L'U NAM l'université nantes angers le mans

PÔLE DE RECHERCHE ET D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

université angers

Thèse de Doctorat

Aymeric LE DORZE

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université d'Angers
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Informatique et applications, section CNU 27
Unité de recherche : Laboratoire d'Études et de Recherche de l'Université d'Angers (LERIA)

Soutenue le 04/11/2013
Thèse n° : ED 503-1369

Validation, synthèse et paramétrage des cartes cognitives

JURY

Président :	**M. Christophe ROCHE**, Professeur, Université de Savoie
Rapporteurs :	**M. Patrice BUCHE**, HDR, Montpellier SupAgro
	M. Juliette DIBIE-BARTHÉLEMY, Professeur, AgroParisTech
Examinateurs :	**M. David GENEST**, Maître de conférences, Université d'Angers
	M. Laurent GARCIA, Maître de conférences, Université d'Angers
Invité :	**M. Philippe LERAY**, Professeur, École Polytechnique de l'Université de Nantes
Directeur de thèse :	**M. Stéphane LOISEAU**, Professeur, Université d'Angers

1

Cartes sémantiques

Introduction

Ce chapitre propose d'offrir une analyse comparative des principaux modèles visuels de représentation des connaissances, que nous appelons cartes sémantiques. Notre étude porte sur les modèles des cartes mentales [Buzan et Buzan, 2003], des cartes conceptuelles [Novak et Cañas, 2006], des cartes cognitives [Axelrod, 1976] et des graphes conceptuels [Sowa, 1976; Sowa, 1984]. Ainsi, nous allons nous intéresser à des modèles dont les objectifs sont différents, certains portant une attention particulière à l'aspect visualisation alors que d'autres sont plus focalisés sur le raisonnement.

Pour chacun des modèles que nous nous proposons d'étudier, nous suivrons la présentation suivante :

1. une introduction au modèle dans lequel nous le définissons de manière informelle ;

2. une définition plus formelle du modèle ;

3. un exemple d'utilisation commun à chacun des modèles ; une référence à des logiciels qui permettent de le manipuler ;

4. une discussion autour du modèle dans lequel nous évoquons les problèmes soulevés par son utilisation, en particulier en terme de raisonnement.

Nous terminons ce chapitre par une étude comparative des différents modèles qui reprend les éléments introduits dans les sections précédentes et qui propose une comparaison tant du point de vue de la représentation des connaissances et de la visualisation que du raisonnement.

La section 1.1 présente le modèle des cartes mentales. La section 1.2 présente le modèle des cartes conceptuelles. La section 1.3 présente le modèle des graphes conceptuels. La section 1.4 présente le modèle des cartes cognitives. Enfin, la section 1.5 compare les différents modèles de cartes sémantiques présentés, sur différents critères.

1.1 Carte mentale

Les *cartes mentales* ont pour but de décrire une idée principale de manière précise et structurée au moyen de concepts liés à cette idée. Les concepts sont également des idées et sont généralement représentés par un texte bref ou une image. Pour présenter ce modèle, nous en faisons tout d'abord une présentation dans la section 1.1.1 avant de le définir formellement dans la section 1.1.2. Nous montrons ensuite l'application de ce modèle sur un exemple dans la section 1.1.3 et enfin nous discutons de ces points forts et de ces points faibles dans la section 1.1.4.

1.1.1 Présentation

Une carte mentale permet de décrire un concept principal en le liant à d'autres concepts pouvant à leur tour être décrits par de nouveaux concepts jusqu'à atteindre le niveau de détail souhaité. Les cartes mentales ont été utilisées depuis des siècles mais les cartes mentales modernes, également appelées *cartes heuristiques*, ont été formalisées par Tony Buzan [Buzan et Buzan, 2003]. Différents styles d'écriture peuvent être utilisés afin de structurer les concepts : la couleur, la casse et la taille du texte par exemple. On peut également ajouter d'autres éléments que du texte pour diversifier la carte, comme des images ou des liens. Les cartes mentales se construisent rapidement car elles utilisent essentiellement des mots correspondant aux concepts et des traits. Elles se remplissent aisément autour du concept principal au fur et à mesure que le cerveau intègre les idées. Des concepts proches dans leurs relations avec un concept apparaîtront également visuellement proches de ce concept dans la carte mentale. Une relation entre deux concepts est soit représentée directement par un lien entre ces deux concepts, soit par un nouveau concept décrivant précisément la nature de ce lien, lié lui aussi aux deux concepts. Elles sont faciles à mémoriser par leur présentation visuelle, l'usage de couleurs, de dessins, d'images ou de textes.

T. Buzan propose 10 règles pour construire une bonne carte mentale [Buzan, 2003] :

- commencer avec une image au milieu de la page en utilisant au minimum 3 couleurs ;
- utiliser des images ou des symboles partout dans la carte mentale ;
- choisir des mots-clés et les écrire en lettres capitales ou minuscules ;
- écrire chaque mot ou image seul sur sa propre ligne ;
- connecter les lignes, en partant de l'image centrale : les lignes proches du centre étant plus épaisses, celle en périphérie plus fines ;

- donner la même longueur aux lignes que le mot/l'image ;
- utiliser des couleurs pour l'aide à la mémoire d'évocation et stimuler la créativité ;
- développer son propre style de carte mentale ;
- surligner et montrer les associations dans la carte mentale ;
- garder la carte mentale claire en utilisant une hiérarchie radiale, un ordre numérique ou des cadres sur les branches.

Un premier usage de ces cartes est la prise de notes aisée : la rapidité de construction des cartes mentales est avérée. Un deuxième usage est l'aide au brainstorming en organisant les idées échangées par plusieurs individus lors d'une séance, les cartes mentales permettant de noter et de hiérarchiser les idées au fur et à mesure qu'elles sont énoncées par les intervenants. Un troisième usage est l'amélioration des moteurs de recherche en représentant les méta-informations de documents par une carte mentale. Un quatrième usage des cartes mentales est l'enseignement. Une étude a montré que l'utilisation des cartes mentales offrait une meilleure faculté de mémorisation pour des élèves, comparée à des méthodes d'apprentissage libre, mais diminuait en contrepartie leur motivation [Farrand *et al.*, 2002].

1.1.2 Représentation

Une carte mentale se présente sous la forme d'une arborescence dont la racine est située au centre. Les *concepts* sont les étiquettes des sommets de cette arborescence. Le sommet racine contient le concept principal de la carte. Ce sommet est connecté par des arêtes à d'autres sommets représentant des concepts plus spécifiques qui décrivent le concept principal.

La proposition d'éditeurs informatiques de cartes ou de partage de cartes entre plusieurs utilisateurs nécessite une véritable formalisation de celles-ci, que nous esquissons dans ce qui suit. La plupart des modèles de cartes mentales sont une arborescence dont les sommets et les arêtes sont étiquetés. La nature des étiquettes varie d'un modèle de carte mentale à l'autre. Ainsi, un sommet peut être étiqueté par un concept représenté par un simple mot ou une phrase entière, voire par une image. Une arête peut quant à elle être étiquetée par une couleur ou par une épaisseur de trait.

Nous proposons ici une formalisation des cartes mentales généralisant la plupart des modèles. Pour un modèle de carte mentale, un *concept* peut être un bref texte descriptif ou une image. Un *attribut* permet de décrire un aspect d'un sommet ou d'une arête. Ainsi, *Couleur* et *Épaisseur de trait* sont des attributs possibles pour les sommets et les arêtes ; *Police* est un attribut possible pour un sommet. Un attribut peut prendre différentes valeurs, selon la notion qu'il représente. *Rouge* ou *Noir* peuvent ainsi être des valeurs pour *Couleur*. On regroupe ces attributs en deux ensembles : un *ensemble des descriptions des sommets* et un *ensemble des descriptions des arêtes*. Certains attributs étant à la fois applicables aux sommets et aux arêtes, ces deux ensembles ne sont pas nécessairement disjoints. On appelle *ensemble des descriptions* l'ensemble qui contient toute expression qui peut être utilisée pour étiqueter les sommets et les arêtes de l'arborescence. C'est donc l'union de l'ensemble des descriptions des sommets de l'ensemble des descriptions des arêtes.

Une carte mentale est une arborescence définie sur un ensemble des descriptions des sommets et sur un ensemble des descriptions des arêtes et pour laquelle à chaque sommet et à chaque arête est associée une étiquette sous la forme d'un sous-ensemble de l'ensemble des descriptions.

