4.Vers la logique des prédicats

- Souvent, les énoncés s’expriment sous la forme
  - Objet
  - Propriété ou action de l’objet

- Exemple
  - Objet : *Fido*
  - Propriété : *est un chien*

Fido est un chien

- Exemple
  - Objet : *Léonie, devoir*
  - Action : *corrige*

Léonie corrige un devoir

- La propriété ou l’action relative à l’objet s’appelle un prédicat

Réécriture des énoncés

- Pour mieux mettre en évidence les parties des énoncés, on distingue le prédicat et les objets
  - *Fido est un chien*
    - chien(Fido)
  - *Léonie corrige un devoir*
    - corrige(Léonie, devoir)

- Les prédicats peuvent également être utilisés en mathématiques
  - inférieur(1,5)
  - égal(3,3)

- On définit leur *arité* comme étant leur nombre d'arguments

Les variables

- Les énoncés peuvent les utiliser
  - Exemple : corrige(X, devoir). X = « Léonie »
- Suivant le nombre de valeurs qu'elles peuvent prendre, on distingue
  - Les énoncés universels

    Les variables peuvent prendre la valeur de tous les objets du domaine
    - Exemple : X < X + 1 dans l'ensemble N
  - Les énoncés existentiels

    La variable peut prendre la valeur d'au moins un objet
    - Exemple : 4X – 5 = 11
- On peut préciser pour chaque variable le nombre de valeurs qu'elle peut prendre, grâce aux quantificateurs
  - Existentiel : $\exists x(4x - 5 = 11)$
  - Universel : $\forall x \in N, x < x + 1$

Les fonctions

- Elles peuvent comporter de 1 à n paramètres

- L'arité d'une fonction est son nombre de paramètres

- Exemples :
  - taille(paul) renvoie la taille de l'individu Paul en cm
  - âge(paul) renvoie l'âge de Paul
  - somme(X, Y) renvoie la somme des variables X et Y
  - …

Vocabulaire

Pour écrire des formules en logique des prédicats, on définit un vocabulaire permettant de représenter tous les objets que l'on est amenés à manipuler

- Les variables : $x, y....x_1, x_2, y_1,...$
- Les constantes : $a, b....a_1, a_2, b_1,...$
- Les fonctions : $f, g....f_1, f_2, g_1,...$
- Les prédicats : $p, q..., P, Q,... p_1, p_2, q_1,...$
- Les parenthèses ( )
- Les connecteurs logiques :$\neg \ \wedge \vee \Leftrightarrow \supset$ opérateurs logiques
- Les quantificateurs :$\exists \forall$ quantificateurs

Les termes

- Un terme peut être :
  - Un symbole de constante
  - Un symbole de variable
  - Une expression $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ où f est un symbole fonctionnel n-aire et les t_i sont des termes.
- Un atome est un énoncé de la forme :
  - $p(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ où p est un symbole de prédicat k-aire et les t_i sont des termes.
- Un littéral est un
  - Atome (littéral positif)
  - Atome précédé du symbole de négation (littéral négatif)

Les formules bien formées

- Une formule bien formée peut être :
  - Un littéral
  - Une quantification universelle $\forall x \ (w)$
    - X est une variable
    - W est une formule bien formée
  - Une quantification existentielle $\exists x \ (w)$
    - X est une variable
    - W est une formule bien formée
    - Si w, w_1, w_2 sont des formules bien formées, alors ces formules le sont aussi :

$$\neg w, w1 \wedge w2, w1 \vee w2, w1 \supset w2, w1 \Leftrightarrow w2$$

Les formules bien formées : exemples

p, q, r prédicats
f, g fonctions
a,b,c,d constantes
x,y,z variables

1. $p(x,a,c)$
2. $p\big(f(x), y, f(g(d))\big)$
3. $\neg r(a, f(a))$
4. $p(a,b,c) \vee q(a, f(a))$
5. $\forall x(p(x,b))$
6. $\exists x(p(x,b) \vee g(x,y))$
7. $\forall x(\exists y(p(x,y) \supset g(y,c)))$
8. $\forall x(\exists y(p(x,y))) \supset g(z,c)$

Formules bien formées ??

