[ТФКП. 3](#_Toc516100983)

[1. Основные элементарные функции комплексного переменного (показательная, логарифмическая, степенная). 3](#_Toc516100984)

[2. Основные элементарные функции комплексного переменного (тригонометрическая и обратные тригонометрические). 5](#_Toc516100985)

[3. Дифференцирование функции комплексного переменного (определение производной, условие Коши-Римана, понятие аналитической функции). 6](#_Toc516100986)

[4. Гармонические и сопряженные гармонические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. 10](#_Toc516100987)

[5. Интегральное счисление функции комплексного переменного. 12](#_Toc516100988)

[6. Теорема Коши. Интеграл Коши. Следствие из интегральной формулы Коши. 15](#_Toc516100989)

[7. Ряды в комплексной области. Признаки сходимости. Нахождение области сходимости степенного ряда. 20](#_Toc516100990)

[8. Ряды Тейлора и Лорана. 23](#_Toc516100991)

[9. Нули аналитической функций. Порядок нуля. 27](#_Toc516100992)

[10. Изолированные и особые точки, их классификация. 29](#_Toc516100993)

[11. Определение вычета. Вычисление вычетов. 32](#_Toc516100994)

[12. Применение вычетов к вычислению интегралов. Теорема Коши. 34](#_Toc516100995)

[Теория вероятностей. 36](#_Toc516100996)

[1. События и их классификация. Определение вероятности события. 36](#_Toc516100997)

[2. Вероятность суммы и произведения событий. Полная вероятность. Формула Байеса. 40](#_Toc516100998)

[3. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число испытании. 44](#_Toc516100999)

[4. Предельные теоремы в схеме Бернулли (теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа и следствия из них). 46](#_Toc516101000)

[5. Дискретные случайные величины: закон распределения, многоугольник распределения, функция распределения. 50](#_Toc516101001)

[6. Числовые характеристики ДСВ, их свойства. 53](#_Toc516101002)

[7. Законы распределения ДСВ(биноминальный, Пуассона, геометрический). 55](#_Toc516101003)

[8. Непрерывные случайные величины: функции распределения и плотности вероятности, их свойства. 57](#_Toc516101004)

[9. Числовые характеристики НСВ. 59](#_Toc516101005)

[10. Законы распределения НСВ (равномерное, показательное, нормальное). 61](#_Toc516101006)

[11. Закон больших чисел: неравенство Маркова и Чебышева, теоремы Чебышева и Бернулли, теорема Ляпунова. 68](#_Toc516101007)

**ТФКП.**

1. **Основные элементарные функции комплексного переменного (показательная, логарифмическая, степенная).**

**Показательная функция**

(\*)

Rew Imw

Свойства:

1. (Доказывается с помощью (\*))
2. (e^z может принимать отрицательные значения )
3. Однозначная функция

**Логарифмическая функция**

| =>

1)

| 2)

Ln(-1)=ln|(-1)| + i( arg(-1) + 2πk)=ln1 + i(π+2πk) = i(π+2πk)

Ln(z) – многозначная функция. Если k = 0 соответствующее значение логарифма называется главным и обозначают –> Ln z = ln|z| + i arg z

Свойства:

1. Ln(z1\*z2)=Ln z1 + Ln z2 (Доказывается, если перейти к тригоном. форме)
2. Ln(z1/z2) = Ln z1 – Ln z2

**Степенная функция**

**,**

* Если α – целое число
* Если α – рациональное число

α = m/n

**-**многозначная функция

1. **Основные элементарные функции комплексного переменного (тригонометрическая и обратные тригонометрические).**

**Тригонометрические функции**

**,**

**,**

Основные тригонометрические формулы для данных функций выполняются.

**Обратные тригонометрические функции**

w = Arcsin z; w =Arccos = z;

w = Arctg z; w = Arcctg z;

* **–** обратная для z = sin w

)

)

)

* **–** обратная для z = tg w

*(*

)

)

Функция является многознач., если при вычислении придать n=0, то получится значения названное главным значением данных функций и обознач. с маленькой буквы a(arcsin z).

1. **Дифференцирование функции комплексного переменного (определение производной, условие Коши-Римана, понятие аналитической функции).**

Пусть однозначная ф. w = f(z) непрерывна в области D и точки z и z+Δz (Δz = Δx+iΔy – приращение аргумента) принадлежат этой области.

Приращением функции называется Δw=f(z0+Δz)-f(z0) = (u(x0+Δx, y0 + Δy) – u(x,y)) + i(v(x0+Δx, y0+Δy) – V(x0, y0))=ΔU+iΔV

**Опр 1.**

Если существует предел отношения приращения функции Δw к приращению аргумента Δz (Δz🡪0), то этот предел называется **производной функции w = f(z)** в точке z и говорят, что функция дифференцируема в данной точке.

**.**

**Замечания:**

1. Δz🡪0 по любому направлению комплексной плоскости
2. Если функция задана в алгебраической форме w = f(z)=U(x,y)+iV(x,y), то для выяснения диф-мости данной функции применяются следующие теоремы:

**Теорема(Коши-Римана)**

Для того чтобы ф. w = U(x,y)+iV(x,y) была дифференцируема в т. необходимо и достаточно, чтобы функции U(x,y) и V(x,y) были диф-мы в точке (x,y) и выполнялись равенства:

**Доказательство:**

1. **Необходимость:**

Дано w = U + iV – дифференц в точке z = x+yi

Доказать

Т. к. w=f(z) дифференц в т. z, существует **.**

**2 случая:**

1. Пусть Δz 🡪 0 по направлению параллельному оси Ох => Δy = 0,

Δz = Δx+iΔy=Δx,

Δw= Δu+iΔv =ΔxU + iΔxV

1. **Достаточность:**

Дано

Доказать w=f(z) – дифференц в т. z = x+iy.

Надо доказать, что

Т.к. ф U и V дифференцируемы в т. (x, y) их полные приращения в этой точке могут быть записаны следующим образом:

**Опр.1**

w = f(z) называется аналитической в т z, если это однозначная функция и она дифференцируема как в самой точке так и в некоторой её окрестности.

Если функция аналитич. в каждой точке z некоторой области D, ее называют **аналитической в области D.**

Функция может быть диф-ма в точке, но не являться аналитической в этой точке.

Точки области D, которые однозначн. функц. w = f(z)

явл. аналитической наз. правильными, а точки, в которых нарушается аналитичность функции называются особыми.

Пусть однозначная функция w = f(z) аналитична в точке z в некоторой области D

Произведение f ’(z) называется главной частью приращения функции.

**Опр. 2**

Диф-лом аналитической функции w = f(z) в точке z называют главную часть приращения функции.

Если функция w = f(z) является аналитической в точке z, то можно восстановить функцию, если известна только действительная или мнимая часть функции.

**1 способ:**

Если известна u=u(x,y), найти V(x,y)

По условию Коши-Римана **,** следует, что

**2 способ: (**восстановление функции с помощью специальных формул при наличии начальных условий)

w = f (z), если известно u(x,y) или V(x,y) и w(z0)=w0

1. **Гармонические и сопряженные гармонические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.**

**Опр1.** называется гармонической в области D, если она имеет в каждой точке этой области непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно и выполняется равенство

Если w=f(z)=U(x,y)+V(x,y)i является аналитической в каждой точки z некоторой области D, то функ U и V гармонические функции. Обратное утверждение не обязательно верно.

Если 2 части функ связаны условием Коши-Римана их называют сопряженными гармоническими ф.. Для аналитической функции w = U(x,y)+V(x,y)i – U и V **сопряж. гармоническ**.