Définition 1.1 (Carte mentale)
Soit C un ensemble de concepts. Soient $X_V = X_{V_1}, \dots, X_{V_m}$ un ensemble des descriptions des sommets de m attributs et $X_A = X_{A_1}, \dots, X_{A_n}$ un ensemble des descriptions des arêtes de n attributs.
Une carte mentale *définie sur C, X_V et X_A est une arborescence étiquetée $MM = (V, A, \text{label})$ où :*

- *V est l'ensemble des sommets de l'arborescence ;*
- *A est l'ensemble des arêtes de l'arborescence ;*
- label *est une application d'étiquetage qui associe à tout sommet et à toute arête une étiquette :*
  - $\forall v \in V, \text{label}$ *est définie sur* $C \times X_{V_1} \times \cdots \times X_{V_m}$ *;*
  - $\forall a \in A, \text{label}$ *est définie sur* $X_{A_1} \times \cdots \times X_{A_n}$.

On note $r \in S$ la racine de l'arborescence.

La plupart des modèles de cartes mentales sont des cas particuliers de cette définition. D'autres cartes offrent plus de libertés : par exemple, certaines cartes permettent de lier deux concepts qui ne sont pas sur la même branche en ajoutant une arête d'un sommet représentant un des concepts vers un sommet représentant l'autre. Pour caractériser de telles cartes, il faut étendre la définition précédente avec un ensemble d'arcs entre les sommets du graphe par exemple.

1.1.3 Édition et exemple illustratif

Il existe de nombreux logiciels permettant de créer et de manipuler des cartes mentales : des logiciels payants comme iMindMap[1], MindVisualizer[2] et MindManager[3] et des gratuits comme FreeMind[4], VYM[5] ou VUE[6]. Ce dernier n'est pas dédié uniquement aux cartes mentales, mais à un plus grand nombre de représentations graphiques de connaissances. Il existe également des éditeurs de cartes mentales

[1] `http://www.imindmap.com/`
[2] `http://www.innovationgear.com/index.php`
[3] `http://www.mindjet.com/`
[4] `http://freemind.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page`
[5] `http://www.insilmaril.de/vym/`
[6] `http://vue.tccs.tufts.edu/`

en ligne, comme Mind42[7] ou WiseMapping[8]. FreeMind, l'un des plus utilisés, gère, entre autres, l'épaisseur et la couleur des arêtes entre différents concepts, la manière de les tracer, ainsi que la taille ou la couleur du texte décrivant les concepts, la couleur de fond, l'ajout d'images, le type d'encadrement du concept, sa disposition... FreeMind permet également d'ajouter des liens aux concepts qui pointent vers des ressources externes ou internes à la carte et de lier graphiquement deux sommets quelconques de la carte par un arc.

Pour comparer les différents modèles de cartes sémantiques, nous figurons, tout au long de ce chapitre, le même exemple représenté par chacun des modèles. Cet exemple est une description d'Internet, son histoire et son utilisation. Les différentes cartes doivent faire figurer les informations suivantes :

- Internet a été conçu pour avoir un réseau standard, c'est-à-dire capable de faire communiquer entre elles un grand nombre de machines, et acentralisé ;
- Internet est basé sur ARPANET ;
- le terme "Internet" a été officialisé en 1982 ;
- Internet permet d'échanger du contenu ;
- ce contenu peut être soit une idée, soit une donnée ;
- ce contenu peut également être du texte, de l'audio ou de la vidéo ;
- Internet procure un anonymat relatif ;
- Internet permet de chiffrer des informations ;
- la transmission de cette information se fait par paquets qui sont routés au cœur du réseau ;
- cette transmission peut avoir lieu en mode connecté ou non connecté ;
- différents standards régissent Internet et ces standards sont normés par des organismes, comme l'IETF ou le W3C ;
- le W3C est chargé de définir les normes du Web ;
- les standards d'Internet sont organisés au sein d'une pile basée sur le modèle OSI.
- le protocole TCP transporte les données en mode connecté tandis le protocole UDP les transporte en mode non connecté.

La figure 1.1 est une carte mentale que nous avons générée avec le logiciel FreeMind décrivant différentes informations relatives à Internet. Cette carte est définie entre autres sur les concepts *Internet*, *Naissance*, *Transmission*, *W3C*, *Web*, qui font donc partie de l'ensemble des concepts. La présence du cadre est un attribut

[7] `http://mind42.com/`
[8] `http://www.wisemapping.com/c/home.htm`

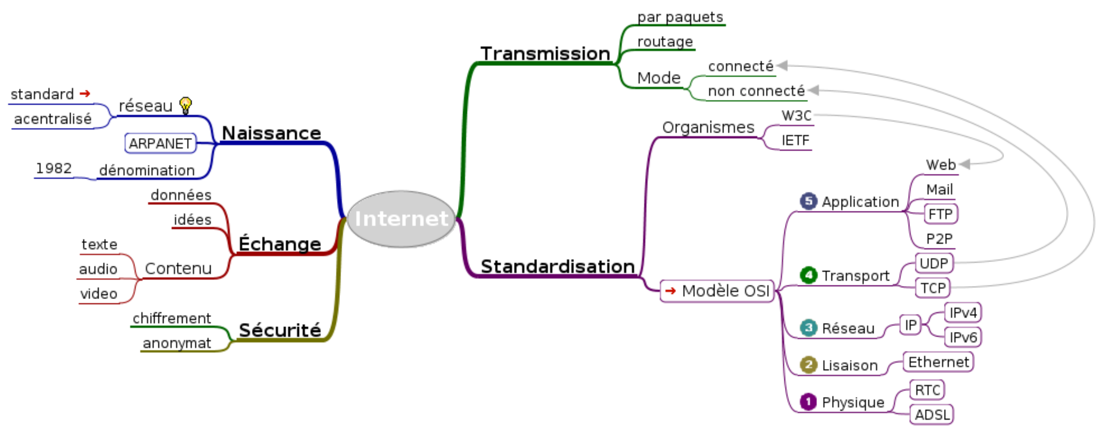


FIGURE 1.1 – Carte mentale décrivant Internet.

pour les sommets et peut prendre la valeur *Bulle* qui correspond à un sommet encadré : les concepts qui étiquettent les sommets apparaissent alors directement sur le sommet, comme *Ethernet*, *IP* ou *RTC*, plutôt que sur l'arête qui mène au sommet, comme *Naissance*, *réseau* ou *W3C*. L'épaisseur du trait est un attribut pour les arêtes et peut prendre les valeurs 1, 2, 4 ou 8 qui correspondent chacune au nombre de pixels utilisés pour représenter cette épaisseur.

Pour décrire Internet, on s'intéresse à 5 concepts composant les 5 branches principales de la carte : sa naissance, l'échange d'information qu'il permet, la sécurité liée au réseau, le mode de transmission de l'information et enfin la standardisation d'Internet qui s'est effectuée grâce à différentes normes régissant Internet. La carte est découpée en deux parties : la partie gauche concerne les informations qui pourraient intéresser une personne lambda, avec des connaissances en informatique ou non ; la partie droite concerne quant à elle les informations qui s'adressent uniquement à un informaticien. Sur le concept *Modèle OSI*, un lien hypertexte vers l'article de Wikipédia permet d'obtenir plus d'informations sur ce qu'est le modèle OSI[9] tandis qu'un lien interne sur le concept *standard* renvoie vers le concept *Standardisation*. Par convention, les concepts encadrés sont des concepts représentant des normes. L'arc entre les sommets étiquetés par les concepts *W3C* et *Web* signifie que le W3C norme le Web et les arcs partant des sommets étiquetés par les concepts représentant les protocoles TCP et UDP les lient à leurs modes de transport respectifs.

1.1.4 Discussion

Les cartes mentales ont été imaginées pour être manipulables par des êtres humains. Par conséquent, il faut les adapter si on veut que les machines soient capables de raisonner sur les connaissances qu'elles représentent. Lorsqu'elles sont réalisées à la main sur une feuille de papier, les cartes mentales offrent énormément de liberté : l'utilisateur s'impose des conventions que lui seul utilisera. Par conséquent, il est difficile de réaliser un logiciel dans lequel on peut construire toutes

[9] `http://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_OSI`

les cartes mentales, car il est difficile de lister l'intégralité des représentations possibles, chaque utilisateur inventant ses propres conventions. Lorsqu'un utilisateur applique une convention à un sommet ou une arête, cette convention lui sert à donner une sémantique particulière à ce sommet ou à cette arête. Si l'utilisateur ne communique pas ses conventions sémantiques, certaines informations risquent d'échapper aux lecteurs potentiels de la carte. Si on veut que la carte soit modifiable par plusieurs concepteurs, il faut alors soit communiquer l'intégralité des conventions, soit convenir à l'avance de règles qui les définiront et qu'il faudra respecter.

