# Вычислительная математика

## Лекция 2. Численные методы решения нелинейных уравнений

Исупов К. С.
isupov.k@gmail.com

21 сентября 2017 г.

# План

1. Постановка задачи
2. Локализация корней
3. Уточнение корней
4. Методы уточнения корней
   - Метод половинного деления (бисекции, дихотомии)
   - Метод хорд
   - Метод касательных Ньютона
   - Модифицированный метод Ньютона
   - Метод секущих
   - Комбинированный метод хорд и касательных
   - Метод простых итераций (Fixed-point iteration)
     - Неподвижные точки функции
     - Алгоритм простых итераций
     - Условия сходимости
     - Выбор начального приближения и скорость сходимости
     - Преобразование уравнения к каноническому виду
     - Критерий останова
     - Наибольшая скорость сходимости

# Постановка задачи

Нелинейное уравнение с одним неизвестным можно записать в виде:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ — некоторая функция аргумента $x$.

## Определение

1. Функция $f(x)$ имеет **корень (однократный корень, простой корень)** $x = r$, если $f(r) = 0$.
2. Если в точке $x = r$ наряду с функцией обращаются в ноль и ее производные до $(k-1)$-го порядка, то число $r$ — **корень кратности** $k$.

## Типы нелинейных уравнений

1. Алгебраические: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$.
2. Трансцендентные: $2^x - 2\cos(x) = 0, \lg(x+5) = \cos(x)$.

## Методы решения нелинейных уравнений

1. Прямые (аналитические, точные). Позволяют записать решение в виде формулы.
2. Численные. Позволяют получить приближения корней с любой заданной точностью.

## Этапы численного решения нелинейных уравнений

1. Локализация, т.е. отделение корней (Bracketing a root).
2. Уточнение корней, т.е. вычисление приближенных значений корней с заданной точностью.

# Локализация корней

## Задачи

1. Определить, что на заданном отрезке $[a, b]$ существуют корни.
2. Определить, что на заданном отрезке $[a, b]$ корень единственный.

## Теорема о существовании корней

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а на концах отрезка ее значения имеют разные знаки, т.е. $f(a)f(b) < 0$, то на этом отрезке расположен, по крайней мере, один корень.

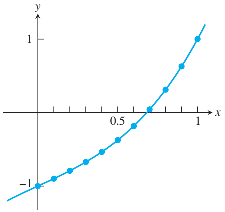



Рис. 1: **График функции $f(x) = x^3 + x - 1$. $f(0)f(1) = -1 \cdot 1 < 0$, функция имеет корень на отрезке $[0, 1]$, т.е. найдется такое число $r$, что $f(r) = 0$**

## Теорема о единственности корня

Пусть дана функция $f(x)$, причем на отрезке $[a, b]$ она непрерывна и дифференцируема, и имеет разные знаки на концах, т.е. $f(a)f(b) < 0$. Тогда на этом отрезке содержится ровно один корень, если $f(x)$ монотонна, т.е. $f'(a)f'(b) > 0$.

# Локализация корней

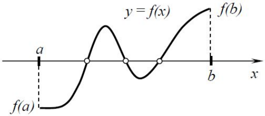



Рис. 2: **Отделение корней. Функция $f(x)$ не монотонна на отрезке $[a, b]$**

## Способы отделения корней

1. Аналитический (нахождение интервалов монотонности функции).
2. Графический (построение графика функции $y = f(x)$ и поиск пересечения $y$ с осью абсцисс, либо построение графика $f(x_1) = f(x_2)$ и поиск точки пересечения этих функций).
3. Табличный.

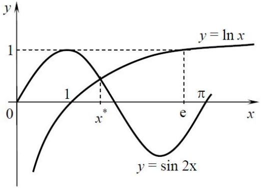



Рис. 3: **Графическое отделение корней уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$**

# Уточнение корней

На данном этапе получается приближенное значение корня, принадлежащего отрезку $[a, b]$, с заданной точностью $\varepsilon$. Т.е. вычисленное значение корня $x$ должно отличаться от точного $r$ не более, чем на величину $\varepsilon$:

$$|r - x| \leq \varepsilon.$$

**Этапы уточнения корней**

1. Выбор начального приближения к корню $x_0 \in [a, b]$.
2. Вычисление по некоторой формуле последующих приближений $x_1, x_2, \dots$ (итерационный процесс).