Champs de quantificateurs (1/4)

- Variables libres, variables liées

  - Dans une formule du type $\forall x(w)$, (w) correspond au **champ du quantificateur**

  - toutes les variables d'une formule sans quantificateur sont **libres**

  - Si x est libre dans w, x est **liée** dans $\forall x\ (w)$ et $\exists x\ (w)$

  - L'occurrence du quantificateur est liée

  - Une occurrence qui n'est pas libre, est liée

Champs de quantificateurs (3/4)

$$\boxed{(\forall x\, P(f(x, y))) \supset Q(g(x))}$$

- x est liée dans la première partie de la formule, elle est libre dans la seconde.
  - ➢ Il faut renommer certaines occurrences

- On dit qu'**un terme t est libre en x dans A** si aucune occurrence libre de x dans A ne se trouve dans le champ d'une variable de t

  - f(x,u) est libre en x dans $\forall y(f(x,y) \supset g(x,0))$
  - Dans $\forall u(\forall y(A(x,y) \supset B(x)))$:
    - f(x,u) est libre en y dans cette formule
      - *y n'a pas d'occurrence libre*
    - f(x,u) n'est pas libre en x dans cette formule
      - *x a 2 occurrences libres, toutes 2 dans le champ de u, variable du terme*

Champs de quantificateurs : exemples (2/4)

- Soit le terme **g(x, a, f(t))**, x et t variables ; a,b,c constantes ; f, g et h fonctions

1. Est-il libre
   a) En t dans
   b) En x dans

$$\boxed{(\forall t\ P(t, a, h(x)))}$$

2. Est-il libre
   a) En t dans
   b) En x dans

$$\boxed{(\exists t\ P(b, a, c))}$$

3. Est-libre
   a) En t dans
   b) En x dans

$$\boxed{(\forall x\ P(x, f(t), a))}$$

Champs de quantificateurs (4/4)

Soit A1 : $\forall x\left(P(x) \supset Q(x)\right)$

- terme t : f(x,y)
- t est libre en x dans A1 car aucune occurrence libre de x dans A1 ne se trouve dans le champ d'une variable de t (il n'y a pas d'occurrence libre de x dans A1).
- On a donc aussi : $\forall x\left(P(f(x, y)) \supset Q(f(x, y))\right)$

Soit A2 : $\forall x\left(P(x) \supset Q(y)\right)$

- t : f(x,y)
- y libre, y se trouve dans le champ d'une variable de t
- t n'est donc pas libre en y dans A2
- t est libre en x dans A2

Formule close

- On dit qu'une formule est **close** (ou fermée) si elle n'a pas de variable libre (*toutes ses variables sont liées*)
- Une formule qui n'est pas close est **ouverte** (*elle possède au moins une variable libre*)
- Exemples

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ P(x,y) \\ 2)\ \forall y\ P(x,y) \\ 3)\ \exists y\ (\forall x\ P(y,x))\ \text{close} \end{array}}$$

- Axiome
  - Si t est libre en x dans la formule A

$$(\forall x\ A(x)) \supset A(t)$$

A(t) : formule A dans laquelle toutes les occurrences libres de x ont été remplacées par t

Système formel pour la logique des prédicats (1/3)

- Alphabet
  - V et F
  - Les variables : $x, y....x_1, x_2, y_1,...$
  - Les constantes : $a, b....a_1, a_2, b_1,...$
  - Les fonctions : $f, g....f_1, f_2, g_1,...$
  - Les prédicats : $p, q..., P, Q,... p_1, p_2, q_1,...$
  - Les parenthèses ( )
  - Les connecteurs logiques : $\supset \wedge \vee \Leftrightarrow$

- Quantificateurs : $\exists \forall$
  - quantificateur universel $\forall$
  - quantificateur existentiel $\exists$
  - Exemples : $\exists x \left(écrit(x, Candide)\right)$, $\forall x(homme(x) \supset mortel(x))$

Système formel pour la logique des prédicats (2/3)

- Terme
  - Une variable ou une constante
  - une expression de la forme $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ où les t_i sont des termes et f est un symbole fonctionnel n-aire

    exemple : f(x, y)
- Formule atomique (ou atome)
  - Une formule atomique est une expression de la forme $P(t_1, \ldots, t_k)$, P prédicat k-aire et t_i terme

    ex : P(x), Q(f(y),c,g(f(x),z)) sont des formules atomiques.