**Геометрический смысл:**

|f’(z0)| показывает какая деформация(растяжение/сжатие) происходит в т. z0 при данном отображении:

Если |f’(z0)| < 1, то сжатие. Если |f’(z0)| > 1 то растяжение, если = 1 растяжение между точками сохраняется.

arg => аргумент модуля производной ф. в точке показывает на какой угол поворачивается кривая при преобразовании w = f(z).

Отображение w = f(z) называется **конморфным**, если при данном отображении сохраняются углы между кривыми и расстояние между точками.

* Если w = f(z) аналитическая в области D и f’(z) ≠ 0 из ꓯz D, то отображение w=f(z) является конморфным
* Если w=f(z) является конморфным в области D, то w=f(z) аналитическая в этой области и f’(z)≠0 для ꓯz D.

# Интеграл от функции комплексного переменного, свойства интеграла, способы вычисления.

Пусть в каждой точке кривой L заданной от точки z0 до z определена непрерывная функция w=f(z).

Разобьем кривую L на n частей точками Z1...Zn-1. на каждой полученной части выберем произвольную точку Ck Zk…Zk+1.

Найдем значение функции в выбранных точках f(Ck). Составим суммы , где ΔZk = Zk-Zk-1. Полученные суммы называются интегральными.

Если существует предел интегральных сумм при, то этот предел называется интегралом от f(z) по дуге L.

Данное понятие сходно с понятием криволинейного интеграла по дуге кривой. Если L – замкнутая кривая, то – интеграл по замкнутому контуру.

**Свойства**:

1. ;

**Способы вычисления интегралов:**

1. Если дуга L задана явно как функция y = f(x) на отрезке [a,b], удобнее выразить (x = f(y) на [0,1], то заменяют переменную и переходят к вычислению неопределенно интеграла.
2. В тех случаях, когда кривая интегрирования L является окружностью или какой-то ее частью, удобно уравнение окружности использовать в параметрическом виде

|Z – Z0| = R, (Z0 = x0 + iy0) – центр окружности, R – радиус

# Теорема Коши. Интеграл Коши. Следствие из интегральной формулы Коши.

**Т(Коши)**. Пусть функция w = f(z) является аналитической в односвязной области D. Тогда интеграл по любому замкнутому контуру L, целиком содержащийся в D, равен нулю:

.

**Док-во:**

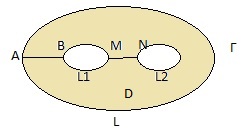
Используется теорема Остроградского – Гаусса:

т.к. f(z) – аналитическая, то (w = u+iv)

по т. Остроградского – Гаусса

**Следствия:**

1. Теорема Коши распространяется и на многосвязную область.



.

**Док-во:**

Разрезав область D линиями AB и MN получаем односвязную область по контуру Г.

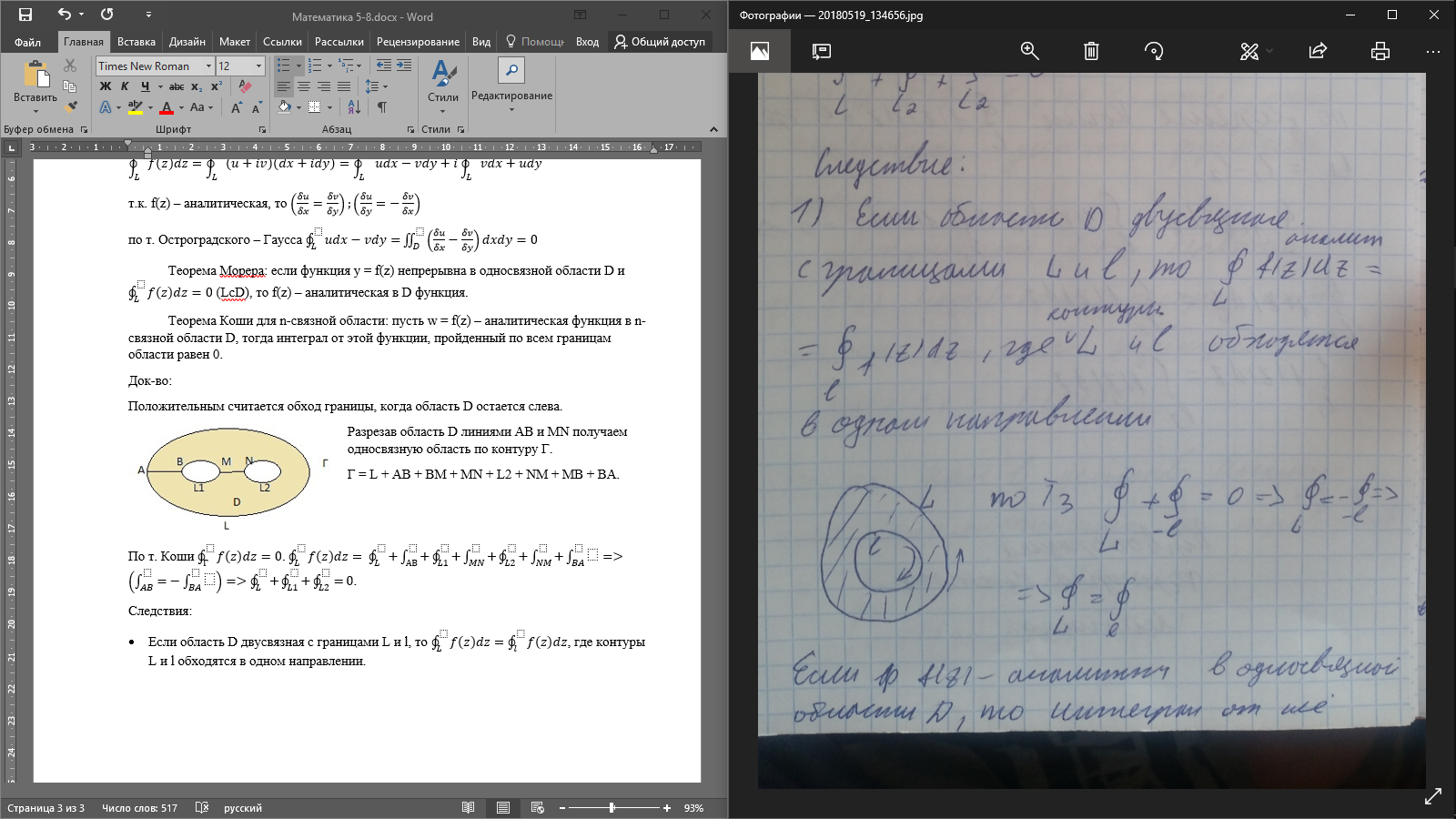
Г = L + AB + BM + MN + L2 + NM + MB + BA.

По т. Коши .