Dans l'exemple de carte mentale de la figure 1.1, quelques informations sont peu claires ou mal définies. Il aurait été possible de les représenter, mais la carte aurait à nouveau perdu en concision. Il faut choisir entre richesse du contenu de l'information et concision de la représentation de cette information. Prenons par exemple la sous-branche issue du concept *Mode* de la branche *Transmission*. Il est difficile de savoir ce qu'on entend par « mode » avant d'avoir lu les sous-concepts qui décrivent cette notion. On comprend alors que la notion de « mode » fait référence au mode de transmission de l'information, représentée par les concepts *connecté* et *non connecté*. Autre exemple, la date 1982 se réfère à la date de la création officielle du terme Internet. Cette relation a été résumée par l'insertion d'un concept identifié par le simple mot *dénomination*. On aurait pu être plus précis, mais l'étiquette aurait alors été très longue, trop pour être facilement mémorisable. Comme cette information est finalement assez imprécise, seul le créateur de la carte peut savoir à quoi cette date fait exactement référence, rendant plus difficile la compréhension par autrui. Les sommets des cartes mentales peuvent donc représenter des concepts ou des relations.

Certaines relations ne sont pas identifiées dans la carte mentale et sont uniquement représentées par un lien entre deux concepts, comme par exemple celle entre les concepts *Internet* et *ARPANET*. On aurait pu ajouter cette relation dans la carte mentale sous forme d'un nouveau sommet, mais la carte aurait perdu en lisibilité. Le concept *Contenu* sert à énumérer les types de contenu que peuvent être les *données* et les *idées*. Ceux-ci peuvent tous deux être du *texte*, de l'*audio* ou de la *vidéo*. Or, une carte mentale étant généralement un arbre, il était impossible de tracer à la fois un lien de *données* à *texte* et de *idées* à *texte*.

Prenons maintenant la sous-branche *standard* située à gauche de la carte et la branche *Standardisation*. Ces deux notions sont fortement liées, il aurait été possible que la branche *Standardisation* ne soit que le prolongement de la sous-branche *standard*. Cependant, la sous-branche *standard* est située à l'intérieur de la branche *Naissance*. Si le prolongement avait été fait, les standards d'Internet auraient été classés dans la partie *Naissance* d'Internet, ce qui pourrait laisser penser que les standards n'ont existé qu'au cours des premières années de l'existence d'Internet, au moment de sa conception. Pour lever cette possible ambiguïté, il est donc préférable de séparer cette branche en deux, pour bien différencier d'une part le besoin de standardisation qui a amené à la création d'Internet et d'autre part les standards qui ont défini et définissent encore Internet.

Les concepts *réseau* et *Mode* sont chacun en relation avec deux autres sous-concepts. Les propositions représentées sont d'une part que « le réseau est à la fois standard et acentralisé » et d'autre part que « la transmission se fait en mode connecté ou non connecté ». Le type des relations n'est donc pas le même : pour le concept *réseau*, on a affaire à une relation de type *et* et pour le concept *Mode* à une relation de type *ou exclusif*. Or, rien ne permet de déduire cette différence sémantique à partir de la carte mentale seule.

Les cartes mentales sont centrées sur la représentation des connaissances. Elles ne sont vouées qu'à présenter l'information. Par conséquent, elles ne permettent pas de raisonner sur ces connaissances : aucune information non présente sur la carte ne sera déduite. Les informations d'une carte peuvent toutefois être manipulées par d'autres systèmes. Il est par exemple possible de calculer le degré de relation entre deux documents en fonction de leur emplacement dans une carte mentale : plus les documents sont proches dans la carte mentale, plus les notions qu'ils évoquent sont approchées, et plus les documents sont liés [Beel et Gipp, 2010]. Avant la rédaction d'un article par exemple, on réalise une carte mentale organisant les idées qui sont développées dans cet article, en plaçant également les documents qui référencent certaines informations. Le calcul du degré de relation entre deux documents fonctionne alors sur une idée simple : plus les documents sont proches dans la carte mentale, plus les notions qu'ils évoquent sont proches, et plus les documents sont liés.

1.2 Carte conceptuelle

Les *cartes conceptuelles* ont pour but de répondre à une question centrale. Pour cela, des concepts, identifiés par de brefs textes représentant une notion particulière, sont liés être eux par des relations, elles aussi décrites par de brefs textes les identifiant. Pour présenter ce modèle, nous en faisons tout d'abord une présentation dans la section 1.2.1 avant de le définir formellement dans la section 1.2.2. Nous montrons ensuite l'application de ce modèle sur un exemple dans la section 1.2.3 et enfin nous discutons de ces points forts et de ces points faibles dans la section 1.2.4.

1.2.1 Présentation

Les cartes conceptuelles ont été conçues pour la représentation et l'organisation de l'information dans le but d'en faciliter l'apprentissage. Elles ont été inventées par le biologiste Joseph D. Novak en 1972 [Novak et Cañas, 2006]. Elles sont particulièrement adaptées pour répondre à une question centrale amenant une réponse complexe en la décomposant en plusieurs sous-questions plus spécifiques, à leur tour expliquées. Ceci permet d'apprendre facilement des connaissances à une tierce personne via l'utilisation de cette carte, ce qui en fait un excellent outil d'aide à l'apprentissage. Les cartes conceptuelles ont aussi une utilisation similaire aux cartes mentales : elles peuvent être utilisées pour la prise de notes ou bien pour un travail de groupe. Elles diffèrent cependant par leurs modélisations et par leurs méthodes de construction. Les cartes conceptuelles sont beaucoup plus formelles que les cartes mentales : elles amènent à une réflexion stricte sur la manière d'organiser les connaissances.

Pour construire une carte conceptuelle, la première étape consiste à se poser une question centrale à laquelle la carte devra répondre. La seconde étape consiste à élaborer une liste des concepts qui seront utilisés dans la carte, sans s'occuper de leurs relations, ni de leur emplacement final dans la carte. La troisième étape consiste à réaliser une première ébauche de la carte en plaçant les concepts en fonction de leurs relations avec les autres concepts. Ainsi, dans un contexte d'apprentissage, pour que les étudiants puissent apprendre efficacement, ceux-ci doivent construire eux-mêmes la carte conceptuelle en partant d'une ébauche de carte réalisée par le professeur. La quatrième étape consiste à construire la carte en liant les concepts entre eux par des flèches via leurs relations et des mots de liaison, et en rajoutant éventuellement des concepts supplémentaires. Des ressources telles que du texte, des images, des pages Web ou bien d'autres cartes conceptuelles peuvent être liées aux concepts de la carte. Lier des concepts à d'autres cartes conceptuelles permet de découper une grande carte conceptuelle en plusieurs cartes conceptuelles plus petites et plus faciles à comprendre. On construit alors une macro-carte conceptuelle qui représentera le sommaire des connaissances et dont les concepts seront liés à des micro-cartes qui décriront chacune une partie des connaissances.

1.2.2 Représentation

Les cartes conceptuelles permettent de représenter des concepts et leurs relations. Un *concept* est représenté par un texte, généralement encadré ou entouré, et correspond à un individu, comme *Tour Eiffel*, à un ensemble d'individus, comme *Voiture*, ou à un événement, comme *Augmentation des impôts*. Un mot ou un groupe de mots de liaison lie deux concepts entre eux en exprimant la *relation* qu'ils partagent. Cette relation a un sens représenté par une flèche partant du concept « sujet » vers le concept « objet ». Un même concept ou une même relation peuvent apparaître plusieurs fois dans une même carte. Une *proposition* est une information à propos d'un concept. Une proposition contient deux concepts ou plus liés par une ou des relations pour former une assertion ayant un sens. La réponse à la question centrale amène généralement à la création d'un concept plus général que les autres, représentant la réponse à cette question. En effet, bien que ces questions puissent être très diverses (« Qu'est-ce que... ? », « Comment... ? », « Pourquoi... ? »), elles concernent bien souvent une notion principale, qui fera office de concept général. La carte est le plus souvent organisée de manière hiérarchique avec les concepts les plus généraux en haut et les concepts les plus spécifiques en bas.

Une carte conceptuelle est un graphe dans lequel des arcs lient des sommets étiquetés par des concepts à des sommets étiquetés par des relations.

