ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

Проверка гипотез о законе распределения выборочных данных

Цель работы:

Проверка гипотез о законе распределения выборочных данных с помощью критерия хи-квадрат.

Задание.

Дана выборка (приложение 3) объемом $n = 100$ из неизвестного распределения F. Требуется, используя критерий хи-квадрат, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезы о распределении выборочных данных по законам, указанным в варианте задания. При построении статистики критерия для неизвестных параметров распределения использовать оценки метода максимального правдоподобия (или метода моментов, если есть сложности с нахождением оценок ММП). Для каждой из гипотез указать достигнутый уровень значимости.

Варианты заданий (соответствует порядковому номеру студента в списке группы)

Вариант 1.

1) F - нормальный закон распределения с плотностью $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in R$, где параметры a и $\sigma > 0$ - неизвестны.

Вариант 2.

1) F - закон распределения с плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{6} a^4 x^3 e^{-ax}$, $x > 0$, где параметр a неизвестен;

Вариант 3.

1) F - показательное распределение с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, где параметр $\lambda > 0$ - неизвестен;

Вариант 4.

1) F - нормальный закон распределения с плотностью $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in R$, где параметры a и $\sigma > 0$ - неизвестны;

Вариант 5.

1) F - распределение Рэлея с плотностью $f(x) = \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x > 0$, где параметр $\sigma > 0$ - неизвестен;

Вариант 6.

1) F - закон распределения с плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{2}a^3x^2e^{-ax}$, $x>0$, где параметр a неизвестен;

Вариант 7.

1) F - показательное распределение с плотностью $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$, где параметр $\lambda>0$ - неизвестен;

Вариант 8.

1) F - распределение с плотностью $f(x)=\frac{2a}{(1+ax)^3}$, $x\in[0,\infty)$, где параметр $a>0$ неизвестен;

Вариант 9

1) F - распределение Лапласа с плотностью $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}e^{-\frac{|x-8|\sqrt{2}}{\sigma}}$, $x\in R$, где параметр $\sigma>0$ - неизвестен;

Вариант 10.

1) F - нормальный закон распределения с плотностью $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x\in R$, где параметры a и $\sigma>0$ - неизвестны.

Вариант 11.

1) F - показательное распределение с плотностью $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$, где параметр $\lambda>0$ - неизвестен.

Вариант 12.

1) F - распределение Рэлея с плотностью $f(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x>0$, где параметр $\sigma>0$ - неизвестен.

Вариант 13.

1) F - закон распределения с плотностью распределения $f(x)=\sqrt{\frac{a}{\pi}}x^{-1/2}e^{-ax}$, $x>0$, где параметр a неизвестен;

Вариант 14.

1) F - закон распределения с плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{2}a^3x^2e^{-ax}$, $x>0$, где параметр a неизвестен;

Вариант 15.

2) F - распределение с плотностью $f(x)=\dfrac{2a}{(1+ax)^3}$, $x\in[0,\infty)$, где параметр $a>0$ неизвестен;

Вариант 16.

2) F - распределение Рэлея с плотностью $f(x)=\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x>0$, где параметр $\sigma>0$ - неизвестен.

Приложение 1.

Критерий χ^2 (Пирсона) для простой гипотезы

Пусть $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ выборка из генеральной совокупности F. Проверяется гипотеза $H_0: F=F_1$ против альтернативы $H_1: F\neq F_1$.

Представим выборку в виде группированного ряда, разбив предполагаемую область значений случайной величины на m интервалов. Пусть n_i - число элементов выборки попавших в i-ый интервал, а p_i - теоретическая вероятность попадания в этот интервал при условии истинности H_0. Составим статистику $\rho(\vec{X})=\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$, которая характеризует сумму квадратов отклонения наблюдаемых значений n_i от ожидаемых np_i по всем интервалам группирования.

Теорема Пирсона. Если H_0 верна, то при фиксированном m и $n\to\infty$

$$\rho(\vec{X})=\sum_{i=1}^{m}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}\Rightarrow\chi^2_{m-1} \tag{1}$$

(закон распределения статистики $\rho(\vec{X})$ стремится к распределению хи-квадрат с $m-1$ степенью свободы).

Таким образом, статистику $\rho(\vec{X})$ можно использовать в качестве статистики критерия согласия для проверки гипотезы о виде закона распределения, который будет иметь вид:

$$\delta(\vec{X})=\begin{cases}H_0, & \rho(\vec{X})<\tau_{1-\alpha}\\ H_1, & \rho(\vec{X})\geq\tau_{1-\alpha}\end{cases},\ \rho(\vec{X})=\sum_{i=1}^{m}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}, \tag{2}$$

где $\tau_{1-\alpha}$ - квантиль распределения χ^2_{m-1}.

Данный критерий называется критерием χ^2 или критерием согласия Пирсона.

