Вычислительная математика

Лекция 3. Численные методы решения систем уравнений

Исупов К. С.
isupov.k@gmail.com

5 октября 2017 г.

План

1. Введение
2. Метод Гаусса (схема единственного деления)
3. Вычисление определителя
4. Вычисление обратной матрицы

Введение

Определение

Система линейных алгебраических уравнений (линейная система, СЛАУ) — система уравнений, каждое уравнение в которой является линейным — алгебраическим уравнением первой степени.

Пример [*T. Sauer. Numerical analysis. 2nd ed. Boston: Pearson, 646 pp, 2012.*]

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x + y & = & 3 \\ 3x - 4y & = & 2 \end{cases} \tag{1}$$

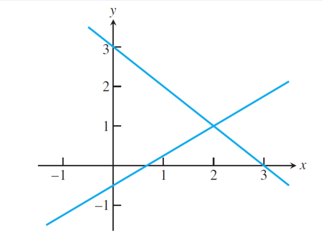

Рис. 1: Геометрическое решение системы уравнений. Каждое уравнение в (1) соответствует линии на графике. Точка пересечения — решение.

Введение

Практическое использование

- Системы линейных и нелинейных уравнений возникают во множестве областей: строительная механика (упруго-пластические задачи), вычислительная динамика, химия, экономика и т.д.
- Основные трудности — решение систем большого порядка.
- Главный практический вопрос — уменьшение числа арифметических и логических операций, которое сильно зависит от метода решения:
  - метод Крамера требует $n^2 n!$ умножений и делений; при $n = 20 : 10^{21}$ операций;
  - метод Гаусса требует $\frac{n}{6}(2n^2 + 9n + 1)$ умножений и делений; при $n = 20 : 3270$ операций.

Методы решения линейных систем

- Точные (прямые), пригодны для $n < 200$
- Итерационные, пригодны для $n \approx 10^3 \dots 10^6$
- Вероятностные, пригодны для очень больших n

Метод Гаусса (схема единственного деления)

1. Рассмотрим линейную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 & = & a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & = & a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & = & a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = & a_{45} \end{cases} \qquad (2)$$

2. Выберем ведущий коэффициент — любой ненулевой коэффициент системы. Пусть это будет a_{11}.

3. Исключим x_1 из всех уравнений:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 & = & a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 & = & a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 & = & a_{45}^{(1)} \end{cases} \qquad (3)$$

где: $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}, \quad b_{1j} = a_{1j}/a_{11}, \quad i = 2, 3, 4,\ j = 2, 3, 4, 5.$

Метод Гаусса (схема единственного деления)

4. Рассматриваем систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 & = & a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 & = & a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 & = & a_{45}^{(1)} \end{array} \right. \tag{3}$$

5. Выбираем ведущий коэффициент. Пусть это будет $a_{22}^{(1)} \neq 0$.

6. Исключим x_2 из всех уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 & = & a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 & = & a_{45}^{(2)} \end{array} \right. \tag{4}$$

где: $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_{2j}^{(1)}, \quad b_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)}, \quad i = 3, 4,\ j = 3, 4, 5.$

Метод Гаусса (схема единственного деления)

7. Далее рассматриваем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 & = & a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 & = & a_{45}^{(2)} \end{array}\right. \tag{4}$$

8. Первое уравнение системы (4) делится на ведущий коэффициент $a_{33}^{(2)} \neq 0$ и из второго уравнения исключается x_3:

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}, \tag{5}$$

где: $a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)}b_{3j}^{(2)}, \quad b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)}/a_{33}^{(2)}, \quad j = 4, 5.$

9. Таким образом, исходная система уравнений приведена к треугольному виду:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15} \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)} \\ x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)} \\ a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)} \end{array}\right.$$

10. Полученная треугольная система, эквивалентная исходной:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 & = & b_{15} \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 & = & b_{25}^{(1)} \\ x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 & = & b_{35}^{(2)} \\ a_{44}^{(3)}x_4 & = & a_{45}^{(3)} \end{cases} \qquad (6)$$

11. Корни системы находят последовательно, начиная с последнего неизвестного:

$$\begin{cases} x_4 & = & \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \\ x_3 & = & b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4 \\ x_2 & = & b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)}x_4 - b_{23}^{(1)}x_3 \\ x_1 & = & b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2 \end{cases} \qquad (7)$$

Этапы решения

1. **Прямой ход** — приведение исходной системы к треугольному виду.
2. **Обратный ход** — определение неизвестных по формулам (7).