Définition 1.2 (Carte conceptuelle)
Soient C un ensemble de concepts et R un ensemble de relations.
Une carte conceptuelle *définie sur C et R est un graphe biparti orienté étiqueté $CM = (V_C, V_R, A, \mathrm{label})$ où :*

- *V_C est l'ensemble des sommets concept ;*

- V_R *est l'ensemble des sommets relation ;*
- $A \subseteq (V_C \times V_R) \cup (V_R \times V_C)$ *est l'ensemble des arcs ;*
- label *est une application d'étiquetage qui associe à tout sommet une étiquette :*
  - $\forall v \in V_C, \mathrm{label}(v) \in C$ *;*
  - $\forall v \in V_R, \mathrm{label}(v) \in R$*.*

1.2.3 Édition et exemple illustratif

Le principal logiciel utilisé pour manipuler les cartes conceptuelles est CmapTools[10], développé par l'IHMC[11]. Notons qu'avec CmapTools, on peut modifier les cartes conceptuelles en spécifiant l'épaisseur et la couleur des arcs, la manière de les tracer, ainsi que la taille ou la couleur des étiquettes décrivant les sommets ainsi que la couleur de fond, l'ajout d'images, le type d'encadrement du sommet, sa disposition, avec une gestion d'attributs du même type que celle des cartes mentales.

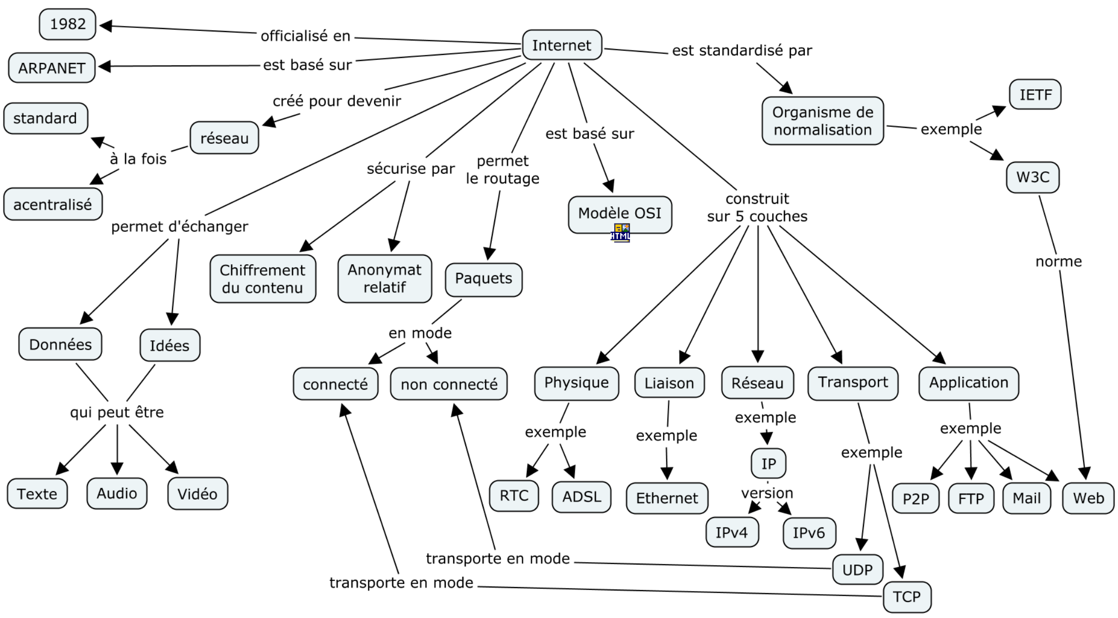


FIGURE 1.2 – Carte conceptuelle décrivant Internet.

La carte conceptuelle de la figure 1.2 a été générée avec le logiciel CmapTools et elle décrit elle aussi différentes informations relatives à Internet. Elle répond à la question « Qu'est-ce qu'Internet ? ». On peut y lire la proposition : « Internet permet le routage de paquets en mode non connecté ». Sur le concept *Modèle OSI*, un lien hypertexte pointe vers l'article de Wikipédia.

[10] `http://cmap.ihmc.us/`
[11] Florida Institute for Human & Machine Cognition

1.2.4 Discussion

L'ordonnancement des couches sur lequel est basée l'architecture d'Internet n'apparaît pas dans la carte conceptuelle de la figure 1.2. Dans la carte conceptuelle, le lien entre le concept *Internet* et chacun des concepts représentant les couches est déjà étiqueté par une relation, il est donc impossible de l'étiqueter encore avec des numéros. Seul l'ordre de lecture (de gauche à droite) permet d'établir un ordre. Il aurait toutefois été possible d'indiquer explicitement l'ordre des concepts en utilisant une relation de type *précède* entre les concepts, mais la carte aurait perdu en concision. On aurait pu également réifier la relation, comme présenté dans la carte conceptuelle de la figure 1.3.

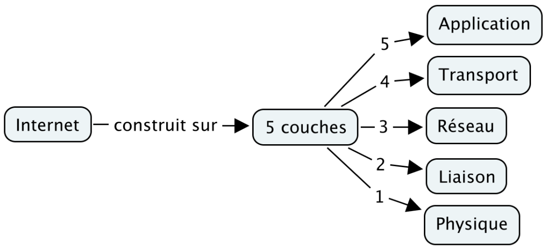


FIGURE 1.3 – Ordonnancement pour une carte conceptuelle.

Malgré leur aspect relativement formel, les cartes conceptuelles laissent une grande liberté à l'utilisateur, ce qui peut entraîner confusions et incohérences dans la carte. Ainsi, les propositions étant découpées en concepts reliés par des relations, il est parfois difficile de savoir ou commence et où s'arrête une proposition. Par exemple, on modélise dans la carte conceptuelle de la figure 1.4 les deux propositions suivantes :

- les États-Unis ont acheté la Louisiane à la France ;
- la Nouvelle-Orléans est la capitale de la Louisiane.

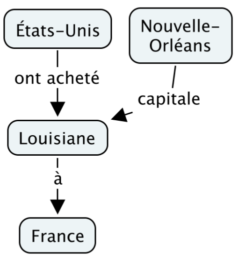


FIGURE 1.4 – Confusion sur l'arité de la relation.

Cette carte peut entraîner une confusion dans les propositions : en lisant naïvement cette carte, on peut lire la proposition « la Nouvelle-Orléans est la capitale de la Louisiane à la France ». Seul le non-sens de cette proposition permet d'éviter cette erreur.

Un autre problème se pose dû au regroupement habituel des relations de même étiquette : par souci de clarté, les relations de même étiquette ayant le même concept sujet ou le même concept objet sont fusionnées. Ce procédé peut apporter des confusions sur l'association entre les concepts sujets et objets. Ainsi, dans la carte conceptuelle de la figure 1.2, les relations *exemple* et *transporte en mode* apparaissent plusieurs fois avec différents sujets et objets et les fusionner aurait apporté une confusion sur les couples de concepts liés par ces relations. Dans la

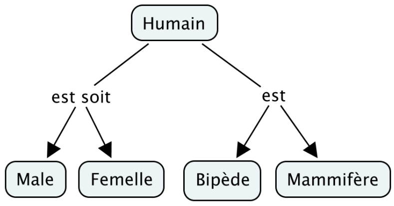


FIGURE 1.5 – Confusion entre relation binaire et n-aire.

carte conceptuelle de la figure 1.5, la relation *est soit* est une relation n-aire entre un concept sujet et $n-1$ concepts objet. La relation *est* une relation binaire entre un concept sujet et un concept objet. Cependant, il est impossible de déduire l'arité de la relation *est* uniquement à partir de la carte, puisqu'elle apparaît identique à la relation *est soit* alors qu'elles sont d'arités différentes. On pourrait lever la confusion en représentant explicitement les deux relations *est*, mais dans un souci de cohérence, il faudrait en faire de même pour toutes les relations binaires de la carte.

Certains sommets concept peuvent être étiquetés par le même concept s'ils représentent deux idées très proches. Cependant, un même concept peut étiqueter deux sommets différents, tout en représentant la même idée. La carte conceptuelle

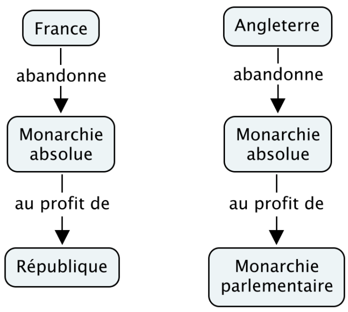


FIGURE 1.6 – Un même concept apparaît deux fois.

de la figure 1.6 contient 2 propositions :

- la France abandonne la monarchie absolue au profit de la république ;
- l'Angleterre abandonne la monarchie absolue au profit de la monarchie parlementaire.

Dans ces deux propositions, la notion de *Monarchie absolue* est la même. Cependant, cette notion apparaît deux fois sous la forme de concepts dans la carte conceptuelle afin d'éviter une confusion. En effet, si on fusionnait les deux concepts *Monarchie absolue*, nous obtiendrions alors la carte conceptuelle de la figure 1.7.

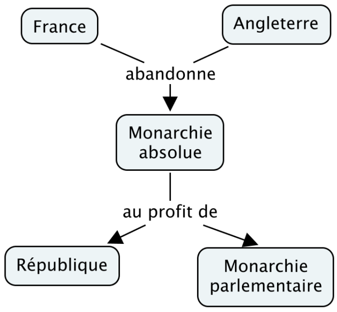


FIGURE 1.7 – Confusion entre les relations.

