SY16

PLAN GENERAL DU COURS

CHAPITRE I

INTRODUCTION AUX SIGNAUX ET SYSTEMES NUMERIQUES

CHAPITRE II

TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRETE

CHAPITRE III

TRANSFORMATION EN Z

CHAPITRE IV

FILTRAGE NUMERIQUE

CHAPITRE I

I. INTRODUCTION AUX SIGNAUX ET SYSTEMES NUMERIQUES

II. SIGNAUX NUMERIQUES

II.1. Définition
II.2. Signaux élémentaires
II.3. Opérations élémentaires

III. TRANSFORMATION DE FOURIER

III.1. Définition
III.2. Existence
III.3. Propriétés
III.4. Représentation fréquentielle

IV. CORRELATION

IV.1. Définitions - Propriétés
IV.2. DSP

V. SYSTEME DE TRAITEMENT NUMERIQUE

V.1. Définitions - Propriétés
V.2. Filtres numériques
V.3. Réponse fréquentielle
V.4. Filtre défini par une équation aux différences

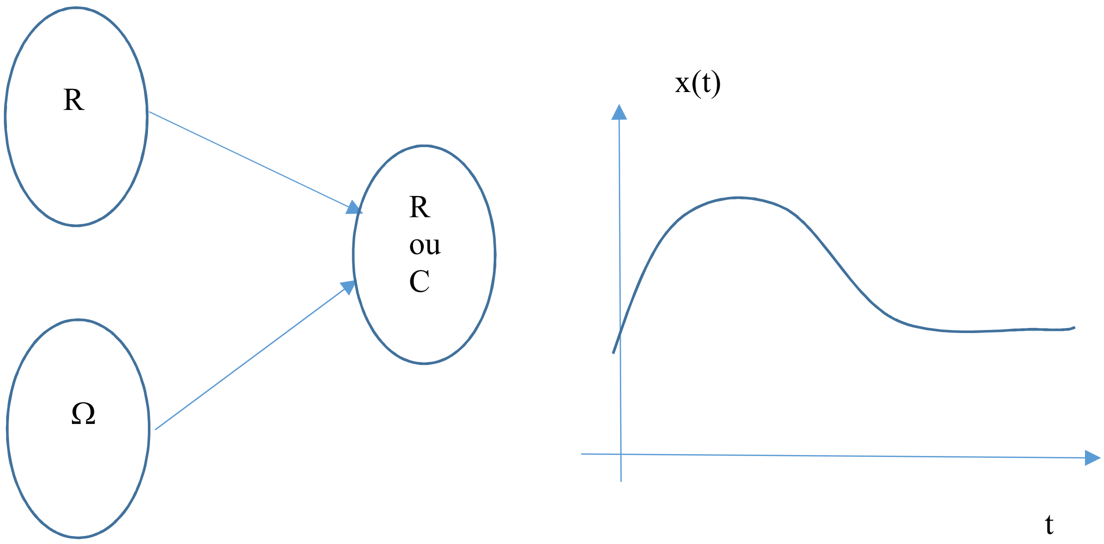
Chapitre I

I. INTRODUCTION AUX SIGNAUX ET SYSTEMES NUMERIQUES

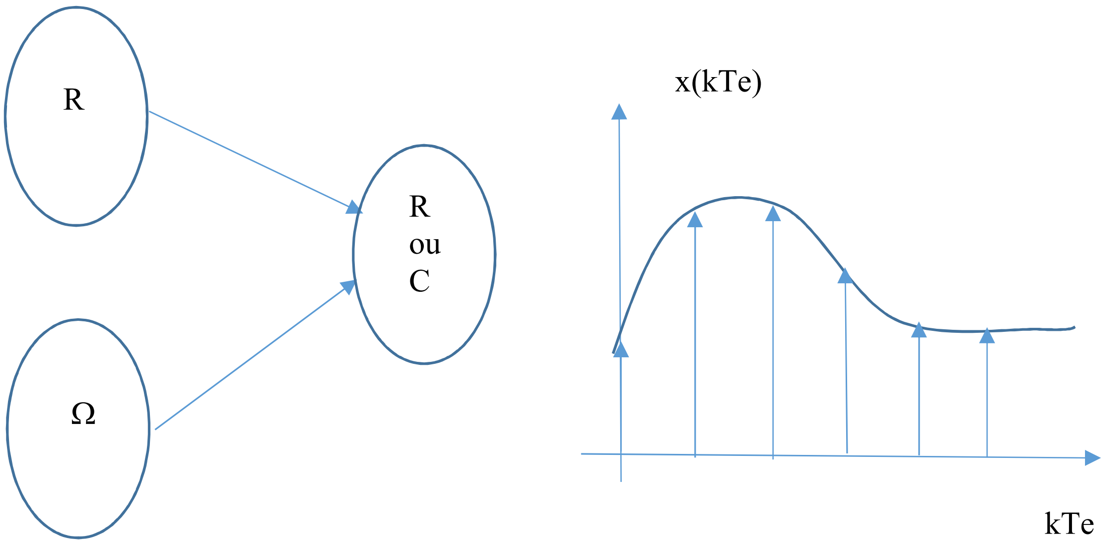
Classes de signaux :

Parmi les partitions possibles, on peut effectuer la suivante : on distinguera deux classes de signaux, les signaux analogiques et les signaux discrets.