Достигнутый (наблюдаемый) уровень значимости критерия:

$$\alpha_{набл} = P(\rho(\vec{X}) > \rho_{набл}) = 1 - F_{\chi^2_{m-1}}(\rho_{набл}), \tag{3}$$

$\rho_{набл}$ - вычисленное по выборке значение статистики критерия.

Замечание. Критерий не состоятелен для альтернатив, для которых $\widetilde{p}_i = p_i$ для всех $i \in \{1,2,\dots,m\}$. Поэтому, следует стремиться к как можно большему числу интервалов группирования. Однако, с другой стороны, сходимость к распределению хи-квадрат величины $\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ обеспечивается ЦПТ, причем погрешность приближения существенно возрастает, если ожидаемое значение np_i для ячейки слишком мало ($np_i < 5$). Поэтому обычно число интервалов m выбирают таким образом, чтобы для каждой ячейки величина $np_i \geq 5$.

Критерий χ^2 (Пирсона) для сложной гипотезы

Пусть $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ выборка из генеральной совокупности F. Проверяется сложная гипотеза $H_0 : F = F_\theta$, где θ - неизвестный параметр распределения F (или вектор параметров), против альтернативы $H_1 : F \neq F_\theta$.

Пусть выборка по прежнему представлена в виде группированного ряда и n_i - число элементов выборки попавших в i-ый интервал, $i \in \{1,2,\dots,m\}$. Статистику (1) мы не можем в этом случае использовать для построения критерия Пирсона, так как не можем вычислить теоретические значения вероятностей p_i, которые зависят от неизвестного параметра θ. Пусть θ^* - оценка параметра θ, а $p_i^*(\theta^*)$ - соответствующие ей оценки вероятностей p_i. Составим статистику $\rho(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i^*)^2}{np_i^*}$.

Теорема Пирсона. Если H_0 верна, и l - число компонент вектора θ (число неизвестных параметров распределения), то при фиксированном m и $n \to \infty$

$$\rho(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i^*)^2}{np_i^*} \Rightarrow \chi^2_{m-l-1} \tag{4}$$

(закон распределения статистики $\rho(\vec{X})$ стремится к распределению хи-квадрат с $m-l-1$ степенью свободы).

Таким образом, критерий Пирсона для параметрической гипотезы будет иметь вид:

$$\delta(\vec{X}) = \begin{cases} H_0, & \rho(\vec{X}) < \tau_{1-\alpha} \\ H_1, & \rho(\vec{X}) \geq \tau_{1-\alpha} \end{cases}, \qquad \rho(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i^*)^2}{np_i^*}, \tag{5}$$

где $\tau_{1-\alpha}$ - квантиль распределения χ^2_{m-l-1}.

Достигнутый (наблюдаемый) уровень значимости критерия:

$$\alpha_{набл} = P(\rho(\vec{X}) > \rho_{набл}) = 1 - F_{\chi^2_{m-l-1}}(\rho_{набл}). \quad (6)$$

Замечание. Вообще говоря, оценки, используемые для построения статистики критерия хи-квадрат, должны быть определены из условия минимума статистики $\rho(\vec{X})$. Поэтому желательно уточнить оценки, найденные другим способом (методом максимального правдоподобия или методом моментов) путем минимизации $\rho(\vec{X})$.

Приложение 2. Пример выполнения задания.

Дана выборка объемом $n = 100$ из неизвестного распределения F:

4,81	7,03	4,95	0,25	13,00	26,52	1,40	3,19	0,07	1,99
11,48	15,45	5,17	14,65	8,09	0,38	2,34	1,14	0,39	1,56
2,58	17,15	0,47	1,75	13,74	11,50	8,75	1,08	0,51	2,68
0,53	9,04	3,82	1,01	5,13	6,80	4,52	6,69	3,04	9,41
0,61	7,58	4,26	0,14	3,60	1,27	2,97	8,63	3,46	0,57
0,21	20,35	5,96	3,81	3,35	1,93	1,70	0,71	1,97	4,87
21,17	6,28	0,12	6,02	4,92	1,06	2,94	10,82	3,57	8,04
4,49	5,35	1,07	1,44	0,07	1,61	8,54	14,11	9,63	7,90
0,74	2,96	0,04	5,23	16,01	12,32	0,15	1,36	16,36	5,48
9,88	5,14	6,81	1,27	7,33	10,11	1,88	1,52	1,14	5,62

Требуется, используя критерий хи-квадрат, на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о распределении выборочных данных по показательному закону с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, где параметр $\lambda > 0$ - неизвестен. Указать достигнутый уровень значимости.