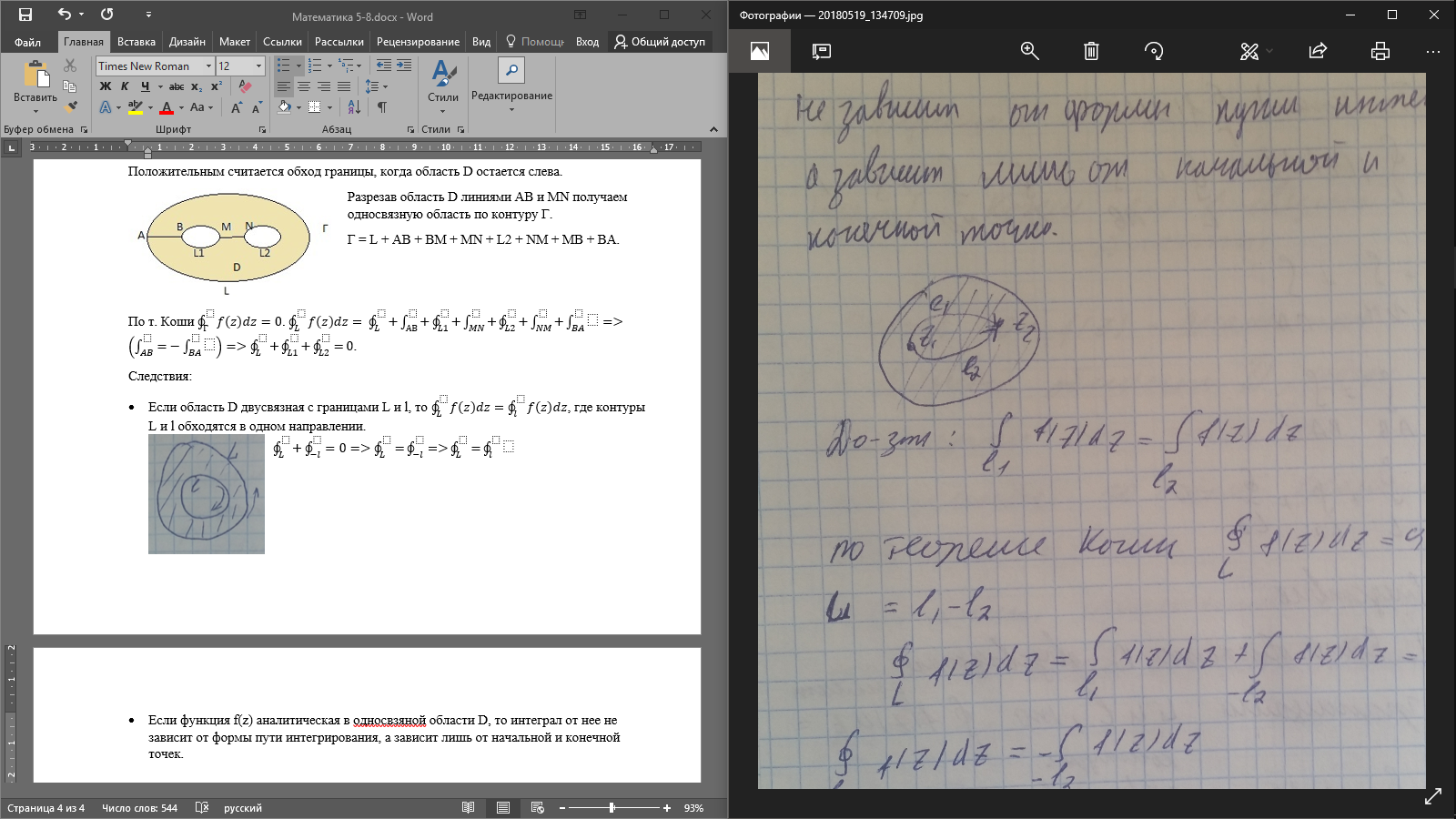
.

1. Если область D является многосвязной, то интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутреннему контуру, если обход контуров происходит в одном направлении.

,



1. Если функция w = f(z) является аналитической в области D и точка z0 и точка z1 это внутренние точки данной области, то интеграл не зависит от линии, по которой ведется интегрирование, а зависит лишь от начальной и конечной точки.



**Док-во:**

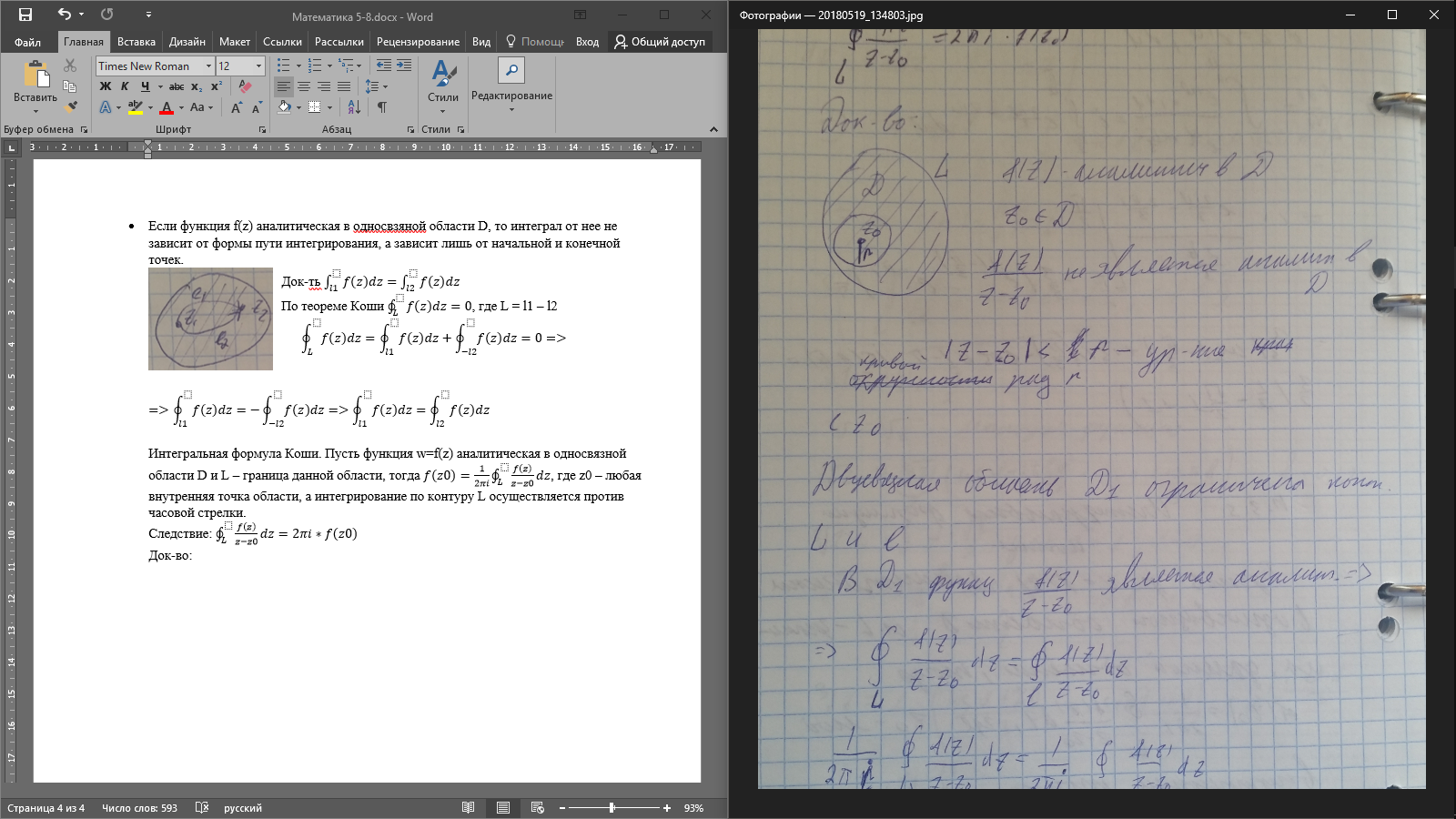
По теореме Коши , где L = l2 – l1

**Интегральная формула Коши.**

Пусть функция w=f(z) аналитическая в замкнутой односвязной области D и L – граница данной области, тогда , где z0 – любая внутренняя точка области, а интегрирование по контуру L осуществляется против часовой стрелки.