- Analogiques

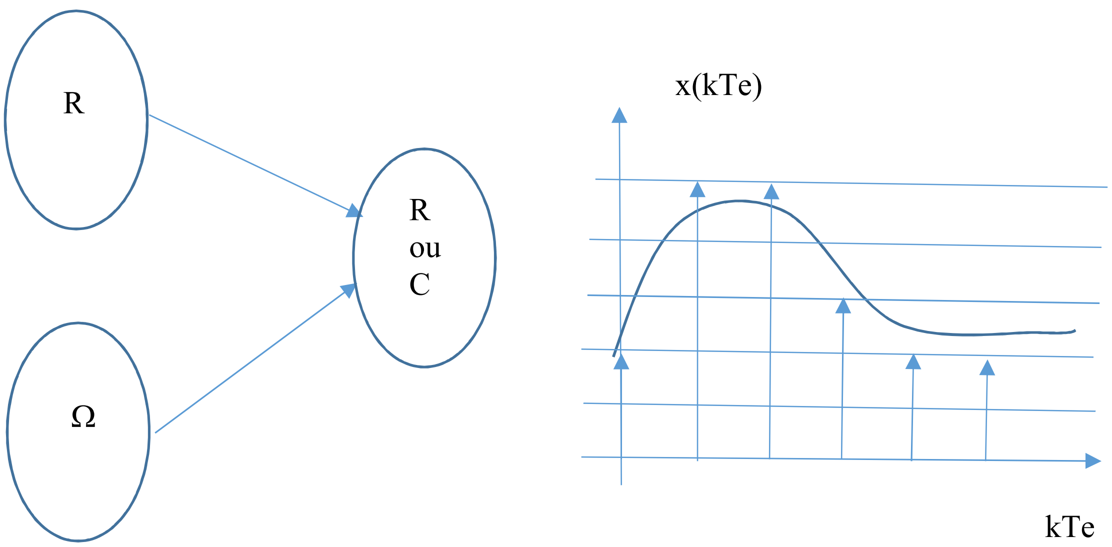


- Discrets



Si le signal est déterministe (le hasard n'intervient pas dans la génération de celui-ci), le signal sera une application de R dans R ou C. Dans le cas contraire, il sera une application de R x Ω dans R ou C. En général, la dépendance du signal est relative au temps. On peut toutefois être amené à considérer des signaux dépendant d'autres variables (espace...).

II. SIGNAUX NUMERIQUES



II.1. <u>Définition</u>

On appellera signal numérique tout signal discret dont l'amplitude est quantifiée. Toutefois, par abus de langage nous ne différencierons plus dans ce document les signaux discrets des signaux numériques en raison de la précision des calculateurs actuels. En effet, la finesse de description en amplitude peut être très importante (le pas de quantification est faible) avec un codage discret sur un nombre raisonnable de bits. Par exemple, l'erreur due à la quantification sur un disque compact (16 bits) se situe à 90 dB en dessous du niveau maximum, ce qui est considérable.