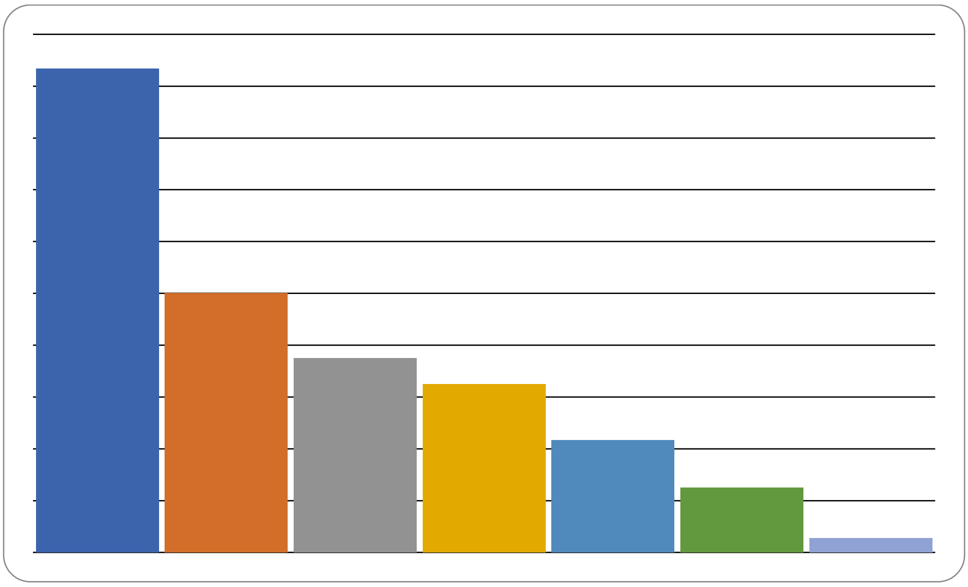
Построим статистический ряд, осуществив группировку данных. Находим $x_{\min} = 0{,}04$, $x_{\max} = 26{,}52$. Число интервалов группирования m определяем по формуле Стерджесса: $m = 1 + [\log_2 n] = 7$. Для удобства возьмем в качестве нижней границы первого интервала значение $\tilde{x}_0 = 0$, а в качестве верхней границы последнего интервала значение $\tilde{x}_7 = 28$, тогда длина каждого интервала группирования будет равна $\Delta x = 28/7 = 4$. Подсчитывая частоты, получаем следующий ряд:

Интервал $\tilde{x}_{i-1} - \tilde{x}_i$	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20	20 - 24	24 - 28
Частота n_i	51	24	13	6	3	2	1

Видим, что частоты распределены по интервалам крайне неравномерно (для корректного применения критерия хи-квадрат необходимо, чтобы количество значений попавших в каждую ячейку было не слишком мало), поэтому делаем перегруппировку данных, добиваясь более равномерного распределения частот по интервалам. В результате получаем следующий ряд:

Интервал $(\tilde{x}_{i-1}; \tilde{x}_i)$	0 - 1,5	1,5 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 10	10 - 16	16 - 27
Середина $\bar{x}_i$	0,75	2,25	4	6	8,5	13	21,5
Частота n_i	28	15	15	13	13	10	6
Относительная частота ω_i	0,28	0,15	0,15	0,13	0,13	0,1	0,06
Плотность частоты ρ_i	0,1867	0,1000	0,0750	0,0650	0,0433	0,0250	0,0055

Соответствующая гистограмма приведена на рисунке.



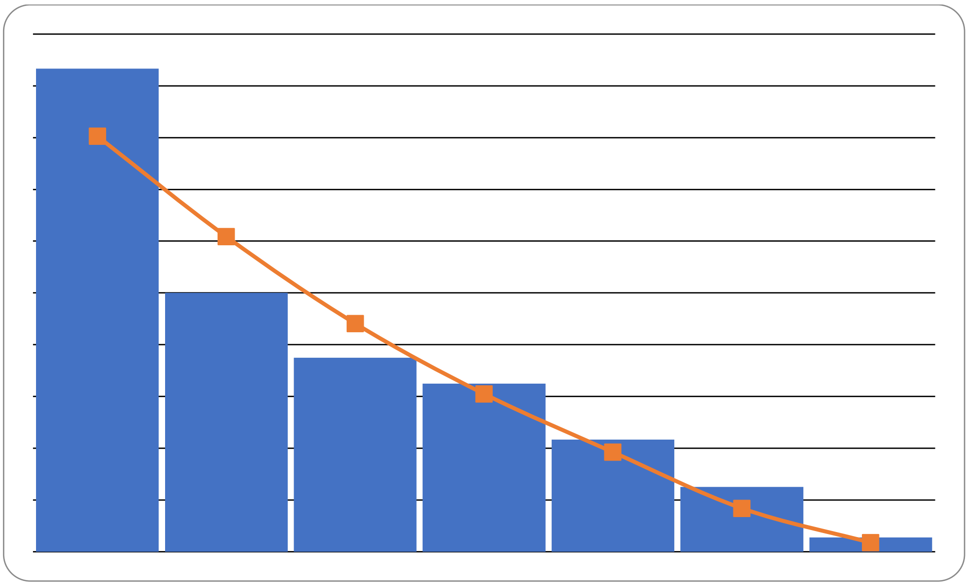
Анализируя гистограмму, видим, что распределение экспериментальных данных похоже на показательное распределение.