Il serait impossible de savoir vers quel régime politique a tendu chacun des deux pays. Il est cependant important d'insister sur le fait que ces deux concepts représentent effectivement la même notion. Une solution possible est de réifier ces relations. Les étiquettes de ces relations réifiées peuvent être par exemple les événements politiques qui ont causé l'abandon des monarchies, comme présenté sur la figure 1.8.

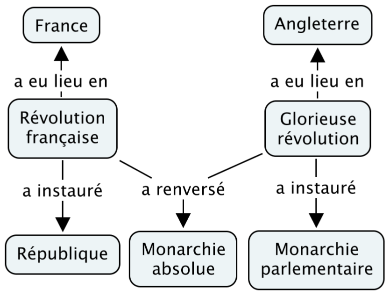


FIGURE 1.8 – Réification des relations.

Enfin, l'une des principales caractéristiques des cartes conceptuelles est qu'elles ne sont pas conçues pour être interprétées par des machines. En effet, il n'y a pas de vocabulaire prédéfini pour les concepts ou les relations et par conséquent, les informations de la carte ne sont pas assez précises et formelles pour être interprétées afin de déduire des connaissances. Une carte conceptuelle dont les propositions sont obligatoirement formelles et qui peut donc être interprétée par un ordinateur devient un réseau sémantique [Cañas et Novak, 2009; Lehmann, 1992].

1.3 Graphe conceptuel

Les *graphes conceptuels* servent à représenter graphiquement et à raisonner sur des connaissances portant sur des concepts et des relations. Les concepts et relations utilisés dans les graphes sont issus d'une ontologie construite préalablement. Pour présenter ce modèle, nous en faisons tout d'abord une présentation dans la section 1.3.1 avant de le définir formellement dans la section 1.3.2. Nous montrons ensuite l'application de ce modèle sur un exemple dans la section 1.3.3 et enfin nous discutons de ces points forts et de ces points faibles dans la section 1.3.4.

1.3.1 Présentation

Les graphes conceptuels servent à représenter graphiquement des connaissances de manière à ce qu'on puisse raisonner sur ces connaissances, c'est-à-dire être capable de les interroger et en déduire de nouvelles. Les graphes conceptuels font partie de la famille des réseaux sémantiques [Lehmann, 1992] et ont été inventés par John F. Sowa [Sowa, 1976; Sowa, 1984]. Le modèle des graphes conceptuels distingue deux types de connaissances : des connaissances ontologiques et des connaissances factuelles. Les connaissances ontologiques sont représentées au moyen d'un support qui définit un ensemble de types de concepts, un ensemble de types de relations et un ensemble d'individus. Les graphes conceptuels représentent les connaissances factuelles, sous la forme de relations entre des concepts. Ces concepts peuvent être identifiés à l'aide des individus du support, et sont étiquetés par un type de concept. De la même manière, les relations entre concepts sont étiquetées par un type de relation.

Les graphes conceptuels ne permettent pas simplement de visualiser des connaissances, mais aussi de raisonner grâce à des opérations, dont la projection qui permet d'interroger un graphe-fait au moyen d'un graphe-requête. La projection permet de savoir si l'information représentée par un graphe-requête existe dans le graphe-fait, ou bien d'obtenir les concepts qui vérifient la requête. Pour cela, on cherche à savoir si le graphe conceptuel-requête se projette dans le graphe conceptuel-fait. Les graphes conceptuels ont une sémantique logique, c'est-à-dire qu'ils sont exprimables en formules de la logique du premier ordre [Chein et Mugnier, 1992]. Ils sont utilisés en informatique, en intelligence artificielle et dans les sciences cognitives.

1.3.2 Représentation

Les graphes conceptuels sont définis sur un *support*, chargé de représenter des connaissances ontologiques, telles que les liens de spécialisation entre les types de concepts et ceux entre les types de relations.

Définition 1.3 (Support)
Un support *est un quintuplet $S = (C, R, \sigma, I, \tau)$ [Mugnier et Chein, 1996] où :*

- *T_C est l'ensemble partiellement ordonné des types de concepts où $\top$ est le plus grand élément ;*
- *$T_R = T_{R_{i_1}} \cup \cdots \cup T_{R_{i_p}}$ est l'ensemble partitionné des types de relations où chaque $T_{R_{i_j}}$ est l'ensemble partiellement ordonné des types de relations d'arité $i_j > 0$ où $\top_{i_j}$ est le plus grand élément ;*
- *$\sigma : T_{R_{i_j}} \to (T_C)^{i_j}$ est une application appelée* signature *qui associe à tout type de relation le type maximal de chacun de ses arguments : pour tout $t_r \in T_{R_{i_j}}$, elle associe un i_j-uplet $\sigma(t_r) \in (T_C)^{i_j}$ qui vérifie $\forall t_{r1}, t_{r2} \in T_{R_{i_j}}, t_{r1} < t_{r2} \Rightarrow \sigma(t_{r1}) \leq \sigma(t_{r2})$, où l'ordre considéré des signatures est l'ordre produit sur*

$(T_C)^{i_j}$[12] ; on note $\sigma_i(t_r)$ le i-ième argument de $\sigma(t_r)$;

- *I est l'ensemble dénombrable non nécessairement fini des marqueurs individuels ; il existe un marqueur générique, noté $*$; l'ensemble $I \cup \{*\}$ est muni de l'ordre suivant : $*$ est plus grand que tous les marqueurs individuels de I, qui sont deux à deux incomparables ;*

- *$\tau : I \rightarrow T_C$ est une application qui associe à tout marqueur m un type de concept t.*

Les graphes conceptuels représentent les relations qu'entretiennent des *individus* ; chaque individu étant typé par un type de concept et représenté par un marqueur individuel ou par un marqueur générique. Un concept est donc l'association d'un individu et d'un type de concept.

Définition 1.4 (Graphe conceptuel)
Un graphe conceptuel *est un multigraphe $G = (C, R, A, \text{label})$ non orienté, biparti, non nécessairement connexe défini sur un support $S = (T_C, T_R, \sigma, I, \tau)$ [Mugnier et Chein, 1996] où :*

- *C est l'ensemble des sommets concept ;*

- *R est l'ensemble des sommets relation ;*

- *$A \subseteq (C \times R) \cup (R \times C)$ est l'ensemble des arêtes ;*

- label *est une application d'étiquetage qui associe à tout sommet et à toute arête une étiquette :*

  - $\forall c \in C, \text{label}(c) \in T_C \times (I \cup \{*\})$ *est un couple* $(\text{type}(c), \text{marqueur}(c))$ *avec* $\text{type}(c) \colon C \rightarrow T_C$ *et* $\text{marqueur}(c) \colon C \rightarrow I \cup \{*\}$ *; si* $\text{marqueur}(c) = *$*, alors le concept c est appelé concept générique et si* $\text{marqueur}(c) \in I$*, le concept est appelé concept individuel,*
  - $\forall r \in R, \text{label}(r) \in T_R$ *est le type du sommet relation,*
  - $\forall a \in A, \text{label}(a) \in \mathbb{N}$ *;*

- label *obéit aux contraintes fixées par σ et τ :*

  - *l'ensemble des arêtes adjacentes à tout sommet relation r est totalement ordonné, ce qu'on représente en étiquetant les arêtes de 1 à l'arité de r ; on note $G_i(r)$ le i-ième voisin de r dans G,*
  - $\forall c \in C, \text{marqueur}(c) \in I \Rightarrow \tau(\text{marqueur}(c)) \leq \text{type}(c)$*,*
  - $\forall r \in R, \text{type}(G_i(r)) \leq \sigma_i(\text{type}(r))$*.*

[12] Le type associé au k-ième argument de t_{r1} est inférieur ou égal au type associé au k-ième argument de t_{r2}.

Le marqueur générique $*$ est donc utilisé dans un graphe quand le créateur du graphe veut représenter des connaissances sur un individu mais qu'il n'est pas capable d'exprimer de quel individu particulier du support il s'agit.

Une fois que des connaissances factuelles ont été exprimées sous la forme d'un graphe, ce graphe peut être interrogé à l'aide d'une requête exprimée elle aussi sous la forme d'un graphe conceptuel. Cette interrogation se fait à l'aide de l'opération de *projection* [Chein et Mugnier, 1992]. La projection d'un graphe-requête H dans un graphe-fait G permet de demander si l'information représentée par H est incluse dans l'information représentée par G. Plus précisément, la projection est un homomorphisme de graphe qui associe à tout sommet de H un sommet de G dont le type est égal ou plus spécialisé, et qui préserve les arêtes et leurs étiquettes. Dans le cas des sommets concept, un sommet étiqueté par un marqueur de I ne peut avoir pour image qu'un sommet portant le même marqueur, alors qu'un sommet étiqueté par $*$ peut avoir comme image un sommet quelconque. Ceci permet d'exprimer, dans une requête, une recherche sur des individus précis ou des individus quelconques.