II.2. <u>Signaux élémentaires</u>

Les signaux que nous allons manipuler fréquemment nécessitent une attention particulière.

- impulsion unité : $d(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases}$

- échelon unité : $u(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- fenêtre rectangulaire : $rect_N(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

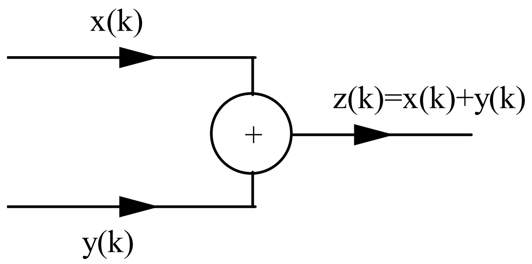
- signal sinusoïdal : $x(k) = \sin \dfrac{2\pi k}{N}$ $\quad k \in Z$

N (non nécessairement entier) : Nb d'échantillons par période

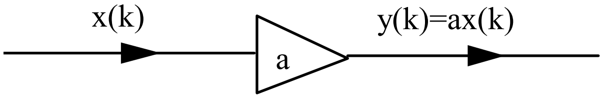
- signal exponentiel complexe : $x(k) = a^k e^{2j\pi f_0 k}$, $\quad a \in C,\ k \in Z$

II.3. Opérations élémentaires

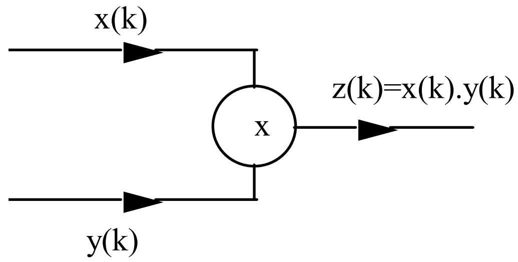
- Addition : $z(k) = x(k) + y(k)$



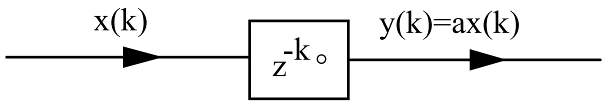
- multiplication par une constante $a \in C$: $y(k) = a\, x(k)$



- produit de 2 signaux : $z(k) = x(k) . y(k)$



- décalage : $z(k) = x(k - k_0)$



III. TRANSFORMATION DE FOURIER D'UN SIGNAL DISCRET

III.1. <u>Définition</u>

Soit une séquence x(k), $k \in Z$ on appelle transformation de Fourier $X_F(f)$ de x(k) :

$$\mathbf{X_F(f) = \sum_k x(k)\ e^{-j2\pi kf}}$$

III.2. <u>Existence</u>

• $X_F(f)$ existe si $\sum_k |x(k)| < A$

<u>démonstration</u> : $| X_F(f) | = |\sum_k x(k)\ e^{-j2\pi kf} | \leq \sum_k |x(k)\ e^{-j2\pi kf} | = \sum_k |x(k)|$

• $X_F(f)$ existe si $\sum_k |x(k)|^2 < B$ car $\sum_k |x(k)|^2 \leq (\sum_k |x(k)|)^2 < A^2 = B$

<u>Propriété essentielle</u> : **$X_F(f)$ est périodique de période 1**

<u>démonstration</u> : $X_F(f+p) = \sum_k x(k)\ e^{-2j\pi k(f+p)}$, $p \in Z$

$$= \sum_k x(k)\, e^{-2j\pi kf} \,.\, e^{-2j\pi kp} = X_F(f)$$

On étudiera donc la transformation de Fourier d'un signal discret sur une période, soit en général dans l'intervalle [0, 1] ou $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Cette fonction est, en général, une fonction continue de la variable f.

