LO12 - Partie 1

1. La logique
    1. Introduction
    2. Systèmes formels
    3. Interprétation des systèmes formels
    4. Système formel de la logique des propositions
    5. Eléments de la logique des prédicats
    6. Système formel de la logique des prédicats
    7. Principe de résolution
2. Prolog
3. Raisonnement à base de règles
4. Générateurs de systèmes à base de règles : clips

Représentation des connaissances

La logique

Objectifs

- Exprimer la valeur de vérité d'énoncés
- Formaliser des raisonnements
- Raisonner sur les données : logique pour l'interrogation de bd, expression des contraintes d'intégrité.
- Systèmes basés sur la connaissance (SBC), déduction automatique, bases de données déductives.

De « quand il pleut Paul prend toujours son parapluie » et « aujourd'hui Paul a son parapluie », peut-on conclure « aujourd'hui il pleut » ?

Donnée et connaissance

- Une donnée (ou fait) contribue à décrire une situation particulière observée

- Une connaissance fait référence à ce que l'on sait, valable sur un ensemble de situations similaires

- Exemple :
  - «Paul s'exerce au volley-ball » est un fait, pouvant s'écrire aussi exerce(paul, volley-ball)
  - $\forall x$ (exerce(x, volley-ball) ➔ devient-meilleur(x)) est une connaissance

Logique (1/2)

- Un moyen de représenter la connaissance (au sens large), inspiré des mathématiques

- Plusieurs types de logiques :
  - logique propositionnelle (ou booléenne) :
    - symboles, connecteurs (et, ou, etc.)…
  - logique du premier ordre (calcul des prédicats) :
    - objets, prédicats sur les objets, connecteurs, quantificateurs
  - logique temporelle
  - …

Logique (2/2)

- Selon la logique choisie, on aura différents objets représentés, et différentes croyances sur ces objets

- Les faits (données) et connaissances sont souvent exprimés dans des énoncés en langage naturel
  - Exemple : « tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel »
    - Que dire de Paul qui est un homme ?
      - Il faudrait pouvoir substituer Paul à Socrate
      - Comment une machine peut-elle faire cela ? ➔ aide de la logique

Représentation des énoncés de la langue naturelle (1/2)

- Un objet peut être identifié par la catégorie à laquelle il appartient
  - Paul est un homme : homme(paul)
  - homme est un prédicat, paul est une constante

- Enoncés utilisant les objets
  - « Un homme est plus grand que tous les autres »
    - « Un homme » s'exprime par $\exists x\ \left(homme(x)\right)$
    - « Les autres » sont des hommes distincts de x
      - $\forall y\ \left(homme(y)\right)\ et\ y <> x$
    - x est plus grand que les y : *plus_grand(x, y)* (>=)
    - y est différent de x : diff(y,x)
    - Un homme est plus grand que les autres
      - $\exists x \forall y\ (\text{homme}(x) \wedge \text{homme}(y) \wedge \text{diff}(y,x)) \Rightarrow plus\_grand(x, y)$

Représentation des énoncés de la langue naturelle (2/2)

- Enoncé exprimant une connaissance
  - « Tous les oiseaux volent »
    - Tout objet de la catégorie « oiseaux » vole
      - $\forall x\ (oiseau(x) \rightarrow vole(x))$
- Utilisation
  - « La perdrix est un oiseau »
    - On sait que $\forall x\ (oiseau(x) \rightarrow vole(x))$
    - On sait que $oiseau(perdrix)$
    - On en déduit $vole(perdrix)$
- La déduction réalisée met en œuvre :
  - L'inférence
  - L'unification

1. Systèmes formels

- Ils permettent de formaliser des énoncés ou des raisonnements en langage naturel
  - Éléments du langage autorisés, syntaxe des formules bien formées, règles d'inférence etc
- Leibniz (1646-1716), introduit un langage fondé sur des notations mathématiques et les mécanismes d'inférence
- Un système formel permet de formaliser :
  - des raisonnements du type : si ... alors...
    - "si j'ai la grippe alors je me soigne"
      - $G \rightarrow S$ *Calcul propositionnel*
    - "tous les hommes sont mortels. Or, Socrate est un homme donc Socrate est mortel"
      - $\forall h \in H \rightarrow M(h)$ *Calcul des prédicats du premier ordre*
      - $s \in H \rightarrow M(s)$

Définition (1/2)

Un système formel est composé de :

- un **ensemble** fini ou dénombrable de **symboles** (appelés également atomes)
    - ensemble fini = {0, 1, ..., 10}, {a, b, c} etc.
    - ensemble dénombrable : N

  qui peuvent faire place à des **variables propositionnelles** : G, S, M, P_1, P_2, P, Q, etc.