Если значения $x_k$ с ростом $k$ стремятся к точному значению корня:

$$\lim_{k \to \infty} \{x_k\} = r,$$

то говорят, что итерационный процесс **сходится**.
Сходимость итерационного процесса: погрешность каждого последующего приближения должна быть меньше погрешности предыдущего приближения, т.е. погрешность приближенных значений с каждым шагом должна уменьшаться:

$$|r - x_{k+1}| < |r - x_k|.$$

В общем случае это неравенство можно представить в виде:

$$|r - x_{k+1}| < q|r - x_k|^{\alpha},$$

где $q > 0$ и $\alpha > 0$ — числа, значения которых определяются методом уточнения корня. Главный показатель сходимости метода — значение $\alpha$, называемое **порядком сходимости**. При $\alpha = 0$ сходимость линейная, при $\alpha > 0$ — сверхлинейная.

# Метод половинного деления (бисекции, дихотомии)

Пусть дано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0.$$

Считаем, что отделение корней проведено и на отрезке $[a, b]$ расположен один корень, который нужно уточнить с погрешностью $\varepsilon$.

## Алгоритм

1. В качестве начального приближения корня примем середину отрезка: $c_0 = (a + b)/2$.
2. Исследуем значение функции $f(x)$ на концах отрезков $[a, c_0]$ и $[c_0, b]$: тот из отрезков, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень, поэтому принимаем его в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$. Вторую же половину отрезка $[a, b]$, на которой $f(x)$ не меняет знак, отбрасываем.
3. В качестве следующего приближения корня принимаем середину нового отрезка: $c_1 = (a_1 + b_1)/2$, и повторяем пункт 2. Таким образом, $k$-е приближение вычисляется как:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

4. Условия прекращения итерационного процесса:

$$|r - c_k| < \varepsilon. \tag{2}$$

Так как

$$|r - c_k| < \frac{|b_k - a_k|}{2},$$

то (2) будет выполнено, если:

$$|b_k - a_k| < 2\varepsilon. \tag{3}$$

# Метод половинного деления (бисекции, дихотомии)

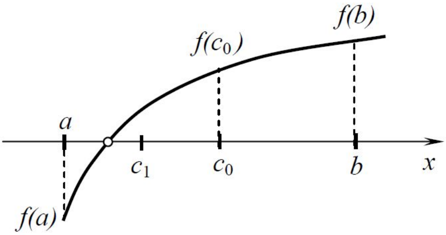



Рис. 4: Метод дихотомии

**Преимущества**

1. Безусловная сходимость.
2. Простота, применим для любых уравнений.

**Недостатки**

Медленный (линейная сходимость): с каждым шагом погрешность уменьшается в два раза:

$$|r - c_{k+1}| \leq \frac{1}{2}|r - c_k|.$$

# Метод хорд

Очередное приближение в отличие от метода дихотомии берем не в середине отрезка, а в точке $x_0$, где пересекает ось абсцисс прямая линия (хода), проведенная через точки $A$ и $B$:

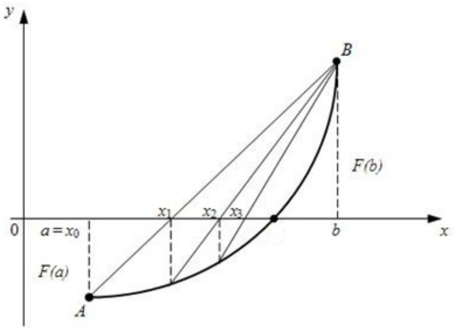



Рис. 5: Метод хорд

Уравнение прямой, проходящей через точки $A$ и $B$:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{4}$$

Для точки пересечения с осью абсцисс ($x = x_0$, $y = 0$) получим уравнение:

$$x_0 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}. \tag{5}$$

Это и есть первое приближенное значение корня. В качестве нового интервала изоляции выбираем $[x_0, b]$, где функция меняет знак.