Transformation de Fourier inverse :

$$\mathbf{x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X_F(f)\ \ e^{2j\pi fk}\ df}$$

démonstration : $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_l x(l)\, e^{-2j\pi fl} \right) e^{2j\pi kf}\ df =$

$$\sum_l x(l) \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2j\pi f(l-k)}\ df = \sum_l x(l)\ d(l-k) = x(k)$$

car

si $l = k$ $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2j\pi f(l-k)}\ df = 1$

si $l \neq k$ $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2j\pi f(l-k)}\ df = 0$

Exemples :

• $F(d(k)) = \sum_k d(k)\, e^{-j2\pi kf} = e^{-0} = 1$

• $F[a^k\, u(k)] = \dfrac{1}{1 - a\, e^{-2j\pi f}}$ pour $|a| < 1$

• $F[rect_N(k)] = \sum\limits_{k} rect_N(k)\, e^{-2j\pi kf} = \sum\limits_{k=0}^{N-1} e^{-2j\pi kf} = \dfrac{1-\exp(-2j\pi fN)}{1-\exp(-2j\,\pi f)}$

$$= \frac{e^{-j\pi fN}[e^{j\pi fN} - e^{-j\pi fN}]}{e^{-j\pi f}\,[e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}]} = \frac{\sin\pi fN}{\sin\pi f}\; e^{-j\pi(N-1)f}$$

III.3. Propriétés

- linéarité

$\forall\ a_1, a_2 \in C$, $F[a_1\, x_1(k) + a_2\, x_2(k)] = a_1\, F(x_1(k)) + a_2\, F(x_2(k))$

- décalage

$F[x(k-k_0)] = e^{-2j\pi k_0 f} .\ X_F(f)$

- modulation

$F[x(k)\, e^{2j\pi kf_0}] = X_F(f - f_0)$

- symétrie

• $x(k)$ réel $[x(k) = x^*(k)] \Leftrightarrow X_F(f) = X_F^*(-f)$

• $x(k)$ réel pair $[x(k) = x^*(k) = x(-k)] \Leftrightarrow X_F(f)$ réelle paire

• $x(k)$ réel impair $\Leftrightarrow X_F(f)$ imaginaire impaire

Transformée de Fourier d'un produit

- $x(k) \leftrightarrow X_F(f)$
- $y(k) \leftrightarrow Y_F(f)$
- $z(k) = x(k)\, y(k)$

détermination de $Z_F(f)$.

$$Z_F(f) = \sum_k z(k)\, e^{-2j\pi fk}$$

$$z(k) = x(k) \,.\, \int_{-1/2}^{1/2} Y_F(f')\ e^{2j\pi kf'}\ df'$$

$$Z_F(f) = \sum_k x(k) \,.\, \int_{-1/2}^{1/2} Y_F(f')\ e^{2j\pi kf'}\ df' \,.\, e^{-2j\pi fk}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} Y_F(f') \sum_k x(k)\, e^{-2j\pi k(f-f')}\ df'$$

en remarquant que $\sum_k x(k)\, e^{-2j\pi k(f-f')} = X_F(f-f')$

on obtient $\quad Z_F(f) = \int_{-1/2}^{1/2} X_F(f-f')\ Y_F(f')\ df'$

l'intégrale $\int_{-1/2}^{1/2} X_F(f-f')\ Y_F(f')\ df'$ est appelée produit de convolution de $X_F(f)$ et $Y_F(f)$ et sera écrit $X_F(f) * Y_F(f)$.

Transformée de Fourier d'un produit de convolution

$$z(k) = x(k) * y(k) = \sum_{l} x(l)\, y(k-l)$$

(ceci est l'expression d'un produit de convolution discret)

$$Z_F(f) = \sum_{k} \sum_{l} x(l)\, y(k-l)\, e^{-2j\pi kf}$$

posons m = k - l

$$= \sum_{m} \sum_{l} x(l)\, y(m)\, e^{-2j\pi(m+l)\, f}$$

$$= \sum_{m} y(m)\, e^{-2j\pi mf} \, . \sum_{l} x(l)\, e^{-2j\pi lf} = X_F(f) \, . \, Y_F(f)$$

