Chapitre 3. Transformation en z

- **Transformée en z**
  - définition, existence
  - transformée de Laplace et en z
  - transformée de Fourier et en z
- **Transformée inverse**
  - définition
  - cas particuliers
  - cas general
- **Propriétés de la transformée en z**
  - propriétés
  - convolution
  - correlation
  - produit
  - relation de Parseval
- **Fonction de transfert en z d'un filtre**
  - définition, stabilité
  - filtre défini par une équation aux différences
  - fonction de transfert et position des pôles

La transformation en z

- **définition**

$$soit \;\; une \;\; séquence \;\; x(k) \;\; k \in Z, \;\; z \in C$$

$$Z[x(k)] = \sum_k x(k) z^{-k}$$

$$Transformation \begin{cases} bilatérale & k \in Z \\ unilatérale & k \in Z^+ \;\; ou \;\; Z^- \end{cases}$$

- **Existence**

$$critère \;\; de \;\; Cauchy : \;\; S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \;\; absolument \;\; convergente \;\; (\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} |u_i| < A)$$

$$si \;\; \lim_{n\to\infty} |u_n|^{1/n} < 1$$

T. z. : existence

- **séquence causale**

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k} \quad converge \quad si \quad |z|>R_{x-}, \quad R_{x-}=\lim_{n\to\infty}|x_n|^{1/n}$$

- **séquence anticausale**

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}x(k)z^{-k} \quad converge \quad si \quad |z|<R_{x+}, \quad R_{x+}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}|x_{-n}|^{1/n}}$$

- **séquence quelconque**

$$R_{x-}<|z|<R_{x+} \qquad (vérifier \quad que \quad R_{x-}\leq R_{x+} \quad \ldots)$$

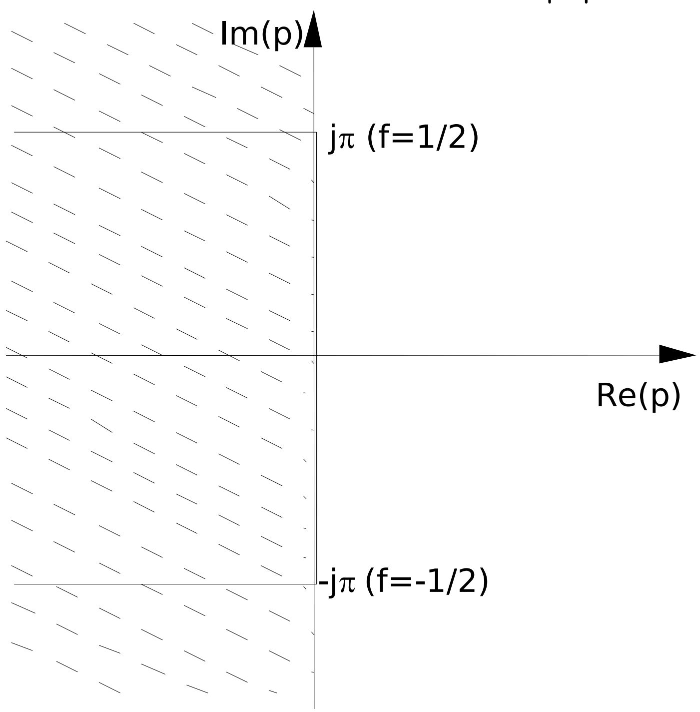
Transformations de Laplace et en z

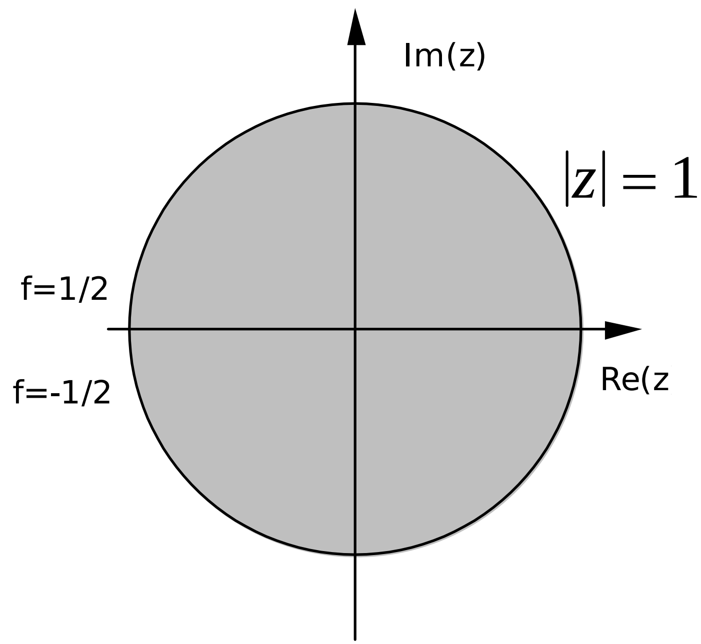
$$X_L(p) = \sum_k x(k)\exp(-pk)$$

$$X(z) = \sum_k x(k) z^{-k} \quad = \quad X_L(\exp(-p))$$

- **stabilité en Laplace** $\mathrm{Re}(p) < 0$

- **stabilité en z** $|z| < 1$





Transformations de Fourier et en z

- $X_F(f) = X(z)\big|_{z=\exp(2j\pi f)}$

- **La transformée de Fourier existe si le cercle unité appartient au domaine de convergence de la T. z**

- $-1/2 \leq f \leq 1/2 \quad \Rightarrow \quad z = \exp(2j\pi f) \ : \ \exp(-j\pi) \rightarrow \exp(j\pi)$

Transformation en z inverse

- **problème :** $soit \;\; X(z) \;\; et \;\; D_c, \;\; x(k) \; ? \; ; \;\; X(z) = \sum_k x(k) z^{-k}$
- **cas particuliers**
  - **développement en série**
  - **quotient de deux polynômes**
- **cas général**

$$soit \;\; X(z) \;\; et \;\; D_c, \;\; x(k) = \frac{1}{2j\pi} \oint_C X(z) z^{k-1} dz$$

$$C \;\; doit \;\; contenir \;\; l'origine \;\; et \;\; \in D_c$$

$$\oint_C X(z) z^{k-1} dz = 2j\pi \sum résidus \;\; de \;\; X(z) z^{k-1}$$

$$x(k) = \sum résidus \;\; de \;\; X(z) z^{k-1}$$

Propriétés de la T. z

- linéarité
- décalage
- changement d'échelle
- inversion du temps
- transformée d'un produit de convolution
- transformée d'une fonction de corrélation
- transformée d'un produit simple
- relation de Parseval

Fonction de transfert en z d'un filtre

- **définition** $G(z) = \sum_{k} g(k) z^{-k}$

- **stabilité** $CNS\ :\ |z| = 1 \in D_c$

- **filtre défini par une équation aux différences**

$$G(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} \quad ; \quad a_0 = 1 \qquad\qquad G(z) = G_0 \frac{\prod_{m=1}^{M} \left(1 - z^{-1} z_m\right)}{\prod_{n=1}^{N} \left(1 - z^{-1} p_n\right)}$$

position des pôles et fonction de transfert