Chapitre 2 :
Transformation de Fourier Discrete

- **Discrétisation de la fréquence**
- **Propriétés de** W_N^{kn}
- **Influence de la discrétisation**
- **propriétés de la TFD**

discrétisation de la fréquence

- **impossibilité de l'évaluation de la TF**

- $$\Delta f = 1/N, f_n = n\Delta f, 0 \le n \le N-1$$

- $$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\exp(+2j\pi fk)df$$ **=>**

$$x_p(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n\Delta f)\exp(+2j\pi nk / N)$$

$$x_p(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)W_N^{kn}$$

propriétés de W_N^{kn}

- $$W_N^{k+l} = W_N^k W_N^l$$
- $$W_N^{k+lN} = W_N^k$$
- $$W_N^{lN} = 1$$
- $$W_N^{N/2} = -1$$
- $$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$
- $$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \left\{\begin{array}{ll} 1 \;\; si \;\; k = lN \\ 0 \qquad\quad \text{sinon} \end{array}\right\}$$

influence de la discrétisation

- $x_p(k) = \sum_p x(k + pN)$
- **périodisation de x(k)**
- **recouvrement si x(k) non nul pour k** $\geq$ **N**
- **mais résultat exact sinon**

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-2j\pi kn / N)$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp(+2j\pi kn / N)$$

propriétés de la TFD

- **linéarité**
- **décalage temporel**
- **modulation**
- **convolution linéaire / par TFD**

Rappels sur les fonctions d'une variable complexe

- $f(z) = f(x + jy) = u(x,y) + jv(x,y)$

- **continuité si**

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

$$ou \quad \forall \varepsilon, \exists \eta, \ |z - z_0| < \eta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

- **dérivabilité si**

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \ \ existe$$

Rappels sur les fonctions d'une variable complexe

- **Fonction analytique (holomorphe)dans D si continue et dérivable en tout point de D**
- **Théorème de Cauchy-Riemann**

$$une \quad CNS \quad pour \quad que \quad f(z) \quad u(x,y) + jv(x,y) soit$$

$$analytique \;\; est \;\; que$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

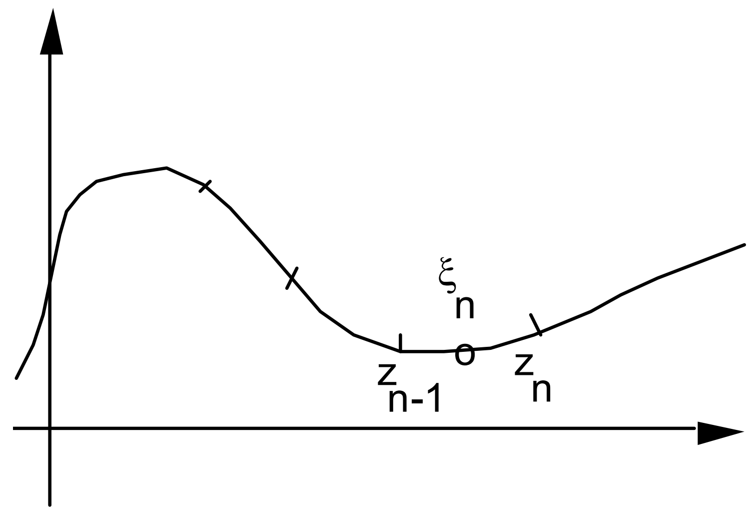
- **point singulier / pôle**

$$si \;\; \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \;\; et \;\; \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$$

$$alors \quad z_0 \quad est \quad un \quad pôle \quad d'\,ordre \quad n \quad de \quad f(z)$$

Rappels sur les fonctions d'une variable complexe

- **Intégration**



$$I = \lim_{\max \Delta z_n \to 0, N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)\left(z_n - z_{n-1}\right) = \oint_c f(z)dz$$

- **Théorème de Cauchy**

si $f(z)$ *est analytique dans un domaine simplement connexe* D,

soit C *une courbe fermée contenue dans* D.

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Rappels sur les fonctions d'une variable complexe

- **corollaire** $\int_A^B f(z)dz$ est indépendant du chemin d'intégration

- $$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2j\pi$$

- **formule fondamentale de Cauchy** $$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2j\pi f(a)$$

- **plus généralement**

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2j\pi}{n!} f^{(n)}(a)$$

Rappels sur les fonctions d'une variable complexe

- *soit* $g(z)$ *possédant un pôle d' ordre* n *en* $z = a$, *alors*

$$\oint_C g(z)dz = \frac{2j\pi}{(n-1)!}\left[(z-a)^n f^{(n-1)}(z)\Big|_{z=a}\right]$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\left[(z-a)^n f^{(n-1)}(z)\Big|_{z=a}\right]$$ *est appelé résidu de* f *au pôle* a

- *si* a *est un pôle simple de* $g(z)$,

$$\oint_c g(z)dz = 2j\pi\left[(z-a)f(z)\Big|_{z=a}\right]$$

dans le cas de k *pôles*, $\oint_C f(z)dz = 2j\pi \sum_{i=1}^{k} résidus$