Проверим, используя критерий хи-квадрат гипотезу H_0: «Выборочные данные имеют показательное распределение».

Поскольку параметр λ показательного распределения нам неизвестен, необходимо найти оценку данного параметра. В качестве оценки неизвестного параметра λ возьмем оценку, полученную по методу моментов (через первый момент). Так как для показательного распределения $m_1 = 1/\lambda$, то $\lambda^* = 1/\overline{X} \approx 0{,}184$.

Вычислим значения плотности показательного распределения $f(x) = \lambda^* e^{-\lambda^* x}$ в точках, соответствующих серединам интервалов группирования, и сравним гистограмму с графиком плотности:

Интервал $(\tilde{x}_{i-1}; \tilde{x}_i)$	0 - 1,5	1,5 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 10	10 - 16	16 - 27
Середина $\bar{x}_i$	0,75	2,25	4	6	8,5	13	21,5
Плотность частоты ρ_i	0,1867	0,1000	0,0750	0,0650	0,0433	0,0250	0,0055
Теоретическая плотность $f(\bar{x}_i)$	0,1605	0,1218	0,0882	0,0610	0,0385	0,0168	0,0035



Как видно, различие между кривой плотности и гистограммой не велико (при истинности H_0 площадь столбца гистограммы должна приближенно равняться площади под кривой плотности на данном интервале). Насколько статистически незначимо (или значимо) это различие можно определить, используя критерий Пирсона.

Примерим критерий Пирсона для проверки нашей гипотезы о законе распределения выборочных данных. Подсчитаем вероятности p_i^* попадания в каждый интервал при условии, что генеральная совокупность имеет показательное распределение с параметром $\lambda^* = 0{,}184$:

$p_i^* = F(\tilde{x}_i) - F(\tilde{x}_{i-1}), \quad i = \overline{1,7}$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda^* x}$ - функция распределения показательного закона. Причем для последнего интервала, полагаем $\tilde{x}_7 = \infty$ и, соответственно, $F(\tilde{x}_7) = 1$, поскольку теоретически для показательного распределения плотность отлична от нуля на интервале $(0, \infty)$. Далее находим ожидаемые значения - np_i^* и нормированные квадраты отклонений $(np_i^* - n_i)^2 / np_i^*$ по всем интервалам. Результаты оформляем в виде таблицы:

Интервал	0 - 1,5	1,5 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 10	10 - 16	16 - 27
Частота n_i	28	15	15	13	13	10	6
Вероятность p_i^*	0,242	0,183	0,177	0,123	0,117	0,106	0,052
Ожидаемые значения np_i^*	24,16	18,32	17,74	12,27	11,69	10,59	5,24

$(n_i - np_i^*)^2 / np_i^*$	0,61	0,60	0,42	0,04	0,15	0,03	0,11

Находим наблюдаемое значение статистики критерия Пирсона: $\rho_{набл} = \sum_{i=1}^{7} \frac{\left(n_i - np_i^*\right)^2}{np_i^*} \approx 1{,}97$.

Зададим уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Для заданного уровня значимости и числа степеней свободы $v = m - l - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$ ($l = 1$ - так как один параметр распределения - λ мы оценивали по выборке) найдем критическое значение статистики, как критическую точку распределения χ_5^2 уровня $\alpha = 0{,}05$ (или что тоже самое – квантиль уровня 0,95): $\rho_{кр} = 11{,}07$. (Критическую точку заданного уровня можно получить, например, используя функцию пакета EXCEL – ХИ2ОБР, квантили заданного уровня значимости можно получить, используя функцию ХИ2.ОБР).

Так как $\rho_{набл} < \rho_{кр}$, то гипотеза о распределении данных по показательному закону принимается.

Приложение 3. Задание. Дана выборка данных вредных выбросов (в усл. ед.) по 100 предприятиям из неизвестного распределения F. Используя критерий хи-квадрат, проверить гипотезу о распределении выборочных данных по заданному закону. Уровень значимости =0,05

Вариант 1.

0,29	2,64	0,76	3,58	0,31	0,53	2,48	0,07	2,02	0,02
1,70	3,76	2,54	0,60	0,36	3,21	2,37	0,54	0,98	0,31
0,23	0,22	2,90	0,40	1,82	1,01	0,56	0,74	2,18	3,78
1,70	1,38	1,18	0,12	0,07	4,29	1,06	0,37	0,35	2,66
1,56	1,36	0,87	0,36	0,17	0,71	3,08	0,85	0,03	0,82
0,88	0,12	0,13	0,19	0,18	0,05	1,15	3,69	0,78	0,93
0,02	0,10	1,74	1,45	4,24	1,17	0,45	0,92	0,96	0,74
0,52	0,58	0,32	1,09	0,21	2,42	0,04	0,87	0,60	0,55
0,84	3,65	0,30	0,94	0,06	0,07	2,64	2,30	0,49	0,74
0,47	2,38	0,62	0,38	0,61	0,47	1,97	0,45	0,33	0,65

Вариант 2.