# Метод хорд

## Расчетные формулы

В зависимости от вида функции, неподвижной может быть точка $a$ или $b$.

1. Когда неподвижен правый конец ($b$), а $x_0 = a$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{b - x_k}{f(b) - f(x_k)}. \tag{6}$$

2. Когда неподвижен левый конец ($a$), а $x_0 = b$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - a}{f(x_k) - f(a)}. \tag{7}$$

*Неподвижным будет тот конец интервала изоляции, для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$, а последовательные приближения лежат по другую сторону корня.*

## Оценка погрешности

$$m = \min_{[a,b]} |f'(x)|; \qquad M = \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Если не накладывается ограничений на длину интервала изоляции, то погрешность оценивается по формуле:

$$|r - x_k| \leq f(x_k)/m. \tag{8}$$

Чаще стремятся сузить интервал изоляции корня до выполнения неравенства: $M \leq 2m$. Тогда погрешность оценивают по формуле:

$$|r - x_k| \leq |x_k - x_{k-1}|. \tag{9}$$

# Метод касательных Ньютона

Пусть известно начальное приближение $x_0$. Проведем в этой точке касательную к кривой $y = f(x)$:

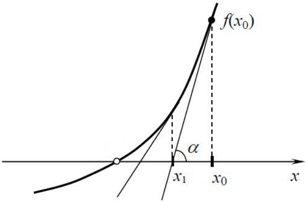



Рис. 6: Метод Ньютона

Эта касательная пересечет ось абсцисс в точке $x_1$, которая рассматривается в качестве следующего приближения. Значение $x_1$ находится из уравнения:

$$tg\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0). \tag{10}$$

Выражая $x_1$, имеем

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{11}$$

В общем случае:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, \dots \tag{12}$$

Функция $f(x)$ должна быть дифференцируемой и $f'(x)$ в окрестности корня не должна менять знак.

Условия окончания итерационного процесса те же, что и для метода хорд.

# Метод касательных Ньютона

## Другой способ вывода метода

Пусть $x_0$ — некоторое начальное приближение корня. Заменим функцию $f(x)$ в окрестности точки $x_0$ отрезком ряда Тейлора:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Вместо нелинейного уравнения $f(x) = 0$ решим линеаризованное уравнение относительно $x_1$:

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0. \tag{13}$$

Будем рассматривать решение этого уравнения как следующее приближение к искомому значению корня:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{14}$$

## Скорость сходимости

- Скорость сходимости метода определяется модулем первой производной функции в окрестности корня: чем больше крутизна графика, тем меньше поправка, которую надо прибавить к $n$-у приближению, чтобы получить $(n+1)$-е приближение.
- На каждом шаге погрешность пропорциональна квадрату погрешности на предыдущем шаге. Следовательно, сходимость квадратичная.

## Выбор начального приближения

Если задан отрезок $[a, b]$, содержащий корень, и известно, что функция $f(x)$ монотонна на этом отрезке, то в качестве начального приближения $x_0$ следует выбрать ту границу отрезка $[a, b]$, где совпадают знаки функции $f(x)$ и ее второй производной $f''(x)$.

# Модифицированный метод Ньютона

1. Зачастую нахождение производной может быть сопряжено с существенными затратами.
2. В модифицированном методе Ньютона производная вычисляется только в начальной точке ($x_0$), а расчетные формулы имеют вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}.$$

# Метод секущих

Производную в окрестности точки $x_k$ заменяют разностной аппроксимацией:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \qquad (15)$$

После подстановки в формулу Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

имеем:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad (16)$$

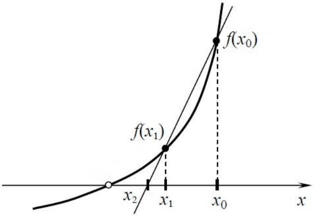



Рис. 7: Метод секущих: секущая, проведенная через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ пересекает ось абсцисс в точке $x_2$, значение которой определяется формулой (16)

Для начала итерационного процесса нужно задать два начальных приближения: $x_0$ и $x_1$ (можно выбрать границы интервала изоляции).

