# EMM7-PROG1 - Calcul Scientifique en C++

## Projet : Solveur 2D des Équations de Navier-Stokes Incompressibles

## 1. Objectifs du Projet

L'objectif est de développer, avec humilité et rigueur, un **solveur 2D** complet pour les **équations de Navier-Stokes incompressibles**. Le cœur du projet repose sur la maîtrise de la **grille décalée (MAC)** et l'implémentation robuste de la **méthode de projection**.

- Implémenter l'architecture **grille MAC** et le schéma de **projection**.
- Développer un module efficace pour la résolution de l'**équation de Poisson**.
- Valider rigoureusement le code sur l'exemple linéaire de l'**écoulement de Stokes**.
- Simuler le cas non-linéaire de l'**allée de tourbillons de Von Kármán**.

## 2. CONTEXTE SCIENTIFIQUE ET MÉTHODE

### 2.1 Équations Modélisées

Les équations de Navier-Stokes (vitesse $\mathbf{u}$, pression $p$) sont :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad \text{(Quantité de mouvement)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{(Incompressibilité)}$$

### 2.2 La Grille Décalée (MAC)

La grille **MAC (Marker-and-Cell)** est choisie pour sa stabilité :

- La **pression** $p$ est au centre des cellules.
- La composante de **vitesse** $u$ est stockée sur les faces $x$.
- La composante de **vitesse** $v$ est stockée sur les faces $y$.

### 2.3 Méthode de Projection (Chorin)

Le pas de temps est divisé en trois étapes :

1. **Prédiction ($\mathbf{u}^*$)** : Calcul de la vitesse intermédiaire (termes advectif et visqueux).
2. **Pression ($p^{n+1}$)** : Résolution de $\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t}\nabla \cdot \mathbf{u}^*$.
3. **Correction ($\mathbf{u}^{n+1}$)** : La vitesse est corrigée par $\nabla p^{n+1}$ pour assurer $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$.

## 3. GUIDE D'IMPLÉMENTATION ET QUESTIONS CRITIQUES

Cette section détaille les étapes d'implémentation et soulève les points critiques à valider.

### 3.1 Phase 1 : Architecture des Données et Indices MAC

#### 3.1.1 Question 1 : Précision des Structures de Données

Dans une classe `MACGrid` : si l'on a $N_x \times N_y$ cellules de pression, quelles seront les dimensions exactes des champs $u$ et $v$ ? Comment assurez-vous la correspondance entre les indices vectoriels globaux et les positions spatiales $(i, j)$ pour chaque champ ($p$, $u$, $v$) ?

#### 3.1.2 Question 2 : Discrétisation des Opérateurs MAC

Implémentez les opérateurs $\nabla \cdot \mathbf{u}$ et $\nabla p$. **Vérification critique :** La divergence (second membre du Poisson) doit être calculée au centre de la cellule $(i, j)$ et le gradient de pression sur les faces adjacentes, en utilisant uniquement les valeurs stockées sur ces points spécifiques.

### 3.2 Phase 2 : Résolution du Laplacien pour la Pression

#### 3.2.1 Question 3 : La Matrice $A$ et les Conditions Limites

Discrétisez le Laplacien $\nabla^2 p$ et construisez la matrice creuse $A$. La méthode de projection implique des **conditions de Neumann homogène** pour la pression sur les bords du domaine. Comment cette condition est-elle implémentée lors de la construction des lignes de la matrice $A$ pour les cellules proches du bord ?

#### 3.2.2 Question 4 : Gestion de la Singularité du Système $Ap = b$

> **ATTENTION CRITIQUE:** La matrice Laplacien $A$, avec des CL de Neumann, est **singulière**. Pour qu'une solution existe, le second membre $b = \frac{\rho}{\Delta t}\nabla \cdot \mathbf{u}^*$ doit être de **moyenne nulle** (Condition de Fredholm).

- → Comment s'assurer que $\sum b_i \approx 0$ dans votre code après avoir calculé $\nabla \cdot \mathbf{u}^*$ ? *Une correction simple peut être nécessaire.*
- → Quel solveur `Eigen` (direct ou itératif) est adapté à un système singulier/semi-défini ?

## 3.3 Phase 3 : Terme Advectif et Stabilité

#### 3.3.1 Question 5 : Discrétisation Stabilité du Terme Advectif
Écrivez la discrétisation du terme advectif $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$.

> **ATTENTION CRITIQUE:** L'utilisation de différences centrées pour ce terme est fortement sujette à l'**instabilité non-linéaire**. Il s'agit d'une fausse route fréquente.

Proposez une solution pour stabiliser ce terme (ex : schéma **décentré amont/upwind**, ou utilisation d'un schéma temporel plus robuste).

#### 3.3.2 Question 6 : Analyse de Stabilité CFL
Quelle est la **condition de stabilité CFL** (termes advectif et visqueux) dans votre schéma d'Euler Explicite initial, et comment est-elle utilisée pour déterminer le pas de temps $\Delta t$ maximal ?

---

## 3.4 Phase 4 : Validation et Simulation Avancée

#### 3.4.1 Question 7 : Validation par l'Écoulement de Stokes

- → Définissez un cas test **linéaire** (Stokes) avec une solution connue.
- → Menez une étude de **convergence en espace** et de **convergence en temps**. Quel **ordre de convergence** numérique attendez-vous pour la vitesse et la pression ?
- → Calculez l'erreur $L_2$ ou $L_\infty$ de la vitesse et de la pression par rapport à la solution de référence.

#### 3.4.2 Question 8 : Simulation de l'Allée de Von Kármán

- → Simulez l'écoulement autour d'un obstacle à $Re \approx 150$.
- → Analysez le phénomène : mesurez la période de détachement des tourbillons. Quel **nombre de Strouhal** $St = fL/U$ est obtenu ?
- → Exportez les champs de **vorticité** $\omega = \partial_x v - \partial_y u$ au format VTK/VTI pour visualisation avec Paraview.

---

# 4. LIVRABLES ATTENDUS

1. **Le code source** : Complet, propre, commenté (inclure `CMakeLists.txt` ou `Makefile` et `README.txt`).
2. **Le rapport (PDF)** : Doit détailler les choix de discrétisation, les réponses aux questions critiques (gestion du Laplacien singulier), les analyses de convergence (**Stokes**) et les résultats quantitatifs de la simulation de **Von Kármán**.