12,67	9,98	9,46	9,55	6,48	4,49	5,70	11,92	14,24	9,25
15,16	7,15	13,27	5,46	7,20	5,05	5,90	16,16	7,64	7,83
2,69	3,40	3,64	11,34	4,29	6,32	4,43	5,45	7,97	8,03
16,37	6,57	5,96	10,43	8,34	14,19	11,75	14,84	4,75	7,60
6,24	7,98	2,95	9,85	5,57	11,08	8,37	9,55	15,31	6,13
10,17	4,81	2,78	9,20	11,80	7,94	6,15	13,25	13,85	7,19
15,18	6,81	7,99	7,88	10,32	11,12	7,04	8,08	4,86	13,23
5,77	14,04	9,53	6,46	3,70	1,88	10,28	3,15	8,47	4,86
5,66	5,36	5,96	12,86	8,77	9,11	8,71	6,27	6,44	3,49
8,02	14,96	9,46	11,20	9,33	11,39	4,02	7,21	4,75	4,68

Вариант 3.

1,15	0,57	3,90	0,82	1,77	0,78	1,15	0,80	0,33	1,04
0,34	0,50	4,94	0,06	3,76	0,22	5,66	0,13	0,91	0,27
0,55	1,25	3,79	0,28	0,20	1,70	0,77	0,20	0,25	3,81
1,33	0,13	1,45	3,05	0,06	0,09	1,90	3,58	2,48	1,39
2,30	0,02	2,82	0,07	0,32	6,07	1,65	1,59	0,50	0,92
1,30	0,85	2,42	0,46	1,03	0,92	0,94	3,04	0,50	2,52
0,04	0,75	3,27	5,01	1,99	1,44	3,04	1,35	0,56	1,62
1,73	1,44	3,10	1,09	3,41	7,77	0,16	2,98	0,97	4,20
0,45	0,52	0,42	0,81	2,32	0,35	1,91	8,39	1,79	3,59
0,76	0,00	0,63	1,41	0,77	4,67	0,03	1,01	0,52	0,05

Вариант 4.

3,41	5,25	8,66	2,42	4,76	1,60	3,62	4,85	3,30	9,28
9,26	4,92	1,32	2,39	4,70	1,19	5,94	4,35	3,18	2,52
5,71	12,32	4,42	2,46	3,38	1,19	5,28	5,82	5,97	6,76
9,45	2,86	2,73	4,36	9,89	6,80	0,18	2,06	1,23	3,56
0,64	4,25	1,77	12,16	0,14	7,60	7,15	4,57	1,68	0,21
2,05	1,53	1,63	1,88	3,50	1,93	4,19	1,88	2,61	3,49
4,94	1,18	5,12	3,98	5,15	0,53	4,25	4,97	6,24	6,08
11,43	4,48	1,45	1,38	0,81	5,43	6,18	7,89	2,10	2,70
4,79	3,24	3,99	9,62	1,28	3,90	4,13	4,82	1,66	7,84
1,45	4,79	3,98	5,34	1,67	5,56	5,72	6,38	3,91	1,49

Вариант 5.

4,93	2,12	2,63	1,28	2,61	46,88	2,66	3,73	3,40	4,38
9,58	1,21	0,69	3,37	2,41	2,47	13,98	3,09	2,63	21,88
1,17	9,04	2,96	2,84	14,75	3,95	4,17	2,40	5,04	2,83
0,74	1,39	3,52	0,55	27,23	2,68	8,21	2,12	6,40	1,99
1,08	4,23	3,82	2,59	4,61	1,14	2,09	3,74	2,14	3,54
92,24	2,83	3,63	40,08	6,88	7,57	57,09	8,03	75,41	1,97
0,68	4,53	4,94	0,19	5,59	4,94	2,47	7,34	6,76	5,38
2,08	0,93	5,86	3,91	4,56	37,38	3,70	1,46	4,31	2,58
4,59	2,60	3,77	3,94	3,33	2,30	3,97	40,48	14,45	7,01
5,99	1,55	4,48	3,18	2,98	3,41	18,20	2,34	0,28	0,66

Вариант 6.

0,07	4,78	16,43	1,45	3,14	1,90	3,32	29,29	2,24	0,12
2,74	1,50	1,42	7,62	0,48	0,37	0,38	1,68	0,36	0,13
6,14	1,50	5,23	0,26	0,58	6,69	6,22	0,58	0,79	2,85
5,55	1,33	11,17	0,14	0,78	0,37	13,00	23,48	1,02	0,46
4,44	0,91	1,73	0,02	1,48	3,45	0,75	0,65	1,03	4,94
3,95	0,89	5,11	2,42	1,62	0,56	5,37	1,57	0,01	2,11
0,08	4,05	0,35	0,71	0,15	3,29	7,35	1,05	0,57	0,25
0,56	0,08	29,12	31,60	0,85	0,32	0,16	0,18	4,01	1,71
0,22	1,05	1,50	0,96	0,85	1,64	0,87	2,15	0,09	0,18
2,37	1,07	0,12	3,08	0,24	0,99	1,93	0,17	4,86	2,50

Вариант 7.