# Комбинированный метод хорд и касательных

Суть комбинированного метода состоит в том, чтобы сузить интервал изоляции **с двух сторон**.

## Расчетные формулы

В зависимости от неподвижного конца интервала изоляции используются две пары формул, и на каждом шаге вычисляются приближенное значение корня по недостатку $x_{k+1}$ и по избытку $\widetilde{x}_{k+1}$.

1. Если неподвижна точка $a$:
   - **значение по недостатку вычисляется методом касательных:**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad x_0 = a;$$

   - **значение пои избытку вычисляется методом хорд:**

$$\widetilde{x}_{k+1} = \widetilde{x}_k - f(\widetilde{x}_k)\frac{\widetilde{x}_k - x_k}{f(\widetilde{x}_k) - f(x_k)}, \qquad \widetilde{x}_0 = b;$$

2. Если неподвижна точка $b$:
   - **значение по недостатку вычисляется методом хорд:**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\widetilde{x}_k - x_k}{f(\widetilde{x}_k) - f(x_k)}, \qquad x_0 = a;$$

   - **значение пои избытку вычисляется методом касательных:**

$$\widetilde{x}_{k+1} = \widetilde{x}_k - \frac{f(\widetilde{x}_k)}{f'(\widetilde{x}_k)}, \qquad \widetilde{x}_0 = b;$$

На каждом новом шаге расчета используют суженный с двух сторон интервал $[x_k, \widetilde{x}_k]$.

# Метод простых итераций. Неподвижные точки функции

### Пример

1. Выберем произвольный аргумент, например $x = 1.85$.
2. Посчитаем значение функции $\cos x = \cos(1.85) \approx -0.275590$.
3. Посчитаем значение функции $\cos(-0.275590) \approx 0.962265$.
4. Посчитаем значение функции $\cos(0.962265) \approx 0.571663$.
5. ...
6. В результате придем к числу $0.73908513322$ То есть

$$\cos\cos\cos\cos\ldots\cos x \to 0.73908513322, \qquad \text{где } x \text{ — произвольное число.}$$

Таким образом, если $\xi = 0.73908513322$, то $\cos(\xi) = \xi$, и $\xi$ — это *неподвижная точка* для $\cos$.

### Определение

Вещественное число $\xi$ называется неподвижной точкой функции $\phi$, если $\phi(\xi) = \xi$.

### Применение

Пусть, например, дано уравнение $\cos x - x = 0$. С точки зрения неподвижных точек это уравнение может быть записано в виде:

$$x = \cos x. \tag{17}$$

Очевидно, что если значение функции совпадает со значением аргумента, то есть $\xi$ — неподвижная точка функции $\cos x$, то $\xi$ и есть корень уравнения (17).

# Метод простых итераций. Алгоритм

Пусть дано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0.$$

Считаем, что отделение корней проведено и на отрезке $[a, b]$ расположен один корень $\xi$, который нужно уточнить с погрешностью $\varepsilon$.

**Алгоритм**

1. Преобразуем уравнение к каноническому виду:

$$f(x) = 0 \to x = \phi(x). \tag{18}$$

2. Выберем начальное приближение $x_0$ — любую точку из интервала $[a, b]$.
3. Итерационный процесс осуществляем в соответствии с рекуррентным соотношением:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

   В развернутом виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi(x_0), \\ x_2 &= \phi(x_1), \\ x_3 &= \phi(x_2), \\ &\ldots \text{profit!} \end{aligned}$$

Доказано, что при определенных свойствах функции $\phi(x)$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню $\xi$ уравнения $f(x) = 0$.