Définition 1.5 (Projection)
Une projection *d'un graphe conceptuel* $H = (C_H, R_H, A_H, \mathrm{label_H})$ *dans un graphe conceptuel* $G = (C_G, R_G, A_G, \mathrm{label_G})$*, tous deux définis sur un même support, est un couple d'applications* $\Pi = (f, g)$*, avec* $f : C_H \Rightarrow C_G$ *et* $g : R_H \rightarrow R_G$*, tel que :*

- Π *peut spécialiser les étiquettes des sommets :*
  - $\forall c \in C_H, \mathrm{label_G}(f(c)) \leq \mathrm{label_H}(c)$,
  - $\forall r \in R_H, \mathrm{label_G}(g(r)) \leq \mathrm{label_H}(c)$ *;*
- Π *préserve les arêtes et les étiquettes : pour tout arête* $rc \in A_H$*,* $g(r)f(c)$ *est une arête de* A_G *; de plus, si* $c = H_i(r)$*, alors* $f(c) = G_i(h(r))$*.*

1.3.3 Édition et exemple illustratif

Il existe quelques logiciels permettant de créer et d'interroger des graphes conceptuels, comme CharGer [13], développé par l'Université d'Alabama. Cogitant [14] est une bibliothèque permettant modéliser et raisonner sur des graphes conceptuels. Il existe une interface graphique permettant de créer des graphes conceptuels et qui les interroge grâce à Cogitant, CoGui [15].

La figure 1.9 est un graphe conceptuel représentant des informations sur Internet. Pour simplifier la visualisation, les arêtes étiquetées par 1 sont représentées par une flèche partant du sommet concept vers le sommet relation et les autres arêtes par une flèche partant du sommet relation vers le sommet concept. On ne précise pas la numérotation pour les arêtes étiquetées par 1 et, dans le cas des relations binaires, pour les arêtes étiquetées par 2.

Ce graphe conceptuel est construit sur le support dont les types de concepts et les types de relations sont représentés dans la figure 1.10. Le type de concept

[13]http://sourceforge.net/projects/charger/
[14]http://cogitant.sourceforge.net/
[15]http://www.lirmm.fr/cogui/

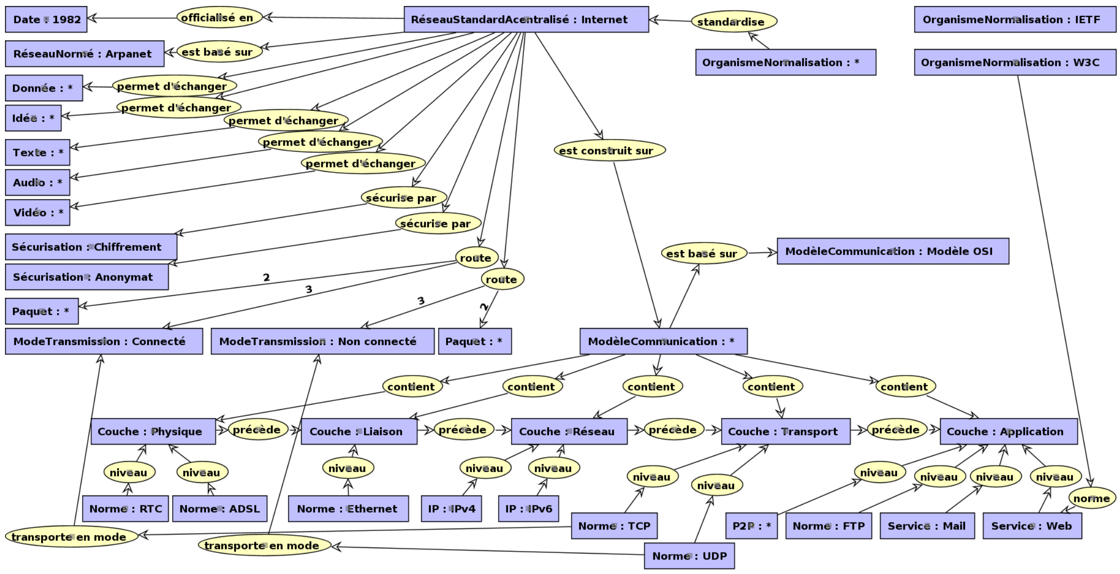


FIGURE 1.9 – Graphe conceptuel représentant diverses informations sur Internet.

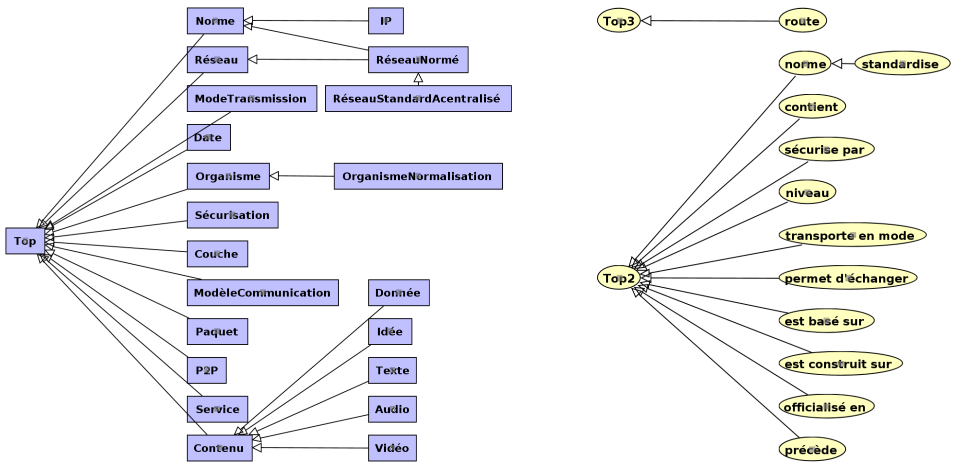


FIGURE 1.10 – Ensemble des types de concepts et de types de relations du graphe conceptuel de la figure 1.9.

Top sur cette figure est complètement équivalent au type de concept $\top$ de la définition 1.3. Les types de relations *Top2* et *Top3* correspondent respectivement aux types de relations $\top_2$ et $\top_3$. Dans la hiérarchie de concepts du support, on peut lire que $IP \leq Norme$ et donc que les protocoles IP sont des normes. Nous avons choisi de créer un type IP pour regrouper les deux versions principales d'IP, IPv4 et IPv6, qui sont, elles, représentées par des individus.

La figure 1.11 représente les signatures des relations. Par souci de concision, celles ayant pour une signature du type $\sigma(r) = (\top, \top)$ ou $\sigma(r) = (\top, \top, \top)$ ne sont pas représentées. L'ensemble des marqueurs individuels est représenté dans le tableau de la figure 1.12.

Le graphe de la figure 1.13 est un graphe-requête qui peut être interprété de la façon suivante : « Au niveau de quelle couche est la norme IPv4 et quelle est la couche précédente et quelle est la couche suivante ? ». L'opération de projec-

Type de relation (r)	$\sigma_1(\mathbf{r})$	$\sigma_2(\mathbf{r})$
officialisé en	$\top$	Date
sécurise par	$\top$	Sécurisation
niveau	$\top$	Couche
transporte en mode	Norme	ModeTransmission
norme	OrganismeNormalisation	$\top$
standardise	OrganismeNormalisation	$\top$

Type de relation (r)	$\sigma_1(\mathbf{r})$	$\sigma_2(\mathbf{r})$	$\sigma_3(\mathbf{r})$
route	Réseau	$\top$	ModeTransmission

FIGURE 1.11 – Signatures des types de relations.

Marqueur	**Type**
Internet	RéseauStandardAcentralisé
1982	Date
Chiffrement	Sécurisation
Anonymat	Sécurisation
Connecté	ModeTransmission
Non connecté	ModeTransmission
Modèle OSI	ModèleCommunication
RTC	Norme
ADSL	Norme
Ethernet	Norme
IETF	OrganismeNormalisation
W3C	OrganismeNormalisation

Marqueur	**Type**
Physique	Couche
Liaison	Couche
Réseau	Couche
Transport	Couche
Application	Couche
IPv4	IP
IPv6	IP
UDP	Norme
TCP	Norme
FTP	Norme
Mail	Service
Web	Service

FIGURE 1.12 – Marqueurs individuels.

tion retourne un résultat positif pour le graphe de la figure 1.9, présenté dans la figure 1.14. Le sommet *Norme:IPv4* a pour image *IP:IPv4*, puisque $IP \leq Norme$. Le sommet *Couche:** qui indique la couche au niveau de laquelle se trouve *IPv4* a pour image *Couche:Réseau*. Le sommet *Couche:** qui indique la couche précédente a pour image *Couche:Liaison*. Le sommet *Couche:** qui indique la couche suivante a pour image *Couche:Transport*. Ainsi, on en conclut que la norme IPv4 est au niveau de la couche Réseau et que la couche précédente est la couche Liaison et la suivante la couche Transport.

