $\omega = \omega_n$ наступает резонанс, т. е. не существует установившегося режима. Амплитуда, начиная с некоторого момента $t = t_0$, неограниченно нарастает.

При наличии трения ($\alpha \neq 0$) установившийся режим возможен при любом ω, так как $\sin kl \neq 0$ при комплексном k.