**Главный вопрос**: при каких условиях итерационный процесс (19) будет сходиться?

# Метод простых итераций. Условия сходимости

## Геометрическая интерпретация сходящегося процесса

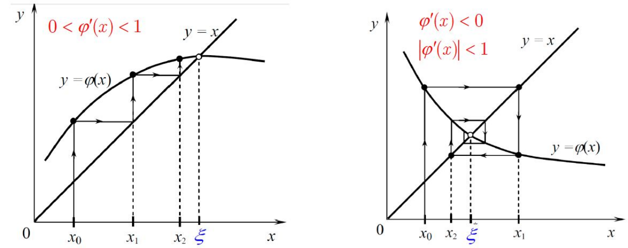



Рис. 8: Монотонно (слева) и двусторонне (справа) сходящиеся последовательности

## Геометрическая интерпретация расходящегося процесса

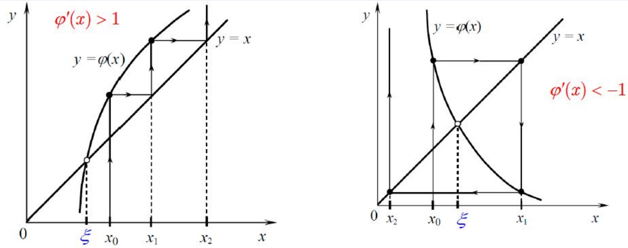



Рис. 9: Монотонно (слева) и двусторонне (справа) расходящиеся последовательности

# Метод простых итераций. Условия сходимости

## Теорема о сходимости итерационного процесса

Итерационный процесс сходится при условии, что первая производная итерационной функции $\phi(x)$ по модулю меньше единицы.

**Доказательство**.

1. Представим $n$-е и $(n+1)$-е приближения в форме
$$x_n = \xi + \varepsilon_n, \qquad x_{n+1} = \xi + \varepsilon_{n+1}, \tag{20}$$
где $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}$ — отклонения от корня.
2. Функцию $\phi(x)$ в окрестности точки $\xi$ заменим двумя первыми членами ряда Тейлора:
$$\phi(x) \approx \phi(\xi) + \varepsilon\phi'(\xi). \tag{21}$$
3. Тогда итерационная формула $x_{n+1} = \phi(x_n)$ примет вид
$$\xi + \varepsilon_{n+1} = \phi(\xi) + \varepsilon_n\phi'(\xi). \tag{22}$$
4. Поскольку $\xi$ — корень уравнения, то $\xi = \phi(\xi)$, откуда следует, что
$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n\phi'(\xi). \tag{23}$$
5. Для сходимости итерационного процесса необходимо и достаточно, чтобы
$$|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|, \tag{24}$$
следовательно, для любого $x$ в окрестности точки $\xi$ должно выполняться условие:

$|\phi'(x)| < 1$, что непосредственно следует из (23).

# Метод простых итераций. Выбор начального приближения и скорость сходимости

1. Если условие
$$|\phi'(x)| < 1 \tag{25}$$
выполняется, то на отрезке $[a, b]$, на котором локализован корень, в качестве начального приближения можно взять **любую** точку $x_0 \in [a, b]$.

2. Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной: чем меньше $|\phi'(x)|$, тем быстрее сходится процесс, что непосредственно следует из формулы (23):
$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \phi'(\xi). \tag{26}$$

# Метод простых итераций. Преобразование уравнения к каноническому виду

**Задача**: для заданного уравнения $f(x) = 0$ построить функцию $\phi(x)$ так, чтобы выполнялось условие (25):

$$|\phi'(x)| < 1.$$

**Пример**

Пусть дано уравнение

$$x^3 - x - 1 = 0, \tag{27}$$

и известно, что один из корней расположен на $I = [1, 2]$.

1. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$x = x^3 - 1. \tag{28}$$

   Проверим условие сходимости для точки $x_0 = mid(I) = 1.5$:

$$\phi(x) = x^3 - 1, \qquad \phi'(x) = 3x^2, \qquad |\phi(1.5)| = 6.75 > 1.$$

2. Преобразуем уравнение другим способом:

$$x^3 = x + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{x+1}. \tag{29}$$

   Проверим условие сходимости для точки $x_0 = mid(I) = 1.5$:

$$\phi(x) = \sqrt[3]{x+1}, \qquad \phi'(x) = \frac{1}{3(x+1)^{2/3}}, \qquad |\phi(1.5)| = 0.133 < 1.$$

# Метод простых итераций. Преобразование уравнения к каноническому виду

## Общий алгоритм преобразования уравнения к итерационному виду

1. Умножить левую и правую части уравнения $f(x) = 0$ на произвольную константу $k \neq 0$:
$$k \cdot f(x) = 0 \cdot k.$$

2. Добавить к обоим частям уравнения неизвестное $x$:
$$k \cdot f(x) + x = 0 \cdot k + x \Leftrightarrow x = x + k \cdot f(x).$$

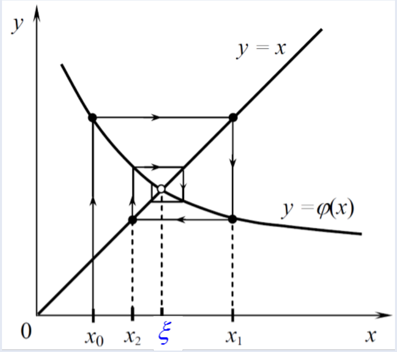
3. Полученное уравнение, очевидно, эквивалентно уравнению
$$x = \phi(x)$$
с функцией $\phi(x) = x + k \cdot f(x)$. Произвольный выбор константы $k$ позволяет обеспечить выполнение условия сходимости $|\phi'(x)| < 1$.

4. Поскольку $\phi'(x) = 1 + k \cdot f'(x)$, то значение $k$ следует выбирать таким образом, чтобы в окрестности корня выполнялось условие:
$$|\phi'(x)| = |1 - k \cdot f'(x)| < 1. \tag{30}$$
Например, если
$$|k| < \frac{2}{\max|f'(x)|}, \qquad \operatorname{sgn}(k) = \operatorname{sgn}(f'(x)), \tag{31}$$
то условие (30) выполняется.

# Критерий останова

## Двусторонняя сходимость

Если $\phi'(x) < 0$, то сходимость двусторонняя:




В этом случае

$$|x_{n+1} - x_n| > |xn + 1 - \xi|, \tag{32}$$

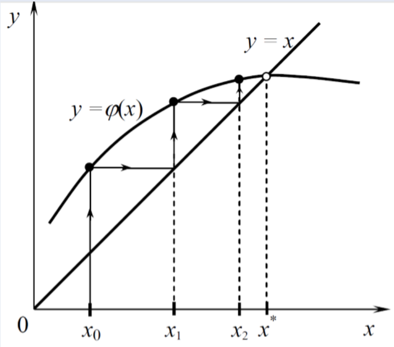
и критерий окончания итерационного процесса

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \tag{33}$$

является объективным.

## Монотонная сходимость

Если $\phi'(x) > 0$, то сходимость односторонняя:




В этом случае контроль достигнутой точности следует осуществлять по проверке неравенства:

$$\frac{1}{1-q}|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon, \tag{34}$$

где

$$q = \max_{[a,b]} |\phi'(x)|.$$

# Метод простых итераций. Наибольшая скорость сходимости

Наибольшая скорость сходимости итерационного процесса:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \qquad n = 1, 2, \dots \tag{35}$$

достигается при

$$\phi'(x) = 0.$$

Этого можно добиться, если выбрать параметр $k$ в уравнении

$$\phi(x) = x + k \cdot f(x) \tag{36}$$

зависящим от $x$ в виде

$$k = -\frac{1}{f'(x)}. \tag{37}$$

При этом итерационная формула 35 переходит в формулу метода касательных Ньютона:

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{38}$$