1.3.4 Discussion

L'aspect visuel des graphes conceptuels n'inclut pas des attributs du modèle des cartes mentales, comme la couleur ou l'épaisseur des traits qui aident à l'apprentissage et la mémorisation. En effet, la priorité est donnée à l'information représentée par les graphes conceptuels, plutôt qu'à l'aspect graphique de ces informations. Il n'est donc pas non plus possible d'ajouter des liens internes ou externes pour mieux décrire un concept.

Un graphe conceptuel nécessite de définir beaucoup d'informations : là où les autres modèles se limitent à un graphe de connaissances factuelles, les graphes

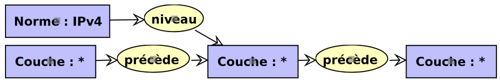


FIGURE 1.13 – Graphe-requête pour le graphe conceptuel de la figure 1.9.

FIGURE 1.14 – Graphe-image issu du graphe-requête de la figure 1.13 pour le graphe conceptuel de la figure 1.9.

conceptuels nécessitent de définir en plus un support. Cela rend les graphes conceptuels longs et parfois difficiles à construire, l'accent étant donné sur la précision de l'information.

Il n'existe pas de moyen clair et concis de représenter un ordre dans un graphe, si ce n'est en explicitant clairement la relation d'ordre entre différents individus. Ainsi, le graphe conceptuel de la figure 1.9 utilise une relation *précède* pour ordonner les couches du modèle de communication, ce qui charge l'aspect visuel du graphe conceptuel. De façon plus générale, les graphes conceptuels ne cherchent pas à avoir un aspect visuel qui permette une mémorisation facile.

Il existe différentes extensions du modèle des graphes conceptuels. Ainsi, la sémantique claire du modèle a permis d'exprimer des règles Datalog [Baget *et al.*, 2009]. Cependant, dans le modèle original, il n'est pas possible de manipuler des valeurs littérales, d'où la création d'un concept *Date* et d'un individu *1982* dans la figure 1.9. Par ailleurs, la numérotation des arêtes permet de préciser le rôle de chacun des individus qui interviennent dans une relation. Un remplacement de ces nombres par un texte descriptif du rôle de l'individu concerné dans la relation offrirait plus de clarté.

Il n'est pas non plus possible de représenter un type abstrait : dans notre exemple, un contenu est soit une donnée, soit une idée. Or, avec le modèle et le support définis ici, un individu peut être instance de *Contenu* sans être instance ni de *Donnée*, ni de *Idée*.

Il faut noter que, malgré ces problèmes, l'un des intérêts majeurs des graphes conceptuels est qu'ils permettent le raisonnement sur des connaissances non ambiguës.

1.4 Carte cognitive

Les *cartes cognitives* ont pour but de représenter des influences entre des concepts. Les concepts sont généralement des événements et sont décrits par des textes brefs et liés entre eux par des influences d'un concept-cause vers un concept-effet auxquelles une valeur est associée. Pour présenter ce modèle, nous en faisons tout d'abord une présentation dans la section 1.4.1 avant de le définir formellement dans la section 1.4.2. Nous montrons ensuite l'application de ce modèle sur un exemple dans la section 1.4.3 et enfin nous discutons de ces points forts et de ces points faibles dans la section 1.4.4.

1.4.1 Présentation

Les cartes cognitives représentent des influences entre des concepts. De par leur structure graphique et la notion d'influence, elles peuvent être rapprochées des réseaux d'influence [Pearl, 2005]. Elles peuvent par conséquent être également rapprochées des réseaux bayésiens [Kjaerulff et Madsen, 2008]. Des mécanismes permettant de calculer l'influence d'un concept sur un autre sont fournis. Elles aident un ou plusieurs utilisateurs à prendre une décision et comprendre les conséquences de celle-ci. Le terme de carte cognitive a été inventé par Edward C. Tolman [Tolman, 1948] qui étudiait la manière dont des rats sortaient d'un labyrinthe. Il utilise le terme de carte cognitive pour désigner une représentation de l'espace par les rats sous la forme d'une carte stockée dans leur cerveau. Le terme a été repris par Robert Axelrod [Axelrod, 1976] qui en fait un modèle d'influence clair. Il les a modélisées pour le domaine des sciences politiques comme étant les croyances d'un individu dans un domaine particulier. Une carte cognitive ne représente donc plus un environnement spatial mais à la fois le contenu de la pensée d'un individu et sa représentation graphique. James Doyle et David Ford [Doyle et Ford, 1999] ont séparé ces deux notions et le terme de carte cognitive désigne désormais la représentation graphique qui n'a pas nécessairement pour but de représenter la pensée. Les cartes cognitives sont parfois nommées *cartes causales* ou *graphes causaux*. Elles sont utilisées dans de nombreux domaines tels que la biologie [Tolman, 1948], la sociologie [Poignonec, 2006], l'écologie [Celik *et al.*, 2005], la politique [Levi et Tetlock, 1980].

Les informations représentées par une carte cognitive étant exclusivement des influences entre des concepts, elles sont moins expressives que les autres modèles de cartes sémantiques précédemment présentés. Certaines informations ne sont donc pas représentables par ce modèle. Dans notre exemple, nous ne pouvons donc représenter les informations décrits dans les exemples des sections 1.1.3, 1.2.3 et 1.3.3 puisque celles-ci ne sont pas des influences. Nous construisons donc un exemple spécialement pour ce modèle figurant des influences entre des concepts.

1.4.2 Représentation

Une carte cognitive permet de modéliser les influences de concepts sur d'autres concepts. Un *concept* est représenté par un texte bref le caractérisant. L'*influence* est une relation causale d'un concept-cause sur un concept-effet représentée par une flèche. La *valeur de l'influence* est représentée par un symbole étiquetant cette influence. On appelle *ensemble de valeurs* l'ensemble des valeurs que peut prendre une influence dans une carte cognitive. Selon les modèles de carte cognitive, cet ensemble de valeurs peut être un ensemble de valeurs symboliques. Parmi cette catégorie d'ensembles de valeurs, on retrouve l'ensemble $\{+, -\}$ défini par R. Axelrod [Axelrod, 1976] ainsi que des ensembles de valeurs symboliques munis d'un ordre total comme $\{\mathit{nul} < \mathit{faible} < \mathit{moyen} < \mathit{fort}\}$ [Dickerson et Bart, 1994; Zhou *et al.*, 2003]. Cet ensemble de valeurs peut également être un intervalle de valeurs numériques comme $[-1; 1]$ [Kosko, 1986; Satur et Liu, 1999].

Une carte cognitive est un graphe défini sur un ensemble de concepts représentant les concepts et sur un ensemble de valeurs d'influence et dans lequel les sommets représentant les concepts sont liés entre eux par des arcs représentant les influences. Une carte cognitive figure donc trois différents types d'informations : des concepts, des influences et des valeurs.

Définition 1.6 (Carte cognitive)
Soit C un ensemble de concepts. Soit I un ensemble de valeurs.
Une carte cognitive *définie sur I est un graphe orienté étiqueté* $CM = (C, A, \text{label})$ *où :*

- *les concepts de C sont les sommets du graphe ;*
- $A \subseteq C \times C$ *est l'ensemble des arcs appelés* influences *;*
- $\text{label} : A \to I$ *est une application d'étiquetage qui associe à toute influence une valeur d'influence.*

Dans le cas où $I = \{+, -\}$, une valeur d'influence de $+$ signifie qu'un concept *influence positivement* un autre concept ; une valeur d'influence de $-$ signifie qu'un concept *influence négativement* un autre concept.