Следствие:

Док-во:

f(z) – аналитическая в D

z0∈D

не является аналитической в D

– уравнение радиуса r

Двусвязная область D1 ограничивается контурами L и l. В D1 функция является элементарной =>

т.к. f(z) – аналитическая в D и z0∈D, то f(z) – непрерывна в D => => (∀ε>0)(∃r>0)(∀z:|z-z0|≤r(в том числе на окружности)); (|f(z)-f(z0)|<ε);

|<

т.к. ε выбирается произвольным и может быть сколь угодно малым, то полученное неравенство выполняется только при условии, что левая часть неравенства равно 0.

На практике формулу используют для нахождения интегралов вида: . Если z0∈D, ограниченной L, f(z) – аналитическая в D. Формула применима и для многосвязных областей.

**Следствие из интегральной формулы Коши:**

1. ИФК справедлива и для многосвязной области, при этом все контуры обходятся так, чтобы область оставалась слева.
2. Для всякой дифференцируемой в z0функции f(z) существует производная всех порядков причем

1. В окрестности точки z0, в которой существует производная f’(z0), функция f(z) может быть представлена сходящимся рядом (ряд Тейлора)

# Ряды в комплексной области. Признаки сходимости. Нахождение области сходимости степенного ряда.

**Опр.1** ,где - числовой ряд в комплексной плоскости.

(2) Частичной суммой ряда называют сумму его первых членов .

(3) Ряд называется сходящимся, если существует предел частичной суммы данного ряда, в противоположном случае ряд расходящийся.

Из определений 2 и 3 => ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды и .

**Т1.** (необходимый принцип сходимости): если сходится, то .

**Док-во:**

сходится => сходится и сходится.

**Т2.** Если сходится , то сходится и ряд , при этом данный ряд называется абсолютно сходящимся.

**Док-во:**

**Т3**.(Критерий Коши) : Если сходится <= > для

Ряд вида = , где Cn, Zn… - комплексные числа, а Z = x + yi, то ряд называется степенным.

**Теорема Авеля**: если степенной ряд сходится в точке z0 то он сходится и при всех z, удовлетворяющих неравенству |z|<|z0|.

Если ряд расходится в z0, то он расходится во всех z, удовлетворяющих неравенству |z|>|z0|.

Из теоремы следует, что если существуют отличные от нуля точки сходимости степенного ряда, то существует область сходимости, которая является в общем случае кругом без границы, R-радиус сходимости.

Радиус сходимости степенного ряда можно найти так же как и в действительном анализе по одной из формул: .

Если R 0, то существует круг сходимости.

На границе круга ряд не исследуют.

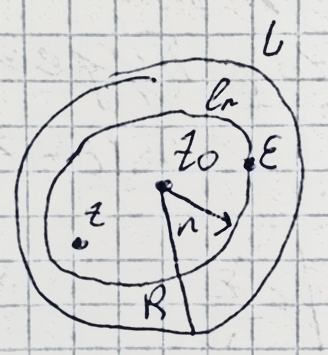
# Ряды Тейлора и Лорана.

**Ряды Тейлора**

Если функция w=f(z) является аналитической в круге , то она может быть единственным образом разложена в этом круге в степенной ряд - окружность с центром в точке z0 целиком содержащаяся в круге.

Указанный в теореме ряд называют рядом Тейлора для функции f(z).

**Док-во:**

z – произвольная точка кругу (z0, R). ((z-z0) < )r - содержится внутри (z-z0) < R, z кругу радиуса R. , w=f(z) является аналитической в круге радиуса R, а значит для точки z можно применить интегральную формулу Коши.

Т.к. точка

полученную слева дробь можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессией, заменим эту дробь соответствующей суммой членов ряда

, умножим данное равенство на и проинтегрируем обе части по замкнутому контуру lr.

В правой части равенства поменяем контур интегрирования на L тогда получим формулу , можно найти коэффициент ряда по формулам которые справедливы и в действительном анализе

Разложения в ряды для основных элементарных функций, нужны ряды Маклорена (z0=0)

**Ряды Лорана**

Если функция w=f(z) аналитическая в кольце r < |z-z0| < R, то её можно единственным образом в этом кольце разложить в степенной ряд где L – замкнутый контур, целиком содержащийся в кольце.

Ряд Лорана может состоять из 2-х частей (может и из 1)

*Внутри круга |z-z0| < R правильная часть ряда Лорана сходится к f1(z) (ряд Тейлора) .* Вне круга |z-z0| > r, главная часть ряда Лорана сходится к f2(z). В кольце r < |z-z0| <R ряд Лорана сходится к f(z) = f1(z) + f2(z).

**Замечания:**

Если функция f(z) не содержит особых точек внутри круга |z-z0|<R, то она в окрестности точки z0 раскладывается в ряд Тейлора. Если в круг попадают точки, в которых функция не определена, то функция раскладывается в ряд Лорана. Для разложения в ряды Лорана и Тейлора, как правило, пользуются готовыми разложениями.

# Нули аналитической функции. Порядок нуля.

Пусть w = f(z) является аналитической в точке z0.

**Опр1**. Число z0 є D называют простым нулём функции w = f(z), если f(z0) = 0, а f’(z0) ≠ 0

**Опр2.** Число z0 є D называют нулём k-го порядка для функции w = f(z), если f(z0) = f’(z0) = … f(k-1)(z0) = 0, а fk(z0) ≠ 0.

**Опр3.** Точка z0 є D называется изолированным нулём функции w = f(z), если существует такая окрестность этой точки, в которой не содержится других нулей данной точки.

Если ф-я не равна тождественно 0, то у неё существует только изолированные 0 (f(z0) ≡ 0).

*Определить порядок нуля функции можно 2-мя способами:*

1. По определению.
2. Т.к функция является аналитической в точке z0, то в окрестности данной точки ее можно разложить в ряд Тейлора.

Если z0 - нуль k-го порядка, то

f(z) = (z-z0)k (сk+ck+1+…) / (z-z0)k

Если z=z0 – ноль функции и удается подобрать k таким образом, чтобы предел был отличным от нуля, то k является порядком нуля.

**Опр4.** Точка (бесконечно удаленная точка) называется нулем k-го порядка функции, если разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки ноль содержит бесконечно много степеней с отрицательными показателями.

# Изолированные и особые точки, их классификация.

**Опр1.** Точка z0 называется особой точкой функции, если в данной точке функция не является аналитической (не определена в данной точке).

**Опр2**. Точка z0 называется изолированной особой точкой ф-ии w = f(z), если существует такая её окрестность, в которой не содержится других особых точек.

Виды особых точек:

1. z0 называется **устранимой** особой точкой, если разложение функции в ряд Лорана не содержит отрицательных степеней.
2. z0 называется **точкой полюса**, если разложение функции в ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями.

1. z0 называют **существенно особой точкой**, если разложение функции в ряд Лорана содержит бесконечно много степеней с отрицательными показателями.

Можно определить характер особых точек пользуясь правилами:

1. Если z0 устранимая особая точка, то (k – число)
2. z0 называется точкой полюса, если
3. z0 называется существенно особой, если не сущ.

# Определение вычета. Вычисление вычетов.

**Определение.**

Пусть ф-я w = f(z) является аналитической в D, ограниченной контуром L за исключением конечного числа особых точек, принадлежащих данной области.

* Вычетом (Res) аналитической ф-и w = f(z) в особой точке z0 называют комплексное число, которое можно найти по формуле:

Если разложить функцию w = f(z) в ряд Лорана в окрестности точки z0, то коэф-ты в главной части Лорана можно найти по формуле:

Если n = -1, то

=> вычет ф ф-и z0=C-1

Уточним нахождение вычетов в зависимости от особой точки.