0,97	0,32	0,31	0,51	0,48	0,38	0,11	0,72	0,60	0,47
0,07	0,52	0,05	0,09	0,11	0,25	0,98	0,41	0,00	0,07
0,36	6,83	0,62	0,27	0,63	0,11	0,36	1,52	0,24	0,34
0,04	0,64	0,55	0,46	1,55	0,07	0,05	1,68	1,55	0,45
0,37	0,52	0,27	0,30	0,03	3,31	0,09	0,18	2,64	0,49
0,89	0,36	1,37	0,42	0,04	0,16	0,20	0,15	0,08	1,11
1,54	0,18	11,29	0,29	0,12	0,18	0,28	0,08	1,47	2,20
1,08	3,49	0,64	0,97	0,03	0,21	0,90	4,01	0,38	0,05
1,05	0,95	0,91	1,52	0,15	0,14	1,12	1,60	0,29	0,13
0,56	2,78	0,11	25,98	3,13	0,06	4,14	1,56	1,37	0,50

Вариант 8.

14,78	5,88	2,03	8,86	13,16	7,44	7,81	11,34	10,38	13,17
7,00	12,44	10,86	12,15	6,44	13,43	7,94	4,80	9,55	4,50
5,01	11,31	14,26	6,34	10,13	7,65	12,01	5,19	5,69	17,97
7,30	7,01	16,28	12,00	14,82	2,90	7,18	9,31	14,23	12,54
2,38	9,04	1,73	17,93	3,03	4,48	14,27	14,62	2,16	13,29
15,87	5,12	11,18	12,15	13,23	10,37	13,40	16,85	5,65	17,32
16,93	17,25	6,81	13,77	3,16	10,81	10,26	9,36	10,68	4,88
6,24	18,48	3,15	6,71	13,40	22,71	4,75	4,97	9,08	11,09
12,92	5,39	6,64	9,39	10,70	5,93	11,35	3,92	12,22	4,89
4,18	4,75	10,97	24,92	6,85	6,94	7,21	13,25	14,35	1,93

Вариант 9.

3,36	0,88	0,62	0,65	3,95	2,19	8,10	2,54	5,06	0,85
6,56	0,63	0,40	0,37	0,73	0,16	0,10	0,43	1,32	0,94
1,47	2,59	2,96	2,23	2,51	0,21	3,62	2,24	2,12	3,59
0,42	5,47	2,53	1,36	0,62	1,20	1,56	1,68	4,17	3,66
1,92	6,12	1,54	0,00	2,74	1,69	0,74	0,42	0,43	1,75
0,56	0,63	0,92	0,62	3,45	0,98	2,67	1,48	0,29	0,55
1,41	0,10	0,85	0,64	0,31	2,28	2,11	0,76	1,02	0,28
2,59	2,80	3,72	3,51	2,83	1,26	0,29	0,47	0,65	2,78
0,91	0,95	2,47	3,63	1,62	2,04	0,70	0,86	0,60	2,99
1,18	1,22	0,31	0,42	4,48	1,00	1,50	1,42	1,34	0,53

Вариант 10.

0,98	0,75	0,96	2,46	0,39	0,10	1,68	1,23	2,93	1,49
0,46	0,31	0,94	0,33	0,67	2,28	1,40	1,78	2,28	1,62
1,35	0,26	2,20	1,56	0,36	0,46	0,62	1,81	2,16	1,33
2,14	0,60	1,12	1,84	0,94	0,77	1,02	0,78	1,25	0,57
2,08	0,70	1,05	2,68	1,16	1,73	1,27	0,63	1,18	2,11
2,52	0,19	0,85	1,12	1,20	1,51	1,58	2,01	1,50	0,97
0,17	0,82	2,73	0,84	0,97	1,82	1,27	0,49	1,16	0,67
1,02	0,92	1,81	1,67	2,92	1,61	0,63	0,35	0,56	0,68
1,99	1,27	3,08	0,93	0,29	0,42	2,65	1,69	0,28	0,90
0,55	0,94	0,77	1,73	0,72	0,53	1,52	1,64	1,78	0,89

Вариант 11.