Réciproquement : $Z_F(f) = X_F(f) \, . \, Y_F(f)$

$$= \sum_{k} x(k)\, e^{-2j\pi fk} \, . \sum_{l} y(l)\, e^{-2j\pi lf}$$

posons k + l = m

$$= \sum_{k} \sum_{l} x(k)\, y(l)\, e^{-2j\pi(k+l)f}$$

$$= \sum_{m} \sum_{k} x(k)\, y(m-k)\, e^{-2j\pi mf}$$

on reconnait alors $\sum_{m} z(m)\, e^{-2j\pi mf}$ avec $z(m) = x(m)*y(m)$

<u>Relation de Parseval</u> :

<u>Propriété générale</u> : $\displaystyle \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{x(k)\, y^*(k-l)} = \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{X_F(f)\, Y_F^*(f)\, e^{2j\pi lf}\, df}$

<u>démonstration</u> :

$$y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} Y_F^*(f) \; e^{-2j\pi kf} \, df$$

$$\sum_k x(k)\, y^*(k-l) = \sum_k x(k) \int_{-1/2}^{1/2} Y_F^*(f) \; e^{-2j\pi(k-l)f}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} Y_F^*(f) \; e^{-2j\pi lf} \underbrace{\sum_k x(k)\, e^{-2j\pi kf}}_{X_F(f)} \, df$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X_F(f)\, Y_F^*(f) \; e^{2j\pi lf} \, df$$

cas particulier : $l = 0$

$$\sum_k x(k)\, y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X_F(f)\, Y_F^*(f) \, df$$

en particulier : $$\sum_k |x(k)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X_F(f)|^2 \, df$$

IV. CORRELATION DES SIGNAUX

IV.1. <u>Définitions - Propriétés</u>

- Intercorrélation de x(k) et y(k)

$$r_{xy}(k) = \sum_l x(l)\, y^*(l-k)$$

- Autocorrélation de x(k)

$$r_x(k) = \sum_l x(l)\, x^*(l-k)$$

Propriétés :

• $r_{xy}(k) = r^*_{yx}(-k)$

Démonstration : posons m = l - k

$$r_{xy}(k) = \sum_l x(l)y^*(l-k) = \sum_m x(m+k)y^*(m) = \left(\sum_m y(m)x^*(m+k)\right)^* = r^*_{yx}(-k)$$

• $r_x(0) \in R$, $r_x(0) \geq 0$

• $|r_x(k)| \leq |r_x(0)|$

Démonstration : $|r_x(k)|^2 = |\sum_l x(l)\, x^*(l-k)|^2 \leq \underbrace{\sum_l |x(l)|^2}_{r_x(0)} \underbrace{\sum_l |x^*(l-k)|^2}_{r_x(0)}$

- Inégalité de Schwarz : $\left(\vec{A}.\vec{B}\right)^2 = \left(\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\| \cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)\right)^2$

$$\left(\vec{A}.\vec{B}\right)^2 \leq \left(\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\right)^2$$

$$\left(\sum A_i B_i\right)^2 \leq \sum A_i^2 \sum B_j^2$$

en continu, cette inégalité devient :

$$\left|\int f(t)\, g(t)\, dt\right|^2 \leq \int |f(t)|^2\, dt \;.\; \int |g(t)|^2\, dt$$

$r_x(k) = r^*_x(-k)$

si x(k) réel, $r_x(k) = r_x(-k)$

IV.2. <u>Densité spectrale de puissance</u> (DSP)

<u>Définition</u> : la DSP est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation.

$$S_{xy}(f) = F[r_{xy}(k)] = \sum_k \left(\sum_l x(l)\, y^*(l-k)\right) e^{-2j\pi kf}$$

$$= \sum_m \sum_l x(l)\, y^*(m)\, e^{-2j\pi(l-m)f}$$

$$= \left(\sum_l x(l)\, e^{-2j\pi lf}\right) \left(\sum_m y(m)\, e^{-2j\pi fm}\right)^*$$

$$= X_F(f) \,.\, Y_F^*(f)$$

d'où $\quad S_{xy}(f) = X_F(f)\, Y_F^*(f)$

$$S_x(f) = |X_F(f)|^2$$

Propriétés :

$$S_{xy}(f) = S_{yx}^*(f)$$

si x(k) et y(k) réels $\quad S_{xy}(f) = S_{yx}(-f)$

Relation de Parseval :

$$r_{xy}(0) = \sum_k x(k)\, y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{xy}(f)\, df$$

$$r_x(0) = \sum_k |x(k)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f)\, df$$

