Tema1: Fundamentarea deciziilor folosind
Testarea Ipotezelor Statistice

De aprofundat din Unitățile de Învățare 3 și 4:
Testarea ipotezelor privind: media populației pentru eșantioane de volum mare
media populației pentru eșantioane de volum redus
proporția populației pentru eșantioane mari
diferența dintre două medii pentru eșantioane de volum mare
diferența dintre două medii pentru eșantioane de volum redus

1. Într-un depozit se află lăzi cu mere, fiecare având 50 kg. Atmosfera depozitului este controlată pentru a nu permite pierderea greutății prin deshidratare. Pentru a testa dacă, după două săptămâni de depozitare, greutatea lăzilor cu mere a scăzut semnificativ, au fost cântărite 6 lăzi, alese la întâmplare, greutățile înregistrate fiind: 49,9, 48,2; 50,3, 48,4; 51, 49,1
Realizați testarea pentru nivelul de semnificație 5%.
(Alegeți dintre valorile tabelare: $z_{0,025} = 1,96$; $z_{0,05} = 1,645$;
$t_{0,025,5} = 2,571$; $t_{0,025,6} = 2,447$; $t_{0,05,5} = 2,015$; $t_{0,05,6} = 1,943$.)

2. Sunt testate două tipuri de fard: A și B. Fardul A este mai ieftin decât fardul B. Testul constă în acordarea unor punctaje după ce fardurile au fost expuse la umiditate o perioadă de 6 luni de zile. Au fost analizate 5 farduri din fiecare tip și s-au obținut punctajele: 85, 87, 92, 80, 84 pentru fardul A și 89, 89, 90, 84, 88 pentru fardul B.
Se presupune că cele două populații de punctaje urmează distribuții normale cu dispersii egale.
Se poate alege fardul A, cel mai ieftin, dacă nu există suficiente dovezi că fardul B este mai bun. Stabiliți ipotezele H_0 și H_1. La un nivel de semnificație de 5% să se cerceteze dacă se poate afirma că nu există diferențe calitative între fardurile A și B.

Date problemă

$\mu = 50$

$x_1 = 49,9$

$x_2 = 48,2$

$x_3 = 50,3$

$x_4 = 48,4$

$x_5 = 51$

$x_6 = 49,1$

$\alpha = 0,05$

$n = 6 < 30 \Rightarrow$ eșantion de volum redus

test unilateral stânga
(greutatea a scăzut semnificativ?)

Rezolvare

folosesc $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s_x / \sqrt{n}}$

$\bar{x}$ - media

$$\bar{x} = \frac{49,9 + 48,2 + 50,3 + 48,4 + 51 + 49,1}{6} = \underline{49,48}$$

$\mu = 50$

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(49,9 - 49,48)^2 + (48,2 - 49,48)^2 + \dots}{5} =$$

$$= \frac{5,961}{5} \Rightarrow \boxed{s_x^2 = 1,19 = \text{dispersia}}$$

abaterea medie pătratică $s_x = \sqrt{s_x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow s_x = \sqrt{1,19} = \boxed{1,09 = s_x}$

~~pp că eșantionul este normal distribuit~~

pp că populația generală din care a fost extras eșantionul este normal distribuită.

RICHTER

$H_0: \mu = 50$

$H_1: \mu < 50$ (test unilateral stânga)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x / \sqrt{n}} = \frac{49,48 - 50}{1,09 / \sqrt{6}} = -1,16$$

~~$t_{\alpha, n-1} = t_{0,05}$~~

$R_c: \ t < -t_{\alpha, n-1}$ $\quad -t_{0,05, 5} = -2,015$

$t = -1,16 > -t_{0,05; 5} \Rightarrow$ nu ne aflăm în regiunea critică.

$\Rightarrow$ { respingem H_0 / acceptăm H_1 $\Rightarrow$ Nu ∃ suficiente dovezi pentru a concluziona că greutatea lăzilor cu mere a scăzut semnificativ

2. Sunt testate 2 tipuri de fard: A și B. Fardul A este mai ieftin decât fardul B. Testul constă în acordarea unor punctaje după ce fardurile au fost expuse la umiditate o perioadă de 6 luni. ~~A~~ Au fost analizate 5 farduri din fiecare tip și s-au obținut punctajele:

A: 85, 87, 92, 80, 84

B: 89, 89, 90, 84, 88

Se presupune că cele două populații de punctaje urmează distribuții normale cu dispersii egale. Se poate alege fardul A, cel mai ieftin, dacă nu ∃ suficiente dovezi că fardul B este cel mai bun. Stabiliți H_0 și H_1, nivel semnif. 5%. Să se cerceteze dacă se poate afirma ~~sau nu~~ că nu există diferențe calitative între fardurile A și B ?