4,95	6,53	2,35	2,17	2,31	0,35	1,76	2,85	4,75	1,14
2,88	2,37	6,41	1,62	1,27	3,39	4,71	2,25	3,22	1,60
3,24	2,15	3,50	3,96	4,20	4,05	4,96	5,43	4,16	4,67
2,40	3,83	3,40	1,79	3,21	8,55	1,99	4,26	4,29	3,68
3,22	3,07	7,26	8,10	4,76	1,09	5,31	4,73	3,80	3,51
0,48	3,12	4,30	3,28	2,34	1,05	4,96	8,47	3,00	3,87
3,26	7,17	4,46	1,02	2,86	0,44	3,12	4,10	1,29	0,74
1,32	3,61	3,07	2,88	4,13	6,17	1,06	1,61	8,57	3,03
3,86	3,24	5,02	5,65	2,89	9,23	5,79	4,56	7,22	1,86
4,61	7,82	3,39	2,79	3,97	2,78	5,20	1,45	5,87	1,77

Вариант 12.

7,39	0,68	39,45	16,48	23,22	1,68	23,75	0,11	20,11	6,20
1,18	2,07	16,35	0,42	4,42	4,92	9,58	17,68	9,43	7,80
29,68	2,07	28,11	8,70	4,03	0,48	29,81	4,06	3,37	1,14
0,58	2,29	0,29	7,86	12,44	9,51	0,25	0,14	2,84	10,17
0,73	3,08	17,88	6,80	2,10	24,11	12,23	11,50	14,08	27,55
25,40	13,16	0,63	20,82	17,36	10,85	0,60	1,99	6,85	1,52
6,42	25,64	5,00	3,63	6,01	0,99	31,46	14,15	10,97	5,46
10,90	6,46	0,11	0,10	3,23	5,14	5,98	8,16	25,54	17,79
8,41	2,77	16,77	2,96	3,22	1,92	13,03	19,78	7,51	8,15
20,61	14,30	6,17	23,02	8,52	13,81	1,65	5,90	0,67	21,11

Вариант 13.

0,03	0,14	0,02	0,10	9,47	0,63	1,04	2,74	0,08	0,30
0,08	0,02	0,29	0,36	0,50	0,03	2,61	0,61	5,44	3,65
0,14	0,04	4,72	0,02	0,01	0,68	0,06	0,12	0,20	1,24
1,49	0,02	0,08	0,13	0,02	0,64	0,46	0,77	0,28	0,08
0,75	0,00	1,70	0,07	0,11	2,26	0,05	1,20	0,47	0,29
0,24	2,78	0,13	1,21	0,75	2,29	8,23	0,99	1,98	0,34
0,72	0,32	0,10	0,34	0,84	0,24	0,82	0,84	0,18	1,89
0,15	0,93	2,05	6,39	0,07	0,40	0,15	0,08	0,40	0,25
0,54	0,08	0,05	0,02	5,68	0,55	3,08	0,99	10,61	1,24
0,60	0,30	0,04	0,05	0,81	0,16	0,05	2,25	0,35	0,31

Вариант 14.

8,62	0,04	13,50	10,30	8,72	10,86	5,93	8,84	6,20	9,78
7,31	9,41	4,10	1,36	9,41	5,37	6,68	10,51	8,54	9,46
8,85	10,73	7,25	4,19	13,38	2,83	9,10	6,85	4,66	6,24
5,91	0,53	9,30	8,47	8,42	4,33	9,02	8,99	3,54	8,92
7,13	5,78	8,53	8,33	6,36	8,69	11,95	6,30	10,72	10,33
14,78	5,88	11,41	6,27	5,68	4,99	11,02	8,27	13,87	6,54
5,42	10,02	6,48	2,11	3,56	10,00	8,17	8,19	10,15	4,69
10,65	10,00	8,11	8,58	8,25	2,67	7,95	7,65	7,07	6,65
7,24	9,46	1,70	10,51	8,63	0,96	7,34	8,69	3,82	7,75
7,54	8,29	7,98	7,45	14,25	8,15	4,15	11,53	5,01	7,28

Вариант 15.

0,11	1,53	0,94	0,21	0,77	1,10	0,23	0,15	0,79	0,71
1,17	0,01	0,45	1,55	1,48	0,09	0,01	1,00	1,25	1,35
0,52	1,61	2,16	0,64	0,19	0,02	0,20	1,43	0,74	0,21
0,41	0,80	0,41	0,31	1,26	0,75	1,05	2,04	0,42	1,06
0,33	0,30	0,34	0,10	1,54	0,67	0,40	0,15	0,98	1,04
1,55	1,58	1,78	0,71	0,75	0,48	0,18	0,49	0,07	0,90
1,04	2,75	1,03	0,76	2,53	0,27	0,92	1,17	0,85	1,83
0,35	1,07	0,02	1,64	0,35	0,86	0,06	0,69	2,16	0,54
1,20	0,57	1,57	0,05	0,34	0,83	0,28	0,48	1,85	0,93
0,91	1,50	1,08	0,53	0,53	0,29	0,77	1,13	0,76	2,30

Вариант 16.