- Un **mot** est une succession de symboles

- Parmi les mots, on distingue un ensemble Fs constitué des **formules bien formées**. En général, on donne explicitement la manière de construire les formules bien formées (fbf)

Définition (2/2)

- Parmi les formules de Fs, on en distingue certaines qui sont les **axiomes**

- Un ensemble fini R1, R2, ..., Rn de relations sur les éléments de Fs et qui s'appellent les **règles d'inférence**.

Ces règles permettent de décider si une formule A est conséquence directe en vertu de la règle R_i : des formules B1, B2, ..., Bk de Fs. Ceci s'écrit : $B1, B2, ..., Bk \models_{Ri} A$

La logique des propositions et la logique des prédicats sont des systèmes formels particuliers

Règles d’inférence : exemples

- Si x est le père de y et y est la mère de z
  Alors x est le grand-père de z

- Si le patient a de la fièvre

Alors soupçonner une infection

Théorème

- Une démonstration (ou preuve) dans un système formel est une suite de formules (bien formées) A1, A2, ..., Ap telle que $\forall$ i = 1, 2, ...p, A_i est soit un axiome, soit se déduit de certaines formules A_r (r <i) par une règle d'inférence

- Un théorème est une formule T telle qu'il existe une démonstration dont le dernier terme est T :

  A1, A2, ..., Ap = T

- Un système formel est décidable si étant donnée une formule, il existe une procédure appelée procédure de déduction qui permette d'affirmer si oui ou non cette formule est un théorème

- Un non-théorème est un mot dont on peut prouver qu'il n'est pas un théorème.

Système formel : exemple 1

Système formel composé de

- symboles : a, %, b
- Variables : c et d
- Fbf : $b^n a\%ab^p$, n>=0, p>=0
- Axiome : a%a
- règle d'inférence R :
  c % d ➔ bc % bd

Système formel : exemple 2

Système formel composé de

- Symboles : 1,=,+
- Fbf : concaténation
- Axiome : 1+1=11
- règle d’inférence R :
  - R1 : si une expression de la forme *A = B* est un théorème (où "A" désigne n'importe quelle suite de "un ", de "plus ", et de "egal ", et B de même), alors l'expression *1 A = B 1* est aussi un théorème
  - R2 : si une expression de la forme *A = B* est un théorème, alors l'expression *A 1 = 1 B* est aussi un théorème
- Q1, Q2 et Q3 sont-ils des théorèmes ?
  - Q1 : 1 1 + 1 1 = 1 1 1 1
  - Q2 : 1 + 1 1 = 1 1 1 1
  - Q3 : 1 + 1 + 1 = 1 1 1

2. Interprétation d’un système formel

Objectif : donner du sens aux expressions logiques, en les transposant dans le monde réel. Cela permet de leur attribuer une valeur de vérité, vrai ou faux, cela consiste à calculer **l’interprétation** de chaque formule

- L’interprétation d’une formule dépend de l’interprétation de chacun de ses composants
- Elle a lieu dans un **domaine d’interprétation**
- L’interprétation d’une proposition p_i est notée $I(p_i)$
- L’interprétation d’un système formel doit interpréter ainsi ses composants :
  - axiome → vrai
  - théorème → vrai
  - ***théorème → faux* n’a pas de sens**
  - non-théorème → vrai, non-théorème → faux
- un axiome donne un énoncé vrai dans le domaine d’interprétation. Si un théorème du système formel devient un énoncé faux dans une interprétation, c’est que dans le domaine, les règles d’inférence n’ont pas de sens et l’interprétation n’est pas intéressante

Exemple (1/4)

<u>système formel composé de :</u>

symboles : a, %, b

Variables : c et d

Fs : $b^n a\%ab^p$, n>=0, p>=0

Axiome : a%a

règle d'inférence R : c % d ➔ bc % bd

- Interprétation 1 de ce système formel
  - domaine d'interprétation = arithmétique sur N
    - a interprété par le nombre 0
    - % interprété par le symbole =
    - b interprété par la phrase "successeur du nombre"
  - axiome : a % a interprété comme O = O, énoncé vrai en arithmétique
  - règle d'inférence : c % d ➔ bc % bd s'interprète par : de c = d on déduit successeur de c = successeur de d

Exemple (2/4)

- Théorème : ba % ba
  - successeur de 0 est le successeur de 0 <=> 1 = 1
  - b^2a % b^2a → le successeur de 1 est le successeur de 1<=> 2 = 2 (vrai)
  - b^na % b^na → le successeur de n - 1 est le successeur de n - 1 <=> n = n (vrai)