V. SYSTEME DE TRAITEMENT NUMERIQUE

V.1. Définition - Propriétés

$$\xrightarrow{x(k)} \; O \; \xrightarrow{y(k)=\ O[x(k)]}$$

Propriétés :

- linéarité si $O[\sum\limits_i a_i\, x_i(k)] = \sum\limits_i O\ a_i\ [x_i(k)]$

- Invariance : $O[x(k)] = y(k) \Rightarrow O[x(k-k_0)] = y(k-k_0)$

- Causalité : Le système est causal si la sortie à l'instant k_0 ne dépend que des entrées aux instants k, $k \leq k_0$, $\forall\ k_0$.

- Stabilité : Un système est stable si la réponse à tout signal d'entrée borné est bornée.

$\Leftrightarrow \quad \forall\ k,\ \forall\ x(k), \qquad x(k) < A \quad \Rightarrow \quad y(k) < B$

V.2. Filtres numériques

Définition : On appelle filtre numérique, tout opérateur linéaire, invariant, stable.
On appelle Réponse Impulsionnelle (RI) du filtre, sa réponse à d(k).

La réponse d'un filtre s'exprime sous la forme :

$$y(k) = \sum_{l} g(l)\, x(k-l)$$

Démonstration :

soit le signal d'entrée $x(f,k) = e^{2j\pi fk}$ produisant en sortie $y(f,k)$

mettons à l'entrée : $x(f,k+k_0) = e^{2j\pi fk} \cdot e^{2j\pi fk_0}$

en utilisant la propriété de linéarité, la sortie s'exprime $e^{2j\pi fk_0} \cdot y(f,k)$

en utilisant la propriété d'invariance, la sortie est $y(f, k+k_0)$

donc : $$y(f, k+k_0) = e^{2j\pi fk_0} \cdot y(f,k)$$

$$k = 0 \Rightarrow y(k_0) = e^{2j\pi fk_0} \cdot y(f,0)$$

Cette relation étant vérifiée quel que soit k_0, nous obtenons

$$y(k) = e^{2j\pi fk} \cdot H(f)$$

On observe donc que $e^{2j\pi fk}$ est fonction propre de tout opérateur linéaire invariant.

Supposons maintenant que l'on mette à l'entrée du filtre le signal $X(f) \cdot e^{2j\pi fk}$, la sortie sera, en utilisant la propriété de linéarité : $H(f)\, X(f)\, e^{2j\pi fk}$

De même, si l'on met en entrée $\int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{2j\pi fk}\, df$, la sortie sera

$$\int_{-1/2}^{1/2} H(f)\, X(f)\, e^{2j\pi fk}\, df$$

Reconnaissant ici ta transformation de Fourier inverse d'un produit simple, cette relation exprime le fait que tout signal x(k) délivre en sortie d'un filtre un signal y(k) qui est le produit de convolution entre x(k) et h(k) : $y(k)=h(k)*x(k)$.

Afin de caractériser h(k), mettons à l'entrée du filtre l'impulsion unité d(k). La sortie sera $y(k)=h(k)*d(k)=h(k)$. **h(k) est appelée réponse impulsionnelle du filtre**. H(f), transformée de Fourier de h(k), est appelée fonction de transfert du filtre.

Propriétés du produit de convolution :

- commutativité : $x(k) * g(k) = g(k) * x(k)$

- associativité : $x(k) * [y(k) * g(k)] = [x(k) * y(k)] * g(k)$

- distributivité / addition : $x(k) * [y(k) + g(k)] = x(k) * y(k) + x(k) * g(k)$

- relation convolution / corrélation :

$$r_{xy}(k) = \sum_{l} x(l)\, y^*(l-k) = x(k) * y^*(-k)$$

Stabilité d'un filtre

Un filtre est stable au sens strict si, à tout signal d'entrée borné (|x(k)|<A pour tout k), le signal de sortie est borné (pour tout k)

Théorème : Une CNS pour qu'un filtre de réponse impulsionnelle g(k) soit stable est que $\sum_{k} |g(k)|$ soit borné.