DATE PROBLEMA

$n_1 = 5$ A: 85, 87, 92, 80, 84 $\bar{x}_1$: punctaj mediu A

$n_2 = 5$ B: 89, 89, 90, 84, 88 $\bar{x}_2$: — " — B

dispersii egale

$\alpha = 0,05$

H_0 ?

H_1 ?

Presupunem că:

- ambele colectivități generale din care s-au extras eșantioanele sunt normal sau aproximativ normal distribuite
- eșantioanele aleatoare sunt selectate independent unul de celălalt.
- dispersii egale $\Rightarrow \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2 = \sigma_x^2$

$n_1 = 5$

$n_2 = 5$

Estimator al dispersiei:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n_{i_1}} = \frac{85 + 87 + 92 + 80 + 84}{5} = \boxed{85,6 = \bar{x}_1}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n_{i_2}} = \frac{89 + 89 + 90 + 84 + 88}{5} = \boxed{88 = \bar{x}_2}$$

test unilat stg $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $(\mu_1 - \mu_2 = 0)$ $\nexists$ diferențe calitative

$H_1: \mu_1 < \mu_2$ $(\mu_1 - \mu_2 < 0)$ $\exists$ diferențe calitative între farduri

$n_1 = n_2 = 5 < 30 \Rightarrow$ eșantioane de volum redus

RICHTER

calculez s_x folosind formula pt $n \leq 30$.

$$s_x^2 = \Sigma (x_i - \bar{x})^2$$

A:

n_i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	85	-0,6	0,36
2	87	1,4	1,96
3	92	6,4	40,96
4	80	-5,6	31,36
5	84	-1,6	2,56
Total	428	–	77,2

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}}{n} = \frac{428}{5} = 85,6$$

$$s_{x_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{77,2}{4} = \boxed{19,3 = s_{x_1}^2}$$

$\cancel{s_{x_1} = \sqrt{19,3} \simeq 4,393}$

B:

n_i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	89	1	1
2	89	1	1
3	90	2	4
4	84	-4	16
5	88	0	0
Total	440	–	22

$$\bar{x}_2 = \frac{440}{5} = 88 \qquad \boxed{s_{x_2}^2 = \frac{22}{4} = 5,5}$$

RICHTER

$\cancel{S_c^2/p}$

$$S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(x_i-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2-2}$$

$$= \frac{(n_1-1)s_{x_1}^2+(n_2-1)s_{x_2}^2}{n_1+n_2-2}$$

$$= \cancel{\frac{77,2+(5,5\cdot 4)}{8}} = \frac{77,2+22}{8} = 12,4.$$

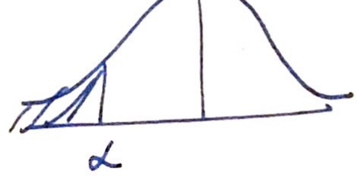
$$\Rightarrow \boxed{S_c^2 = 12,4.}$$

S_c^2 = dispersia combinată

$$t_{calc} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-D}{\sqrt{S_c^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(85,6-88)-0}{12,4\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)} =$$

$$= \frac{-2,4}{\sqrt{12,4\cdot 0,4}} = \frac{-2,4}{2,227} = -1,077$$

$$\boxed{t_{calc} = -1,077.}$$



R_c: $t_{calc} < -t_{\alpha;\, n_1+n_2-2}$

$t_{\alpha;\, n_1+n_2-2} = t_{0,05;\, 5+5-2} = t_{0,5;\, 8} = 1,860$ (val. tabelară)

$$\left.\begin{array}{l} t_{calc} = -1,077. \\ -t_\alpha = -1,860 \end{array}\right\} \Rightarrow t_{calc} \notin R_c \Rightarrow$$

RICHTER

$t_{calc} \notin R_c \Rightarrow$

NU $\exists$ suficiente dovezi pentru a putea afirma că $\exists$ diferențe calitative între fardurile A și B.

Accept H_0, Respingem H_1

La un nivel de semnificatie de 5% se poate afirma că $\exists$ diferențe calitative între fardurile A și B.