**Вычисление.**

1. Если z0 – устранимая особая точка, то разложение функции в ряд Лорана не содержит отрицательных степеней => =0 =>
2. Если z0 – простой полюс, то

:

1. Если z0 – полюс k-го порядка, то разложение ф-ий в ряд Лорана будет иметь вид:

+ + +…+

Продифференцируем данное равенство k-1 и перейдём к пределу

1. Если z0 существенно особая точка, то Res находят, раскладывая ф-ю в ряд Лорана в окрестности этой точке и находя С-1

=>

# Применение вычетов к вычислению интегралов. Теорема Коши.

**Т1 (Коши):**

Если ф-я w=f(z) является аналитической в области D и на ее границе L за исключением конечного числа особых точек z1…zn, то интеграл

**Т2 :**

Если ф-я w=f(z) является аналитической в области D за исключением конечного числа особых точек, то сумма вычетов в этих точках, включая бесконечно удалённую, равно 0.

# Теория вероятностей.

# События и их классификация. Определение вероятности события (классическое, статическое, геометрическое).

**Виды событий:**

1. ***Случайным*** событием называют результат некоторого опыта, который может произойти или не произойти.
2. Случайное событие называют ***достоверным***, если в результате данного опыта оно обязательно происходит. (U)
3. ***Невозможное*** событие – событие, которое не может произойти в результате данного опыта. (V)
4. Два события называют ***несовместными***, если в результате данного опыта может произойти только одно событие***.*** В противном случае события ***совместимые***.
5. ***Попарно несовместимые*** события – если любые 2 из них несовместимы.
6. События, которые могут произойти в данном опыте образуют ***полную группу*** событий, если они попарно несовместимы и одно из них обязательно происходит.
7. Событие A̅ называют ***противоположным*** к А, если оно наступает тогда и только тогда, когда А не наступает.
8. Событие, что событие B ***влечёт*** за собой событие А, если из того, что наступило В, следует то, что наступило и А.
9. События А и Б называют ***равными***, если из А влечёт Б, и Б влечёт А.
10. Несколько событий в данном опыте называют ***равновозможными***, если объективно ни одно из них не является более возможным, чем другие.

**Определения вероятностей:**

1. ***Классическая вероятность.***

Событие может наступать или нет в данном опыте, однако, объективная возможность наступления разных событий в одном и том же опыте может существенно отличаться.

***Вероятностью*** события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов опыта к общему числу событий в опыте.

1. ***Статистическая вероятность.***

Если события, которые могут наступить в данном опыте, не являются равновозможными, то нельзя применять классическое определение для нахождения вероятности события.

Пусть проводится некоторый опыт с n исходами, в результате которого событие А произошло m раз.

* Число m называют абсолютной частотой события А, число m/n – относительной частотой события А.

При большом числе n относительная частота колеблется около некоторого числа.

* Статистической вероятностью события А называют число, около которого колеблется относительная частота события при достаточно больших n.

1. ***Геометрическая вероятность.***

Геометрическая вероятность события А называют отношение мер множества событий благоприятствующих А к общему числу событий.

p(A) = mes(d)/mes(D), Где mes – мера данной области. Обычно используется площадь, объём, длина.

# Вероятность суммы и произведения событий. Полная вероятность. Формула Байеса.

* ***Независимые*** события – такие события, вероятность наступления которых не зависит от наступления других.
* ***Условной*** вероятностью события B называют вероятность этого события, найденную в предположении, что событие А наступило.

P(B/A) = PA(B)

* ***Теорема 1(Произведение)***:

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности первого из них на условную вероятность второго, найденную в предположении, что первое наступило.

P(A\*B) = P(A)\*P(B/А)

***Доказательство***:

Пусть в результате данного опыта может произойти n событий, среди которых события A и B, при этом событию А благоприятствует m событий, из них r благоприятствуют A и B (AB).

P(В/A) = r/m = (r/n)/(m/n) = P(A/B)/P(A) => P(AB) = P(A)\*P(B/A)

***Следствия*:**

1. Теорема справедлива и для большего числа событий
2. Зависимость и независимость всегда обоюдная.
3. Если события независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей: P(AB) = P(A)\*P(B)

* ***Теорема 2(Сложение)***:

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B) = P(A) + P(B)

***Доказательство***:

Пусть в результате данного опыта может произойти n событий, из них m благоприятствует A, а k –благоприятствует B (события А и В несовместимы => m и k не пересекаются), то:

P(A+B) = (m+k)/n = m/n +k/n = P(A) +P(B).

***Следствие***:

1. Если события А1, А2, …, Аn попарно несовместимые события, которые могут произойти в данном опыте, то P(А1+А2+ …+Аn) = P(А1)+P(А2)+ …+P(Аn)
2. Если А1, А2, …, Аn образуют полную группу событий, то P(А1+А2+ …+Аn) = P(А1)+P(А2)+ …+P(Аn)=1
3. P(A+A̅) = P(A)+P(A̅) = 1

* ***Теорема 3(Сложение):***

Вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения: P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)

***Следствия****:*

1. P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)
2. Если требуется найти вероятность суммы n – совместных событий А1, А2,…Аn, то пользуются формулой:

P(A1+…+An) = 1-P(A̅1\* A̅2\*…\* A̅n)

* ***Полная вероятность. Формула Байеса.***

События Н1, Н2,…Нn образуют семейство гипотез, если они являются полной группой событий в данном опыте.

* ***Теорема*** *1:*

Если событие А в данном опыте может произойти совместно с одной из гипотез Н1, Н2,…Нn, то вероятность этого события можно найти по формуле:

P(A)=P(Н1)\*P(A/Н1)+P(Н2)\*P(A/Н2)+…+P(Нn)\*P(A/Нn) (формула полной вероятности)

**Док-во:**

Так как событие А может произойти совместно с одной из гипотез, то его можно представить в виде суммы:

А = AН1+AН2+…+AНn(несовм) =>

P(A) = P(AН1)+P(AН2)+…+P(AНn) = P(Н1)\*P(A/Н1)+…+P(Нn)\*P(A/Нn)

* ***Теорема 2 (Байеса):***

**Док-во:**

Из д-ва теории вероятности произведения следует

# Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число испытании.

Пусть производится n испытаний, в каждом из которых вероятности наступления события А одинаковы и не зависят от исхода других испытаний, такие испытания называют **повторными независимыми испытаниями.**

Пусть требуется найти вероятность того, что в n испытаниях событие А наступит m раз.

Рассмотрим следующие события: событие А наступило m раз и (n-m) раз не наступило:

Вероятность такого события равна **pm \* qn-m.**

Число таких испытаний равно числу сочетаний из n опытов по m опытов:

**Pn(m) = Cnm pm \* qn-m  - Бернулли**

Среди всех вероятностей, которые можно найти по формуле Бернулли выделяют **наибольшую**, соответствующие ей значения m обозначим m0 и называют **наивероятнейшим числом испытании**:

m0 - ?