Démonstration :
$$|y(k)| = \left|\sum_{l} g(l)\, x(k-l)\right| \leq \sum_{l} |g(l)|\, |x(k-l)|$$

$$|y(k)| \leq A \sum_{l} |g(l)|$$

donc $|y(k)|$ bornée si $\sum_{l} |g(l)|$ bornée.

Réciproquement, si $\sum_{l} |g(l)|$ non bornée, montrons que $\forall$ x(k) borné, conduisant à y(k) non borné.

si $g(k) > 0 \quad x(-k) = 1$

si $g(k) < 0 \quad x(-k) = -1$

$$y(k)|_{k=0} = \sum_{l} |g(l)|\ x(k-l)|_{k=0} = \sum_{l} g(l)|\ x(-l) = \sum_{l} |g(l)| = \infty$$

Classification des filtres numériques par leur Réponse Impulsionnelle (RI)

• Filtres RII (réponse impulsionnelle infinie)

- Un filtre est dit RII si $g(k) \neq 0$, $k \geq k_0$ (il sera causal si $k_0 \geq 0$, k_0 peut éventuellement tendre vers $-\infty$)
- Il n'est pas nécessairement stable.
- On ne peut pas calculer la réponse à un signal quelconque par produit de convolution. Il faut donc exprimer le signal de sortie avec une relation récursive.

• Filtres RIF (réponse impulsionnelle finie)

- Un filtre est RIF si $\begin{cases} g(k) \neq 0 & \text{si } k_1 \leq k < k_2 \\ g(k) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

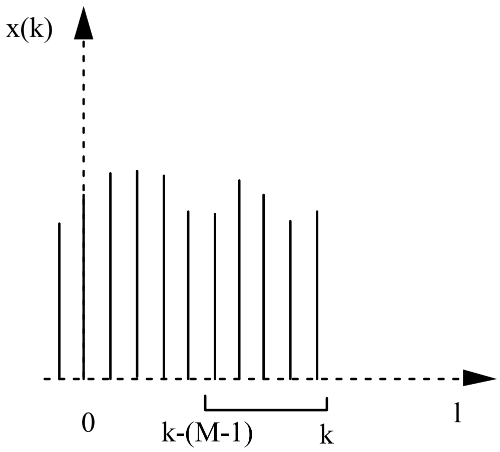
- causal si $k_1 \geq 0$

- la stabilité est assurée si $\max\limits_{k} |g(k)|$ borné.

On peut calculer la sortie du filtre par un produit de convolution.

Remarque : un filtre RII est nécessairement à implantation récursive, mais un filtre RIF peut aussi posséder une implantation récursive.

Exemple : calcul d'une moyenne mobile



$$y(k) = \frac{1}{M}\sum_{l=k-(M-1)}^{k} x(l) = h(k) * x(k) \quad \text{avec} \quad h(k) = \begin{Bmatrix} 1, k = 0, \ldots, M-1 \\ 0, \sin \text{on} \end{Bmatrix}$$

$$y(k) = \frac{1}{M}\sum_{l=k-(M-1)}^{k} x(l) = \frac{1}{M}\left\{ \sum_{l=k-1-(M-1)}^{k-1} x(l) + x(k) + x(k-1-(M-1) \right\}$$

$$y(k) = y(k-1) + \frac{1}{M}\{x(k) + x(k-M)\}$$

V.3. Réponse fréquentielle d'un filtre numérique

$$y(k) = x(k) * g(k)$$

$Y_F(f) = X_F(f) \, . \, G_F(f)$ fonction de transfert du filtre

Propriétés : • $e^{\alpha k}$ est fonction propre

$x(k) = e^{\alpha k}$ implique $y(k) = A(\alpha)\, e^{\alpha k}$

• Si le filtre est stable alors $|G_F(f)|$ borné

Démonstration : $|G_F(f)| = |\sum_l g(l)\, e^{-2j\pi lf}| \leq \sum_l |g(l)\, e^{-2j\pi lf}| = \sum_l |g(l)|$ borné car stable

