Домашнее задание №2 по АиСД

студента 594 группы Бородина Максима

Задача B.

Паросочетание размера $|L|$ существует тогда и только тогда, когда для любого $A \subset L$, верно: $|A| \leq |N(A)|$.

=>: Если мы смогли построить полное паросочетание, значит, для любого множества $A \subset L$ выполняется $|A| \leq |N(A)|$ (так как мы смогли построить паросочетание, а все соседи по паросочетанию - подмножество всех соседей множества).

<=: Сделаем из данного графа сеть. Для этого на каждом ребре введем пропускную способность по 1 в направлении от вершины L к R. При этом создадим две дополнительные вершины — s(source) и t(target). От s проведем все рёбра в L, а из каждой вершины R проведем рёбра в t (все с пропускной способностью 1). По теореме Форда-Фалкерсона величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза. Значит, нужно доказать, что пропускная способность минимального размера $\geq |L|$. (Тогда будет существовать хотя бы $|L|$ рёбер из L в R, по которым пущен поток. Несмежными они будут, потому что из каждой вершины R можно добраться до target лишь по ребру с пропускной способностью 1).

Рассмотрим произвольный разрез (S, T). Пусть в S попали ровно l вершин из доли L и r вершин из доли R. Тогда есть как минимум $|L| - l$ рёбер, ведущих из s в вершины L, лежащие в T. Так же есть как минимум r рёбер, ведущих из вершин R, лежащих в S, в t минимум Возможны два случая:

1) $l \leq r$. Значит, пропускная способность такого разреза $\geq (|L| - l) + r \geq |L|$

2) $l > r$. Тогда по условию задачи, эти l вершин соединены как минимум с l вершинами из второй доли. А значит, как минимум с $l - r$ вершинами второй доли, лежащими в T. Значит, пропускная способность такого разреза $\geq (|L|-l)+r+(l-r) = |L|$

Что и требовалось доказать.