7,42	7,97	10,85	7,65	5,79	7,62	5,90	11,17	8,31	6,79
6,69	3,12	5,97	8,61	3,69	9,43	12,31	10,46	10,34	8,76
9,63	8,83	7,69	10,17	7,72	9,99	3,45	9,95	8,17	10,74
7,27	5,81	6,58	3,74	7,09	5,20	2,45	10,62	4,44	10,24
4,72	7,88	5,60	8,83	9,61	6,60	5,64	6,34	7,57	1,87
8,14	10,78	9,91	11,19	6,74	5,45	9,51	3,50	4,08	5,59
3,45	12,51	10,86	8,62	7,22	7,32	4,04	8,06	2,81	7,62
0,59	6,19	4,89	6,97	8,36	7,94	6,82	7,46	6,62	8,31
6,07	8,66	6,60	8,56	7,09	3,15	6,62	7,13	8,78	8,24
17,94	12,91	10,80	1,05	12,64	7,53	8,62	7,91	9,09	5,91

Вариант 17.

0,50	0,82	0,80	3,58	0,20	1,44	0,64	0,02	2,04	0,15
0,88	0,61	1,55	0,56	0,28	0,00	0,62	0,59	1,56	1,56
2,58	0,69	0,12	1,22	0,64	0,12	0,76	0,63	2,48	1,70
0,10	4,98	1,06	0,04	0,33	0,20	2,13	0,25	1,05	2,08
0,44	0,62	1,16	0,15	0,02	0,02	1,27	0,92	0,29	0,07
0,15	1,40	0,89	0,86	1,39	0,51	0,26	0,65	3,93	0,19
3,31	0,83	0,20	2,11	0,26	3,07	2,34	0,98	1,26	0,39
3,08	0,09	2,02	6,26	4,76	2,36	1,41	0,34	0,17	0,18
1,82	3,53	0,49	1,31	0,63	0,01	0,42	4,57	0,55	1,13
0,79	2,25	0,66	1,03	0,94	0,81	1,29	2,07	0,09	2,70

Вариант 18.

5,70	11,67	0,99	3,27	2,27	9,66	2,21	15,04	2,68	6,21
10,48	9,16	3,29	12,61	7,17	6,88	4,92	3,06	4,97	5,54
1,62	9,16	1,76	5,21	7,43	12,35	1,61	7,41	7,91	10,56
11,98	8,90	13,34	5,51	4,12	4,94	13,62	14,67	8,36	4,74
11,52	8,15	3,02	5,94	9,12	2,17	4,17	4,36	3,75	1,81
2,03	3,95	11,81	2,58	3,11	4,54	11,91	9,25	5,92	9,90
6,11	2,00	6,83	7,71	6,30	10,88	1,48	3,73	4,51	6,58
4,53	6,10	15,03	15,16	8,02	6,75	6,32	5,40	2,01	3,04
5,31	8,42	3,22	8,25	8,03	9,35	3,98	2,73	5,65	5,41
2,61	3,70	6,22	2,30	5,27	3,80	9,70	6,36	11,70	2,54

Вариант 19.

0,97	0,32	0,31	0,51	0,48	0,38	0,11	0,72	0,60	0,47
0,07	0,52	0,05	0,09	0,11	0,25	0,98	0,41	0,00	0,07
0,36	6,83	0,62	0,27	0,63	0,11	0,36	1,52	0,24	0,34
0,04	0,64	0,55	0,46	1,55	0,07	0,05	1,68	1,55	0,45
0,37	0,52	0,27	0,30	0,03	3,31	0,09	0,18	2,64	0,49
0,89	0,36	1,37	0,42	0,04	0,16	0,20	0,15	0,08	1,11
1,54	0,18	11,29	0,29	0,12	0,18	0,28	0,08	1,47	2,20
1,08	3,49	0,64	0,97	0,03	0,21	0,90	4,01	0,38	0,05
1,05	0,95	0,91	1,52	0,15	0,14	1,12	1,60	0,29	0,13
0,56	2,78	0,11	25,98	3,13	0,06	4,14	1,56	1,37	0,50

Вариант 20.

7,85	1,86	4,19	5,47	8,23	4,24	9,30	9,08	5,68	5,64
10,54	5,33	3,08	3,99	6,61	10,50	9,27	7,10	4,72	8,00
9,94	7,11	13,96	2,88	1,28	9,98	3,76	6,88	2,15	2,60
2,21	9,58	4,43	1,67	10,24	4,52	3,49	6,30	3,49	9,16
11,01	5,15	4,78	1,61	5,38	6,18	8,18	6,41	11,49	5,97
10,15	3,31	10,21	7,57	9,18	4,20	8,43	10,56	1,44	14,36
4,25	2,77	10,02	7,82	9,04	2,68	1,97	1,19	9,48	5,19
7,37	5,75	4,77	2,24	5,88	7,84	4,01	3,80	3,85	4,04
14,38	2,31	4,32	5,91	6,86	3,02	3,98	10,63	2,64	14,44
5,04	7,12	9,09	8,97	5,60	4,65	5,40	6,76	9,76	6,17