    P(Q) n'est pas une formule atomique
  - Les formules atomiques sont bien formées
- Règles d'écriture des formules bien formées

  Si A et B sont bien formées

$$\neg A, A \supset B, A \Leftrightarrow B, \forall x(A), \exists x(A), \mathrm{A} \wedge B, A \vee B$$

  sont des formules bien formées

Système formel pour la logique des prédicats : les axiomes (3/3)

- Axiomes du calcul propositionnel +

  $(A4)$ $\forall x A(x) \supset A(t)$ x variable, t terme, t libre en x dans A

  $(A5)$$(\forall x A \supset B) \supset (A \supset \forall x\, B)$ x n’a pas d’occurrence libre dans A

  (spécification universelle) Si $\forall x P(x)$ alors on déduit $P(a)$ où A est une constante

- Règles d’inférence

  Modus Ponens $A, A \supset B$ |= B

  Généralisation A|=$\forall x\; A$

Lois d'équivalence pour les quantificateurs

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$
$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \neg P(x))$$
$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x\, P(x) \wedge \forall x Q(x))$$
$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x\, P(x) \vee \forall x Q(x))$$
$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x\, P(x) \wedge \exists x Q(x))$$
$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x\, P(x) \vee \exists x Q(x))$$
$$\exists x\, P(x) \Leftrightarrow (\exists y\, P(y))$$
$$\forall x\, P(x) \Leftrightarrow (\forall y\, P(y))$$

Exemple : les ensembles

- Opérations à représenter : ajout d'un élément, union/intersection de deux ensembles
- constante : emptyset
- prédicats : Member, Subset, Set
- Fonctions : Intersect , Union, Adjoin (d'un élément à un ensemble)
- Axiomes

$$\forall s\ \mathrm{Set}(s) \Leftrightarrow (s = \mathrm{EmptySet}) \vee (\exists y, s2\ \mathrm{Set}(s2) \wedge s = \mathrm{adjoin}(y, s2))$$
$$\neg(\exists x, s\ \mathrm{adjoin}(x, s) = \mathrm{EmptySet})$$
$$\forall x, s\ \mathrm{member}(x, s) \Leftrightarrow s = \mathrm{adjoin}(x, s)$$
$$\forall x, s\ \mathrm{member}(x, s) \Leftrightarrow \exists y, s2\ (s = \mathrm{adjoin}(y, s2)) \wedge ((x = y) \vee \mathrm{member}(x, s2))$$
$$\forall s1, s2\ \ \mathrm{subset}(s1, s2) \Leftrightarrow (\forall x\ (\mathrm{member}(x, s1) \supset \mathrm{member}(x, s2)))$$
$$\forall s1, s2\ \ (s1 = s2) \Leftrightarrow \mathrm{subset}(s1, s2) \wedge \mathrm{subset}(s2, s1)$$
$$\forall x, s1, s2\ \mathrm{member}(x, \mathrm{intersection}(s1, s2)) \Leftrightarrow (\mathrm{member}(x, s1) \wedge \mathrm{member}(x, s2))$$
$$\forall x, s1, s2\ \mathrm{member}(x, \mathrm{union}(s1, s2)) \Leftrightarrow (\mathrm{member}(x, s1) \vee \mathrm{member}(x, s2))$$

Interprétation

- Requiert une structure notée S = (D, I)

$$
\begin{aligned}
&D \neq \varnothing \ \text{D domaine de la structure, I fonction d'interprétation}\\
&\text{I associe une valeur à chaque constante, variable, fonction ou prédicat}\\
&I(c) = d_i \quad \in D, \text{c constante}\\
&I(x) = v_i \quad \in D, \text{x variable}\\
&I(f)(d1, d2, d3, \ldots, dn) = f_i\ (d1, d2, .., dn), f_i \ \text{fonction associée à f}, f_i \in D\\
&I(P)(d1, d2, d3, \ldots, dn) = p_i\ (d1, d2, .., dn) \ \in \{V, F\}, p_i \ \text{relation de D}
\end{aligned}
$$