Pn(m0) Pn(m0 - 1)

Cnm0 pm0 \* qn-m0  Cnm0-1 pm0- 1 \* qn-m0 + 1 |: pm0-1 qn-m0

p

m0 pn+p

Pn(m0) Pn(m0 + 1)

Cnm0 pm0 \* qn-m0  Cnm0+1 pm0 + 1 \* qn-m0 - 1 |: pm0 qn-m0-1

qm0 + q pn+pm0

**np - q m0 np + p**

# Предельные теоремы в схеме Бернулли (теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа и следствия из них).

1. **Теорема Пуассона**

Если число испытании велико (n -> ), а вероятность наступления события А мала (р -> 0), то выполняется формула

Pn(m) = , = np

**Доказательство:**

Пусть = np =>

Pn(m) = Cnm pm \* qn-m  = =

На практике для нахождения вероятностей редких событии пользуются приближенной формой

Pn(m) =

1. **Локальная теорема Муавра-Лапласа**

Если число испытании велико (n -> ), а вероятность наступления события А не близка к нулю (р 0,1), то найти вероятность вида Рn(m) можно по формуле

, x =

На практике для упрощения применяют формулу:

, x =

Где

1. **Интегральная теорема Муавра-Лапласа**

Если требуется найти вероятность того, что в n испытаниях событие А произойдет от m1 до m2 раз (0 m1 m2 n), то применяют следующую теорему:

x1,2 =

На практике для облегчения расчетов пользуются упрощенной формулой, опиралась на специальную функцию

Рn(m1;m2) = Ф(х2)-Ф(х1) x1,2 =

Ф(X) = - Нормир-я функция Лапласа

**Св-ва Ф(х):**

1)Ф(-х) = -Ф(х)

2)если x 5, то Ф(х) = 0.5

**Следствие:**

Pn(| – p|<) = 2Ф(

# Дискретные случайные величины: закон распределения, многоугольник распределения, функция распределения.

**Опр1.** Случайной величиной называют величину, которая в результате данного опыта может принимать какое-либо значение причем заранее не известное.

X,Y,Z – случайные величины

x,y,z – значения СВ

**Опр2.** Дискретной называют такую СВ, которая может принимать конечное или счетное множество значении (ДСВ)

**Опр3.** Любой закон (таблица, график…) устанавливающий соответствие между значениями СВ и их вероятностями называют **законом распределения**.

Для ДСВ закон распределения задают с помощью таблицы (1 строка – значение ДСВ в порядке возрастания, 2 строка – соответствующая значению вероятность)

Т.к. события X = x; i = 1,2..n являются несовместимыми, то р1 + р2…+рn =

**Опр4.** Ломаная линия соединяющая точки с координатами (xi,pi) называют **многоугольником распределения.**

**Опр5.** Функцией распределения СВ называют такую величину у=F(x), которая принимает значение в соответствии с равенством F(x) = P(X<x)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x1 | x2 | x3 | … |  |  |
|  | p1 | p2 | p3 | … |  |  |

# Числовые характеристики ДСВ, их свойства.

**Опр1.** Мат ожиданием ДСВ называют сумму произведений значений величины на соответствующую им вероятность.

М(Х) = x1,p1 + … + xnpn =

**Св-ва:**

1. M(C) = C (С=const)
2. M() = M(X)
3. M(XY) = M(X)M(Y)
4. M(X\*Y) = M(X)\*M(Y)
5. М(Х)=а, => М(Х-а)=0

**Опр2.** Дисперсией ДСВ называют мат ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее мат ожидания

D(X) = M(X-M(X))2=M(X2)-M2(X)

**Св-ва:**

1. D(C) = М((С-М(С))2 )=0
2. D() =М((СХ-М(СХ)2 )=С2 М((Х-М(Х)2)= 2D(X)
3. D(X) =М((Х-М(Х))2)=М(Х2-2ХМ(Х)+М2(Х))=М(Х2)-М(2ХМ(Х)+М(М2(Х))=М(Х2)-2М(Х)\*М(Х)+М2(Х)= M(X2) – M2(X)
4. D(XY) = D(X)D(Y)

**Опр3.** Средним квадратичным отклонением называют корень из дисперсии

(Х) =

Если М(Х) – мат ожидание Х, то Х (М(Х) - (Х) ; M(X) + (Х))

# Законы распределения ДСВ (биноминальный, Пуассона, геометрический).

1. **Биноминальное распределение**

**Опр1.** ДСВ х распределена по биномиальному закону, если она принимает значения 0,1…m, …n с вероятностями, которые можно найти по формуле Бернулли

**Числовые характеристики**

**M(X) = np; D(X) = npq**

n- число испытаний, p- вероятность события А в одном испытании

**Док-во:**

Х можно представить в виде суммы

X = x1 + x2 + … + xn

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 |
|  | q | p |

M(xi) = 0 \*q + 1\*p = p

M(X) = M(x1) + M(x2) + … = np

D(Xi) = M(X2) – M2(X) = p - p2 = p (1-p) = pq

D(X) = npq

1. **Распределение Пуассона**

**Опр1.** ДСВ X распределена по закону Пуассона, если она принимает значения 0,1…m, …n (p→0, n→ ∞) с вероятностями, которые можно найти по формуле Пуассона

= np

**Числовые хар-ки:**

**М(Х)=D(X)=**

1. **Геометрическое распределение**

**Опр1.** ДСВ х имеет геометрическое распределение, если она принимает значения 1, 2, 3, … с вероятностями, которые можно найти по формуле

**Числовые хар-ки:**

# Непрерывные случайные величины: функции распределения и плотности вероятности, их свойства.

**Опр1**. СВ называется непрерывной, если она принимает значения в некотором интервале.

**Опр2**. Функцией распределения у=F(X) называют такую ф-ю, значения которой можно найти по формуле

F(X) = P(X<x) x – произв. действ. число

**Св-ва:**

1) (т.к. F(x)=P)

2) y = F(X) – неубывающая ф-я, т.е. если x2>x1, то F(x2) F(X1), т.к. x2>x1, то «X<x1»=А и «x1X<x2»=В несовместимые и А+В=С=«X<x2».

3)F() = 1, F() = 0

4) P(aXb) = F(b) – F(a)

5) Ф-я распределения y = F(X) явл-ся непрерывной слева

= F(x0)

**Опр3.** Ф-ей плотности вероятности называют функцию, принимающую значения f(X) = F’(X).

Функция плотности вероятности показывает среднюю вероятность, приходящуюся на интервал длиной x.

**Св-ва y=f(x):**

1) f(x) 0 (т.к. f(x) = F’(x), F(x) – неубыв.)

2) P(a b) =

= F(b)-F(a) = P(a b)

3) F(x) =

1. = 1 – характеристическое св-во

# Числовые характеристики НСВ.

**Опр1**. Математическим определением НСВ называют число, которое можно получить по формуле: .

**Опр2**. Дисперсией НСВ с М(Х) = a называется число: .

Свойства М(Х) и D(X) у НСВ такие же как у ДСВ.

**Опр3**. Модой СВ M0(X) называют ее наиболее вероятное значение.

Для НСВ мода совпадает с точкой максимума функции плотности вероятности

**Опр4**. Медианой НСВ Х называется такое ее значение, для которой выполняется равенство:

.

**Опр5**. Квантилем уровня q называют такое значение СВ xq, для которого

* q = 0.25 – Х0.25 нижний квантиль
* q = 0.75 – Х0.75 верхний квантиль
* q = 0.1; 0.2… – Х0.1 децель
* q = 0.01; 0.02… – Х0.01 процентель