V.4. Equations aux différences linéaires

$$\sum_n a_n(k)\, y(k-n) = \sum_m b_m(k)\, x(k-m)$$

invariant si $a_n(k) = a_n$: coefficients constants

$$\sum_n a_n\, y(k-n) = \sum_m b_m\, x(k-m)$$

$$\sum_n a_n\, Y_F(f)\, e^{-2j\pi fn} = \sum_m b_m\, X_F(f)\, e^{-2j\pi mf}$$

la fonction de transfert d'un système régi par une équation aux différences s'écrit donc :

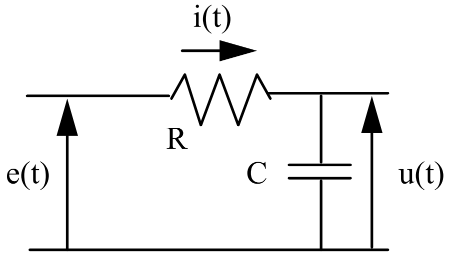
$$G_F(f) = \frac{Y_F(f)}{X_F(f)} = \frac{\sum_m b_m\, e^{-2j\pi fm}}{\sum_n a_n\, e^{-2j\pi fn}}$$

$\Rightarrow$ $G_F(f)$: périodique de période 1

$\Rightarrow$ le filtre est instable si le dénominateur s'annule.

La réponse impulsionnelle est $g(k) = \int_{-1/2}^{1/2} G_F(f)\, e^{2j\pi fk}\, df$

Synthèse d'un filtre numérique : Analogique $\overset{?}{\Rightarrow}$ *Numérique*



$u(t) = \frac{1}{c} \int i\,dt \quad i(t) = C\frac{du}{dt}$

$u(t) = e(t) - Ri(t)$

$u(t) = e(t) - RC\frac{du}{dt}$: équation différentielle

Equation aux différences finies : $\left(\frac{du}{dt}\right) \approx \frac{1}{\Delta t}\,[u(k\Delta t) - u((k-1)\,\Delta t)]$

$$u(k\Delta T) = e(k\Delta T) - RC\,\frac{u(k\Delta T) - u((k-1)\Delta t)}{\Delta t}$$

en prenant la transformée de Fourier,

$$U_F(f) = E_F(f) - \frac{RC}{\Delta t}\,U_F(f)\,[1 - e^{-2j\pi f\Delta t}]$$

$$U_F(f)\left[1 + \frac{RC}{\Delta t}(1 - e^{-2j\pi f\Delta t})\right] = E_F(f)$$

$$\frac{U_F(f)}{E_F(f)} = G_F(f) = \frac{1}{1 + RC\left[\frac{1 - e^{-2j\pi f\Delta t}}{\Delta t}\right]}$$

On peut parvenir au résultat en utilisant la transformation de Laplace.

$$U(p) = \frac{1}{Cp} \times I(p)$$

$$= \frac{1}{Cp}\,\frac{e(p)}{R + \frac{1}{Cp}}$$

$$G(p) = \frac{U(p)}{e(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

L'approximation de la dérivée par une différence finie revient à remplacer la variable p par $\dfrac{1 - e^{-2j\pi f\Delta t}}{\Delta t}$. Si Δt est la période d'échantillonnage (Δt=Te),

$$G_F(f) = \frac{\dfrac{1}{1 + \dfrac{RC}{Te}}}{1 - \dfrac{RC}{Te + RC}\, e^{-2j\pi f Te}}$$

$$\text{d'où} \quad a_0 = 1 \,,\ a_1 = \frac{RC}{Te+RC} \quad ,\ b_0 = \frac{1}{1 + \dfrac{RC}{Te}}$$

$$y(k) = \frac{RC}{Te + RC}\ y(k-1) + \frac{Te}{Te + RC}\ x(k)$$

<u>Remarque</u> : L'approximation $x'(kTe) = \dfrac{x(kTe) - x[(k-1)\,Te]}{Te}$ est d'autant meilleure que Te est petit donc que Fe est grand.

Par convention, on prendra $\mathbf{a_0 = 1}$ **(on peut toujours s'y ramener)**.