- I est une interprétation d ’une expression E du calcul de prédicat si elle associe une valeur à chaque symbole (constante, fonction, prédicat) et toute variable libre de E
- Interprétation des quantificateurs :

$$
\begin{aligned}
&\forall x(A) \ \text{vraie si pour tout élément d de D, A est vraie}\\
&\exists x(A) \ \text{vraie si il existe au moins un élément d de D, tel que A est vraie}
\end{aligned}
$$

Exemple (1/2)

On considère les symboles de prédicats A, L, W, O et E, et les constantes a et p d'un langage du premier ordre et les formules :

$(1)\ \forall x\big(A(x) \supset W(x)\big)$

$(2)\ L(a)$

$(3)\ \forall x\big(L(x) \supset A(x)\big)$

$(4)\ \neg E(a)$

$(5)\ \forall x\big(\big(A(x) \wedge \neg E(x)\big) \supset O(x)\big)$

$(6)\ L(p)$

$(7)\ \neg O(p)$

$(8)\ E(p)$

Exemple (2/2)

- Structure d'interprétation S :
  - Le domaine choisi est le domaine médical.
  - Interprétation :
    - Les constantes a et p deviennent *aorte* et *artère-pulmonaire*,
    - Les prédicats A, L, W, O et E deviennent respectivement : prédicats unaires Artère, Large, Paroi, Riche-en-O2, Exception.

- La signification des prédicats est la suivante : Artère « est une artère », Large « est une grosse artère », Paroi « a une paroi musculaire », Riche-en-O2 « contient un sang riche en O2 », Exception « est une exception »

- Avec cette interprétation, on peut interpréter chaque formule
  - Exemple : formule 1. chaque artère possède une paroi musculaire

Exercice

- Eléments du système formel considéré :
  - Variables : x, y, z
  - Constantes : a, b, c
  - Prédicats : P, Q, R
  - Fonctions : f
- Les expressions suivantes sont-elles des formules bien formées ?
  - $P(a)$
  - $\exists z f(z)$
  - $\exists z(\forall x(\forall y(Q(x,y) \wedge f(R(y))) \supset P(z)$
  - $\neg(\exists z \left(\forall x\big(P(x) \supset R(c,z)\big)\right))$

Les formules bien formées : exemples

p, q, r prédicats
f, g fonctions
a,b,c,d constantes
x,y,z variables

$$1.\ p(x,a,c)$$

$$2.\ p\big(f(x), y, f(g(d))\big)$$

$$3.\ \neg r(a, f(a))$$

$$4.\ p(a,b,c) \vee q(a, f(a))$$

$$5.\ \forall x(p(x,b))$$

$$6.\ \exists x(p(x,b) \vee g(x,y))$$

$$7.\ \forall x(\exists y(p(x,y) \supset g(y,c)))$$

$$8.\ \forall x(\exists y(p(x,y))) \supset g(z,c)$$

Formules bien formées ??

Les formules 6,7,8 ne sont pas bien formées car g n’est pas un prédicat.
Les autres formules sont des formules bien formées

Champs de quantificateurs : exemples (2/4)

- Soit le terme $g(x, a, f(t))$, x et t variables ; a,b,c constantes ; f, g et h fonctions

1. Est-il libre

   a) En t dans
   oui

   b) En x dans
   non

   $$\boxed{(\forall t\ P(t, a, h(x)))}$$

2. Est-il libre

   a) En t dans
   oui

   b) En x dans
   oui

   $$\boxed{(\exists t\ P(b, a, c))}$$

3. Est-libre

   a) En t dans
   non

   b) En x dans
   oui

   $$\boxed{(\forall x\ P(x, f(t), a))}$$

Système formel pour la logique des prédicats (3/3)

- Axiomes
  - Axiomes du calcul propositionnel +

$(A4)\ \forall x\ A(x) \supset A(t)$ où x variable, t terme, t libre en x dans A

$(A5)\ (\forall x\ A \supset B) \supset (A \supset \forall x B)$ x n'a pas d'occurrence libre dans A

(Spécification universelle)

Si $(\forall x)\,P(x)$ alors on déduit $P(a)$ où a est une constante

- Règles d'inférence

$(\text{Modus Ponens})\ A,\ A \supset B \models B$

$(\text{Généralisation})\ A \models \forall x\ A$