# Законы распределения НСВ (равномерное, показательное, нормальное).

1. **Равномерное распределение.**

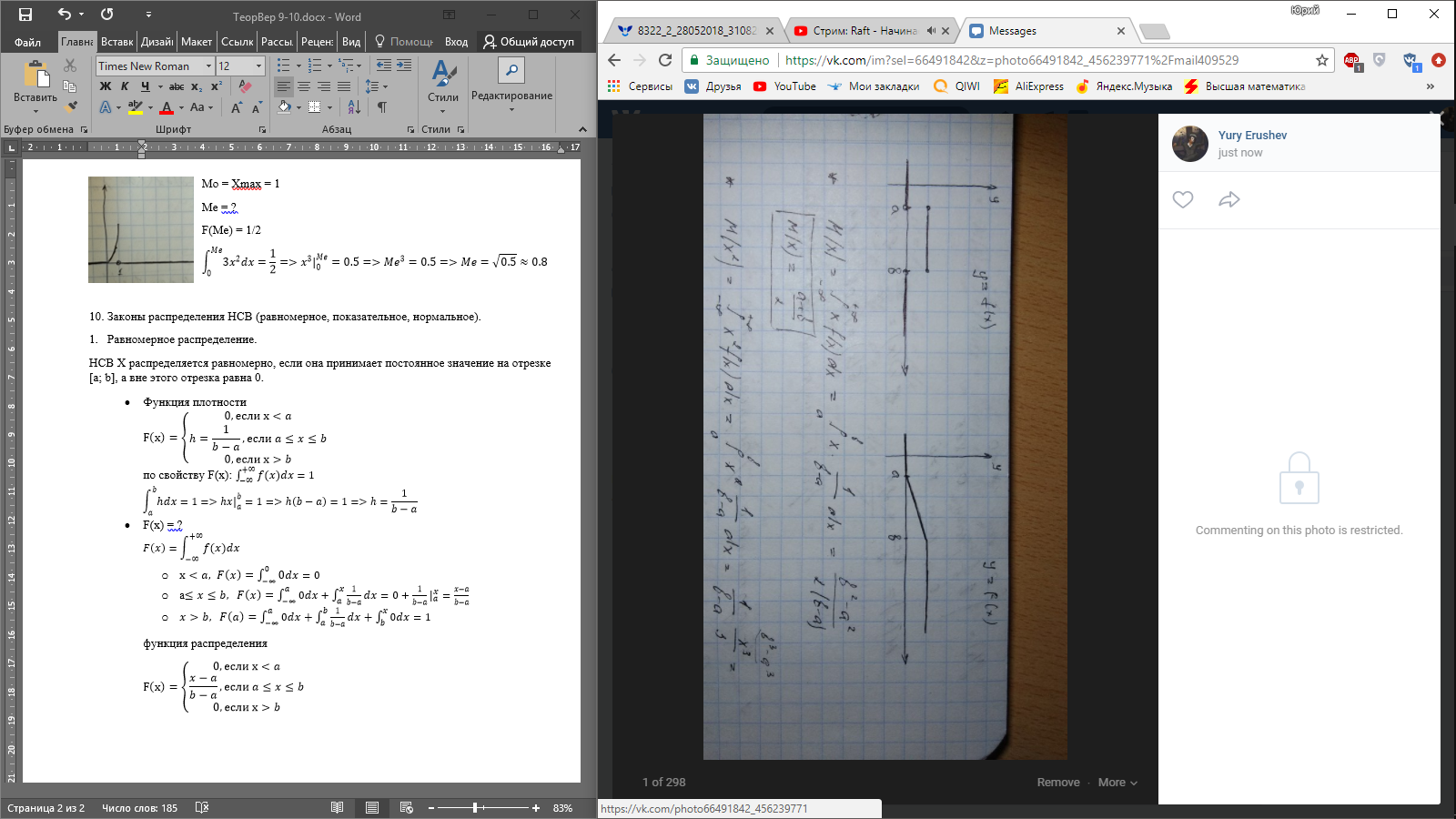
**Опр1**. НСВ распределена равномерно, если ее функция плотности вероятности принимает одинаковые значения на отрезке [a; b], а вне этого отрезка равна 0.

* Функция плотности

по свойству F(x): =>

* F(x) = ?
  + если a
  + если

Функция распределения:

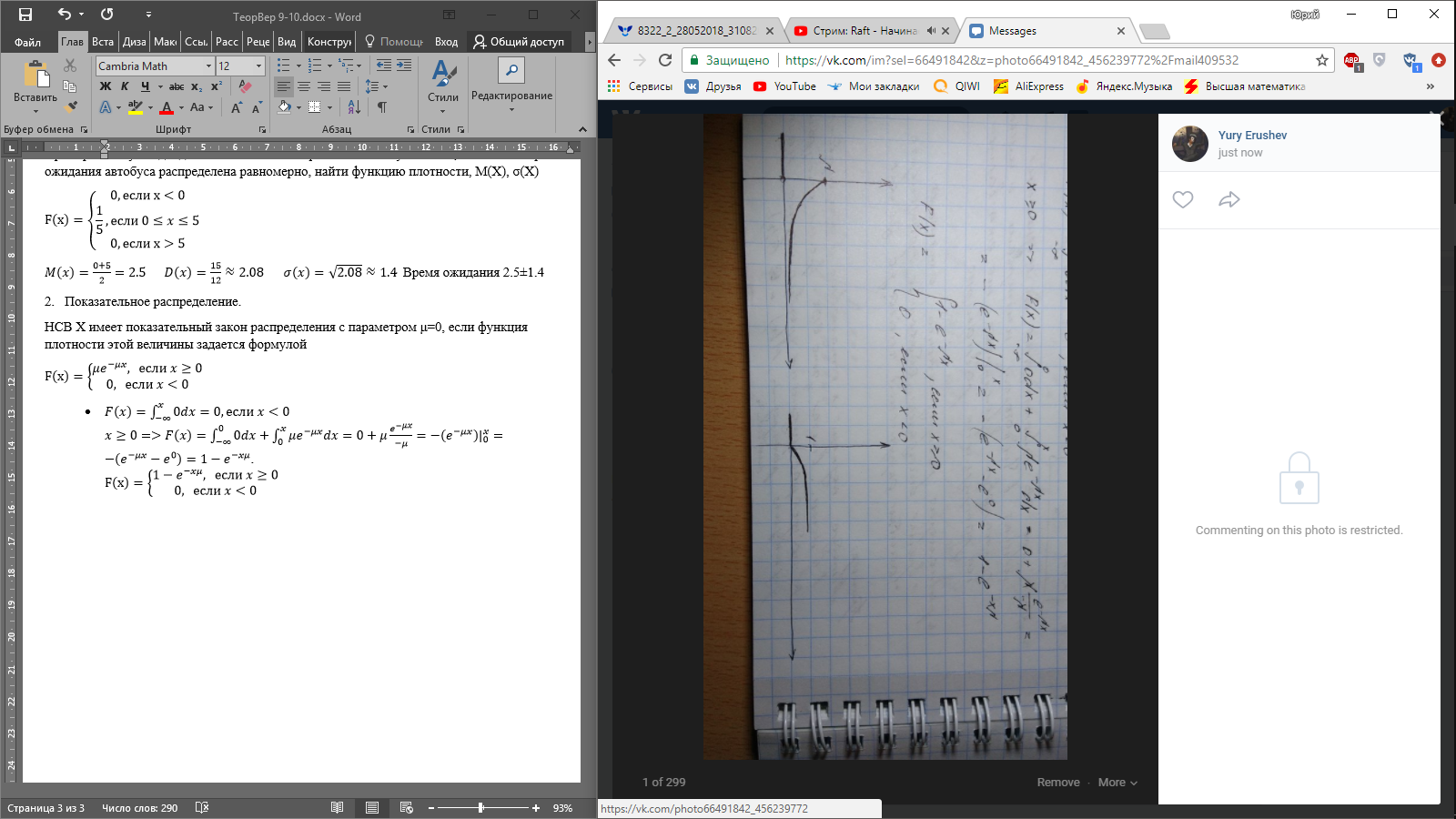


.

1. **Показательное распределение.**

**Опр1**. НСВ Х имеет показательный закон распределения с параметром 0, если ее функция плотности вероятности задается формулой:

.