Метод Гаусса (схема единственного деления)

Вычислительная сложность метода Гаусса

$$N = \frac{2}{3}n(n+1)(n+2) + n(n-1) \sim \mathbf{O}(\mathbf{n^3}) \qquad (8)$$

Уменьшение вычислительных погрешностей

- Если ведущий коэффициент мал, могут возникать большие ошибки округления.
- Для уменьшения погрешностей применяют **метод Гаусса с выбором главного элемента**: путем перестановки строк матрицы коэффициентов наибольший по модулю коэффициент в столбце стремятся перевести на главную диагональ.

Вычисление определителя

- Каждой квадратной матрице ставится в соответствие некоторое число, называемое определителем матрицы.
- Определитель матрицы, $\det(A)$ или $\Delta(A)$, — одно из основных понятий линейной алгебры. Он "определяет"основные свойства матрицы (обратимость, ранг и пр.).

Определение через свойства

Определителем вещественной матрицы называется функция $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, обладающая следующими тремя свойствами:

1. $\det(A)$ — кососимметрическая функция строк (столбцов) матрицы A (функция от нескольких переменных, не меняющаяся при чётных перестановках аргументов и меняющая знак при нечётных перестановках).
2. $\det(A)$ — полилинейная функция строк (столбцов) матрицы A (функция называется полилинейной, если она является линейной по каждому аргументу при условии, что все остальные аргументы являются постоянными числами).
3. Определитель единичной матрицы равен единице.

Вычисление определителя

- Сложение и вычитание строк матрицы коэффициентов не меняет значение определителя.
- Сведение исходной матрицы к треугольной форме не изменит значение определителя.
- Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Вычисление определителя методом Гаусса

1. Выполнить прямой ход метода Гаусса для системы уравнений

$$Ax = 0, \tag{9}$$

то есть:

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= \mathbf{0} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= \mathbf{0} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= \mathbf{0} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= \mathbf{0} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 &= b_{15} \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 &= b_{25}^{(1)} \\ x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 &= b_{35}^{(2)} \\ a_{44}^{(3)}x_4 &= a_{45}^{(3)} \end{aligned}\right.$$

2. Найти произведение ведущих элементов:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{2} \dots a_{nn}^{n-1}. \tag{10}$$

Вычисление обратной матрицы

Определения и свойства

1. **Обратной** к матрице A называют такую матрицу A^{-1}, для которой

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \tag{11}$$

где E — единичная матрица:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

2. Квадратная матрица называется **неособенной** (**невырожденной**), если $\det(A)$ отличен от нуля.
3. Всякая неособенная матрица имеет обратную матрицу.

Вычисление обратной матрицы

Пусть дана неособенная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Требуется вычислить ее обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Воспользуемся соотношением:

$$AA^{-1} = E. \tag{15}$$

Умножим матрицу A на A^{-1} и приравняем каждый элемент произведения соответствующему элементу матрицы E (нулю, либо единице). Получим систему из n^2 уравнений с n^2 неизвестными $x_{i,j}$ $(i, j1, 2, \ldots, n)$, решив которую, найдем обратную матрицу.

Вычисление обратной матрицы

1. Умножаем каждую строку матрицы A на первый столбец матрицы A^{-1} и приравниваем произведение соотв. элементу первого столбца матрицы E:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{31}+\dots+a_{1n}x_{n1} & = & 1 \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+a_{23}x_{31}+\dots+a_{2n}x_{n1} & = & 0 \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots & & \\ a_{n1}x_{11}+a_{n2}x_{21}+a_{n3}x_{31}+\dots+a_{nn}x_{n1} & = & 0 \end{array}\right. \tag{16}$$

2. Умножаем каждую строку матрицы A на второй столбец матрицы A^{-1} и приравниваем произведение соотв. элементу второго столбца матрицы E:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_{12}+a_{12}x_{22}+a_{13}x_{32}+\dots+a_{1n}x_{n2} & = & 0 \\ a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{32}+\dots+a_{2n}x_{n2} & = & 1 \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots & & \\ a_{n1}x_{12}+a_{n2}x_{22}+a_{n3}x_{32}+\dots+a_{nn}x_{n2} & = & 0 \end{array}\right. \tag{17}$$

3. Аналогично составляем системы для всех оставшихся столбцов матрицы A^{-1}.

- Система из n^2 уравнений с n^2 неизвестными распадается на n систем уравнений с n неизвестными.
- Все системы имеют одну и ту же матрицу A и отличаются свободными членами.
- Решая эти системы методом Гаусса, найдем все элементы обратной матрицы.
- Решение всех систем можно объединить в одной вычислительной схеме, рассматривая одновременно n столбцов свободных членов.