  Ces théorèmes sont donc des énoncés vrais et cette interprétation est valable

- b^na % b^pa, $n \neq p$, n’est pas un théorème et il s’interprète par :
  le $n^{\text{ième}}$ successeur de 0 est le $p^{\text{ième}}$ successeur de 0 (faux)

  => Il y a concordance entre un théorème du système formel et les énoncés vrais pour cette partie de l’arithmétique

Exemple (3/4)

- Interprétation 2 du système formel

  - Domaine d'interprétation : les personnages célèbres
    - a s'interprète par "Socrate est mortel"
    - % s'interprète par la phrase "est identique à "
    - b s'interprète par la phrase "le contraire de"

  - **a % a** s'interprète par la phrase "Socrate est mortel est identique à Socrate est mortel"

  - Théorème : **ba % ba** s'interprète par : « le contraire de Socrate est mortel est identique au contraire de Socrate est mortel » (vrai)

Exemple (4/4)

- les théorèmes **$b^n a$ % $b^n a$** s'interprètent aussi par un énoncé vrai

- Les non-théorèmes
  - **bba%a** s'interprète par :

    le contraire du contraire de Socrate est mortel est identique à Socrate est mortel (vrai)

- R est une règle "du bon sens". Certains non-théorèmes s'interprètent par des énoncés vrais

  ➔ pas de correspondance entre les énoncés vrais et les théorèmes (Le domaine des personnes célèbres n'est pas un bon modèle pour interpréter le système formel)

Modèles

- Soit F une formule et I une interprétation.
  I est un **modèle** pour F si I(F)=vrai

- Il peut exister 0 ou plusieurs modèles pour une formule

- Le modèle d'un ensemble de formules F={f1, f2, f3…} est une interprétation rendant vraies en même temps f1, f2, f3….

Propriétés des formules liées à leur interprétation

- une formule est **valide** (ou nécessairement vraie) si elle est vraie dans toute interprétation dans tous les mondes possibles. ex : “il pleut ou il ne pleut pas” est toujours vraie. Une telle expression est aussi appelée tautologie
- une formule est **satisfiable** (ou consistante) si il existe une interprétation dans laquelle cette expression est vraie (elle a au moins un modèle)
- une formule est **contradictoire** (ou insatisfiable, ou inconsistante) si elle est fausse pour toute interprétation (pas de modèle)
- A **implique** B si pour toute interprétation rendant A vraie, B est vraie aussi
- A et B sont **équivalentes** si elles ont même valeur de vérité dans toute interprétation
- Un ensemble de formules est **consistant** si il existe une interprétation rendant toutes les formules vraies

Notations

- Si A est une formule, la notation $\varnothing$ |= A signifie que A est une **tautologie**,
  - autre notation : |= A

- Plus généralement, si S est un ensemble de formules, S |= A signifie que toutes les interprétations rendant S vrai, rendent aussi A vraie. A est dit conséquence logique de S.

- Etant donné la définition de |=, on a :
  - S |= A signifie que S ➔ A est une tautologie, noté aussi |= (S ➔ A)

  d 'où : (S |= A) $\Leftrightarrow$ (|= (S ➔ A))

- Généralisable à : (H1, …Hn |= C) $\Leftrightarrow$ (|= (H1$\wedge$H2$\wedge$…Hn ➔ C))

3. Système formel pour le calcul propositionnel

- L système formel pour le calcul propositionnel (CP) est la donnée
  - d'un alphabet : ensemble dénombrable de lettres {P, Q, R, p, q, r, etc...} décrivant des variables propositionnelles
  - symboles : $\neg \rightarrow (\ ), \wedge \vee \mathrm{VF} \Leftrightarrow$
- F_L formules bien formées
  - A, B, C ... sont des formules bien formées
  - si A et B sont des formules bien formées, $\neg$A et A ➔ B, A$\wedge$B, A$\vee$B sont des formules bien formées
  - Exemples
    - P
    - Q ➔ p
    - $\neg\neg$P
    - $\neg$(P $\vee$ (Q ➔ P))
- Axiomes

$$(A1)(A \rightarrow (B \rightarrow A))$$
$$(A2)(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$$
$$(A3)((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$$
$$(MP) A, (A \rightarrow B) \rightarrow B$$

Interprétation d’une formule

- Si P et Q sont des formules
  - I(P $\wedge$Q)
    - V si P et Q vraies
    - F sinon
  - I(P $\vee$ Q)
    - V si au moins une des formules est vraie
    - F sinon
  - I(P -> Q)
    - F si P vraie et Q fausse
    - V sinon
  - I(P <=> Q)
    - V si I(P)=I(Q)
    - F sinon
  - I($\neg$P)
    - V si P fausse
    - F si P vraie