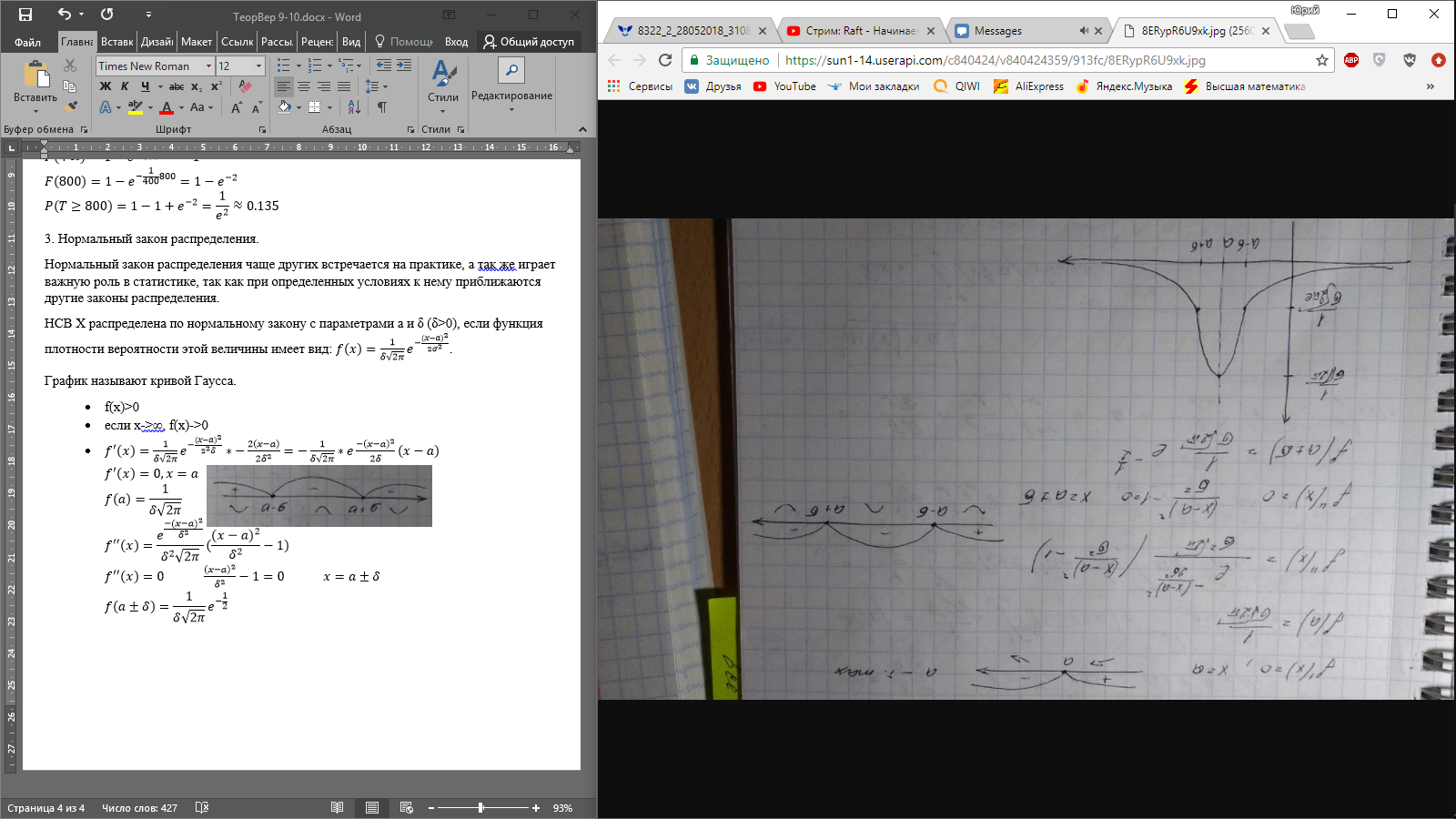
3. **Нормальный закон распределения.**

**Опр1**. НСВ Х распределена по нормальному закону с параметрами a и ( 0), если функция распределения имеет вид:

.

График называют кривой Гаусса.

* f(x)>0
* если x->∞, f(x)->0



**Теорема 1.**

Числовые характеристики НСВ Х, имеющей нормальное распределение, связаны с ее параметрами формулами:

; .

Док-во:

.

**Теорема 2.**

Функции распределения НСВ Х, распределенной по нормальному закону, задается формулой: ,Ф-нормированная функция Лапласса. .

Док-во:

.

.

Следствия:

* правило 3х :

# Закон больших чисел: неравенство Маркова и Чебышева, теоремы Чебышева и Бернулли, теорема Ляпунова.

Предельные теоремы, устанавливающие связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом числе испытаний. Они служат основой математической статистики. Предельные теоремы делятся на 2 большие группы. 1) Закон больших чисел (устанавливает устойчивость средних значений.) 2) центральная предельная теорема. (устанавливает условия, при которых закон распределения большого числа случайных величин приближается к нормальному) (возможно можно это не писать, тупо для ознакомления)

**Неравенства Маркова и Чебышева**

**Теорема 1 (Неравенство Маркова)**

**Если случайная величина Х принимает неотрицательные значения (>= 0) и M(x) = a, то для любого положительного эпсилон ( выполняется неравенства**

**Док-во: Пусть x – ДСВ =>**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi | x1 | x2 | … | xk | xk+1 | … | xn |
| Pi | p1 | p2 | … | pk | pk+1 | … | pn |

a >

**Следствие:**

**Пример:** Среднее количество вызовов, поступивших в течение часа = 1000. Определите, что в течение следующего часа число вызовов: а) превысит > 1200 б) не более 1500.

X – число вызовов в течение часа, M(X) = 1000 = a

Сумма всех вкладов банка 5кк рублей, а вероятность того, что случайный взятый вклад не превысит 10к рублей = 0.6.

X – сумма вклада.

**Теорема 2 (Неравенство Чебышева): Если случайная величина Х имеет M(X)=a, D(X)=D, То для любого положительного , выполняется неравенство**

**Док-во:** Пусть X’=(X-a)^2, X’≥0 =>

**Cледствие:**

**Пример:** Средний расход воды в школе составляет 1000л в день, а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200л (σ = 200л). Оценить вероятность того, что расход воды в школе в любой выбранный день не превысит 2000л.

1 способ:

2 способ:

**Теорема Чебышева и Бернулли.**

В теореме Чебышева используется понятие сходимости по вероятности. x1,x2…xn – сходятся по вероятность по числу А, если

**Теорема 1 (Чебышева): Если случайные величины x1,x2…xn независимы и существует такое число с>0, что , то среднее арифметическое этих величин сходится по вероятности, к среднему арифметическому их математических ожидания.**

**Доказательство:** Применим неравенство Чебышева для величины

*=> теорема доказана.*

**Пример:** Глубина моря измеряется прибором не имеющих ошибок, среднее квадратичное отклонение не превосходит 15м. (σ(X)<=15). Сколько надо сделать замеров, чтобы с вероятностью P не меньше 0.9, можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от средней глубины моря по модулю меньше чем на 5 метров (a=5). среднее арифметическое замеров, средняя глубина моря **,**

*Теорема Бернулли как и теорема Чебышева позволяет оценить вероятности отклонения относительно частоты события b и независимых испытаниях (лучше не писать)*

**Теорема Бернулли: Если вероятность наступления события А в одном испытании = p, а число этих испытаний велико, то относительная частота данного события сходится по вероятности p.**

**Cледствие: Если вероятность наступления события А в каждом испытании различна, то m/n сходится по вероятности**

**Центральная предельная теорема (основная из которых теорема Ляпунова):**

**Если х1,х2…хn независимые случайные величины с математическими ожиданиями а1,а2…an и с дисперсиями D(x1),D(x2)…D(xn), причем выполняется условие то закон распределения суммой этих случайных величин сколь угодно мало отличается от нормального. закон распределения y -> нормальному закону.**

**Пример:** независимые СВ xi – распределены равномерно на [0;1] найти закон распределения , y – закон распределения? И P(55<y<10)-?

­