Практика №4. Построение кода Хеммигна для исходных последовательностей различной длины табличным способом. Внесение ошибки в одном разряде. Вычисление синдрома ошибки и ее исправление

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

Определение 4.1. Минимальное количество символов, в которых все кодовые комбинации отличаются друг от друга, называется кодовым расстоянием.

Для исправления одной ошибки кодовое расстояние должно быть не менее 3 ($d_0 = 2s + 1 \geq 3$).

Для того чтобы в принятом сообщении можно было исправлять ошибки, кодовая комбинация должна обладать некоторой избыточностью, которая достигается за счет добавления контрольных разрядов. Число корректирующих разрядов должно удовлетворять следующим условиям.

Пусть r– число корректирующих символов, k– количество информационных разрядов, n– длина кода, тогда

$\log(n+1)+1 > r \geq \log(n+1)$.

Код Хемминга является типичным примером систематического кода и может строиться на основе производящей матрицы. Порождающая матрица имеет k строк и n столбцов.

Порождающая матрица G может быть представлена двумя матрицами, единичной и добавочной. При выборе добавочной матрицы учитывают, что вес (весом двоичного вектора называется величина расстояния Хемминга от него до нулевого вектора) каждой строки не должен быть менее $d_0 - 1$.

Кодирование реализуется при помощи умножения информационной комбинации α на порождающую матрицу

$\beta = \alpha \cdot G$

Проверочная матрица H при двоичном кодировании представляет собой транспонированную добавочную матрицу, дополненную единичной. Проверочная матрица имеет r строк и n столбцов. Причем столбцы представляют собой значения синдрома для разряда, соответствующего номеру этого столбца.

Для определения синдрома необходимо умножить кодовую комбинацию на транспонированную проверочную матрицу

$S = \overline{\beta} \cdot H^T$

ПРИМЕР

Задание. Методом Хемминга закодировать комбинацию α=1101, построив порождающую и проверочную матрицы. Внести ошибку в один из разрядов кодового вектора; найти синдром; найти и исправить ошибку.

Нетрудно видеть, что число информационных разрядов k=4, определим r, n.

Для расчета r можем использовать эмпирическую формулу $r = \lceil \log((k+1) + \lceil \log(k+1) \rceil) \rceil$. Получим r=3, n=7.

Имеем (7,4)– кодирование. Порождающая матрица G имеет размерность 4×7, а проверочная – 3×7.

Построим проверочную матрицу H, так чтобы ее столбцы были различны и не содержали нулевую комбинацию, а последние три столбца образовывали единичную матрицу:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d_0 \geq 3$$

Строим порождающую матрицу G, первые четыре столбца которой образуют единичную матрицу, а остальные три столбца получены из проверочной матрицы:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Кодовая комбинация β имеет вид $\beta=\alpha G$=1101010,

Внесем ошибку в третий разряд $\overline{\beta}$ =1111010, вычислим синдром $S = \overline{\beta} \cdot H^T$ =101, что соответствует ошибке в третьем разряде. Исправленная кодовая комбинация $\beta_{исп}$ =1101010.

ЗАДАНИЕ

Запросить у пользователя количество информационных разрядов и рассчитать для него количество проверочных.

Методом Хемминга закодировать произвольную информационную комбинацию, заданного размера, построив порождающую и проверочную матрицы.

Внести ошибку в один из разрядов кодового вектора; найти синдром; найти и исправить ошибку.