Modèles d'interprétation pour la logique propositionnelle

- Les propriétés vues en D22 s'appliquent également dans le système formel pour le calcul propositionnel
- Exemples
  - L'ensemble F={P $\wedge$Q, Q $\vee$ R} est satisfiable
    - Il y a deux modèles
      - I1 : I(P) = V ; I(Q) = V ; I(R)=V
      - I2 : I(P) = V ; I(Q) = V ; I(R)=F
  - L'ensemble F ={P $\wedge$Q, Q $\vee$ R, $\urcorner$P} est inconsistant
    - Dans tout modèle, on devrait avoir
      - I(P $\wedge$Q)=V donc I(P)=V
      - I($\urcorner$P)=V donc I(P)=F. Contradiction !

Propriétés des opérateurs

- Double négation
  - $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
- Tiers exclu
  - $(\neg P \wedge P) \Leftrightarrow F$
  - $(\neg P \vee P) \Leftrightarrow V$
- Idempotence
  - $(P \vee P) \Leftrightarrow P$
  - $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$
- Commutativité
  - $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
  - $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
- Associativité
  - $(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$
  - $(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$
- distributivité-et
  - $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$
- distributivité-ou
  - $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$
- Propriétés de De Morgan
  - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$
  - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q))$
- implication-ou
  - $((P \rightarrow Q)) \Leftrightarrow ((\neg P \vee Q))$
- Double implication
  - $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$
- Et…
  - $(P \vee V) \Leftrightarrow V$
  - $(P \wedge V) \Leftrightarrow P$
  - $(P \vee F) \Leftrightarrow P$
  - $(P \wedge F) \Leftrightarrow F$

Exemple

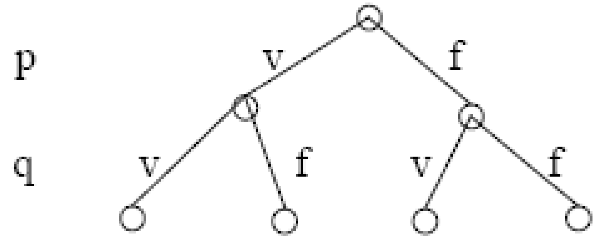
Soit A : Hélène est enseignante
Soit B : Hélène est riche
Soit C : Hélène est actrice

- On suppose
  - A faux
  - $\neg A$ et B faux
  - $\neg C \Rightarrow B$ faux

- Montrer que Hélène n 'est pas une actrice

Comment trouver un modèle d'interprétation ?
(1/3)

- Si F est une formule avec n variables propositionnelles
- Il n'y a pas d'autre algorithme plus sûr que celui consistant à tenter toutes les combinaisons d'interprétations des n variables, donc 2^n modèles possibles !
- Solution 1 : arbre sémantique
  - Autant de niveaux qu'il y a de variables dans la formule
  - De chaque nœud partent deux branches : « vrai » et « faux »
  - Un chemin de la racine à une feuille de l'arbre représente une interprétation
  - L'arbre représente toutes les interprétations possibles



Comment trouver un modèle d’interprétation ? (2/3)

- Solution 2 : méthode de Quine
  - On calcule progressivement la valeur de vérité des sous-formules
  - L’ordre n’a pas d’importance

<table>
<tr><th colspan="3">$\neg(P \vee (Q \rightarrow P)) \wedge Q$</th></tr>
<tr><td>Q faux</td><td colspan="2">Q vrai</td></tr>
<tr><td>$\neg(P \vee (0 \rightarrow P)) \wedge 0$</td><td colspan="2">$\neg(P \vee (Q \rightarrow P)) \wedge Q$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">0</td><td colspan="2">$\neg(P \vee (1 \rightarrow P))$</td></tr>
<tr><td>P faux</td><td>P vrai</td></tr>
<tr><td>$\neg(0 \vee (1 \rightarrow 0))$</td><td>$\neg(1 \vee (1 \rightarrow 1))$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

Comment trouver un modèle d'interprétation ? (3/3)

- Solution 3 : Table de vérité
  - Une colonne par variable propositionnelle + au moins une colonne pour la formule
  - Autant de lignes que d'interprétations possibles

P	Q	$P \wedge Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Application

Raisonnements valides ?

1. S’il pleut, je ne sors pas. Or, je sors, donc il ne pleut pas
2. S’il pleut, je ne sors pas. Or, il ne pleut pas, donc je sors.