Un *chemin d'influence* d'un concept vers un autre correspond à un chemin dans le graphe représentant la carte cognitive de ce concept vers l'autre. Le premier concept est appelé concept-source et le second concept-destination. La méthode de calcul de l'influence propagée d'un concept sur un autre est laissée au libre choix du concepteur de la carte cognitive. Généralement, celui-ci se décompose en trois étapes successives. La première consiste à lister l'intégralité des chemins d'influence permettant de lier le concept-source au concept-destination. Sur chacun de ces chemins, on calcule l'*influence propagée sur ce chemin*. L'influence propagée sur un chemin d'influence est la valeur de l'influence du concept-source sur le concept-destination sur ce chemin. Elle est calculée en cumulant les valeurs des influences composant ce chemin. On calcule enfin l'*influence propagée d'un concept sur un autre*. L'influence propagée est la valeur de l'influence globale du concept-source sur le concept-destination sur l'ensemble des chemins d'influence permettant de lier ces deux concepts. Elle est calculée en combinant les valeurs des influences propagées sur tous les chemins menant du concept-source au concept-destination.

Ainsi, Axelrod [Axelrod, 1976] a proposé, pour une carte définie sur l'ensemble de valeurs $\{+, -\}$, une méthode de calcul pour l'influence propagée dans un chemin d'influence basée sur la définition d'un opérateur $\wedge$, ainsi qu'une méthode de calcul pour l'influence propagée d'un concept sur un autre basée sur la définition d'un opérateur $\vee$. Pour ce dernier opérateur, il ajoute deux valeurs supplémentaires à l'ensemble de valeurs $\{+, -\}$:

- 0 qui représente une valeur nulle : le concept-source n'a aucune influence sur le concept-destination ;
- ? qui représente une valeur ambiguë, c'est-à-dire dont on ne peut décider si l'influence du concept-source sur le concept-destination est positive ou négative.

1.4.3 Édition et exemple illustratif

Un logiciel capable de représenter des cartes conceptuelles est généralement capable de représenter des cartes cognitives, à condition de remplacer les étiquettes des arcs par des valeurs d'influence. Cependant, de tels logiciels sont incapables de calculer les influences propagées entre deux concepts. Or, le calcul de ces influences est l'intérêt principal des cartes cognitives. SCCO[16] est dédié spécifiquement à la manipulation de cartes cognitives et permet de calculer des influences propagées entre deux concepts.

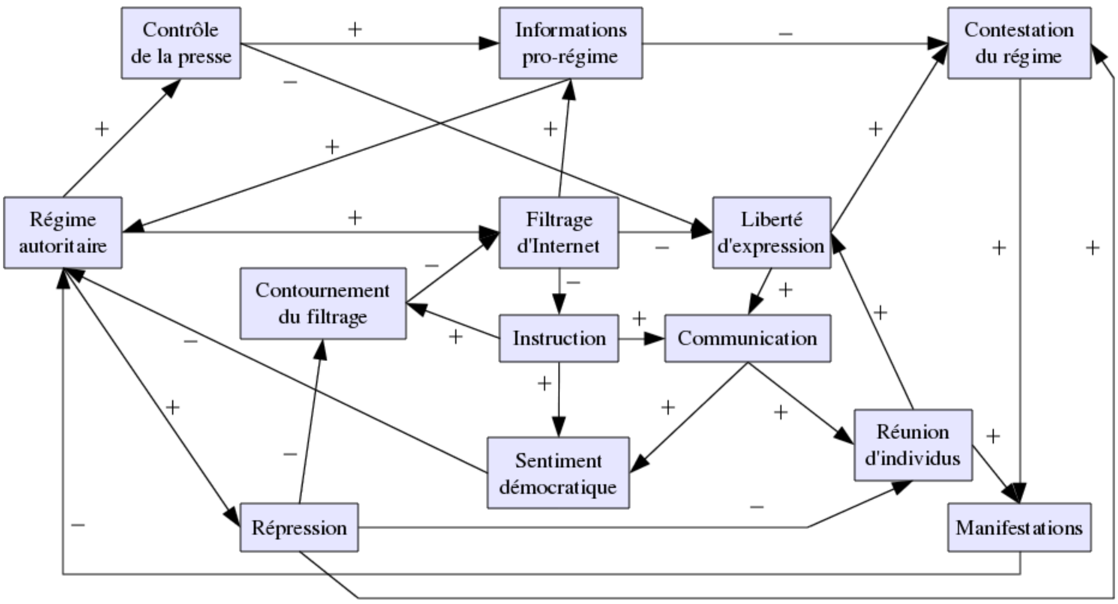


FIGURE 1.15 – Carte cognitive représentant l'influence du filtrage d'Internet sur le régime politique en place.

La carte cognitive de la figure 1.15 est définie sur l'ensemble de valeurs $I = \{+, -\}$ et représente l'influence du filtrage d'Internet ainsi que celle d'autres facteurs sur la contestation du régime autoritaire d'un État. Si on considère les concepts *Régime autoritaire* et *Filtrage d'Internet*, l'influence valuée par $+$ partant de *Régime autoritaire* et allant vers *Filtrage d'Internet* signifie qu'un régime autoritaire influence favorablement le filtrage d'Internet. Autrement dit, un régime autoritaire filtre souvent Internet. De la même manière, si on considère les concepts *Filtrage d'Internet* et *Liberté d'expression*, l'influence valuée par $-$ partant de *Filtrage d'Internet* et allant vers *Liberté d'expression* signifie que le filtrage d'Internet influence défavorablement la liberté d'expression. Autrement dit, le fait qu'Internet soit filtré limite la liberté d'expression.

En utilisant la définition des influences propagées d'Axelrod, on cherche à savoir comment un *Régime autoritaire* influence les *Informations pro-régime*. Avant tout chose, on doit lister les différents chemins qui permettent de lier *Régime autoritaire* à *Informations pro-régime*. Ces chemins sont au nombre de 3. Pour connaître l'influence propagée sur le chemin d'influence *Régime autoritaire* $\rightarrow$ *Contrôle de*

[16] `http://forge.info.univ-angers.fr/~lionelc/CCdeGCjava/`

la presse → *Informations pro-régime*, on utilise un opérateur $\wedge$, défini par Axelrod. Sur ce chemin, on note que le concept *Régime autoritaire* influence positivement *Contrôle de la presse* qui influence à son tour positivement *Informations pro-régime*. Intuitivement, on en déduit que sur ce chemin, *Régime autoritaire* influence positivement *Informations pro-régime* et que la valeur de l'influence propagée sur ce chemin est $+$. On applique le même raisonnement sur les autres chemins en calculant également une influence positive. Pour connaître l'influence propagée de *Régime autoritaire* sur *Informations pro-régime*, on doit agréger les influences propagées sur les différents chemins. Puisque sur les 3 chemins d'influence différents permettant de lier *Régime autoritaire* à *Informations pro-régime*, le premier concept influence positivement le second, on en déduit intuitivement que globalement, *Régime autoritaire* influence positivement *Informations pro-régime*. La valeur de l'influence propagée de *Régime autoritaire* sur *Informations pro-régime* est donc $+$.

1.4.4 Discussion

Le point fort du modèle des cartes cognitives est que des raisonnements y sont possibles : le calcul de l'influence d'un concept sur un autre. Cependant, la définition de ce calcul n'est pas unifiée. Selon la sémantique associée aux valeurs et la manière d'obtenir les informations, les opérateurs permettant ce calcul doivent être adaptés. En conséquence, l'influence propagée d'un concept sur un autre calculée ne représente pas toujours une valeur réelle si les opérateurs utilisés n'obéissent pas à un formalisme particulier. Néanmoins, un calcul même non formel permet généralement de se donner une idée de la valeur de l'influence.

Un problème causé par la définition de l'influence propagée par R. Axelrod est qu'elle aboutit souvent à une valeur ambiguë pour les influences propagées entre deux concepts. Par exemple, si la quasi-totalité des chemins permettant de lier deux concepts portent la valeur $+$ mais qu'un seul d'entre eux porte la valeur $-$, la valeur d'influence d'un concept sur l'autre sera ambiguë (?). Il est donc naturel de vouloir une représentation plus riche de l'influence, de manière à déterminer si une valeur d'influence ambiguë est plus proche de $+$ ou de $-$. On peut trouver préférable d'utiliser des valeurs numériques, telles que celles de l'intervalle $[-1; 1]$ ou symboliques telles que celles de $\{nul < faible < moyen < fort\}$. La difficulté est alors de définir des opérateurs adéquats capables de combiner ces valeurs. Si on utilise par exemple des valeurs numériques, selon ce que représentent ces valeurs, les opérateurs seront différents. On utilise généralement un produit ou une moyenne [Chauvin *et al.*, 2011] mais si elles représentent des possibilités [Dubois et Prade, 1988] ou des valeurs floues [Zadeh, 1965], on utilisera plutôt un min ou un max [Kosko, 1986].

1.5 Comparaison

Pour comparer les différents modèles de cartes sémantiques, nous présentons tout d'abord un tableau comparant les modèles de cartes selon différents critères dans la section 1.5.1. Cette comparaison concerne différents critères qui sont détaillés dans cette section. Étant donné la particularité des informations d'une carte cognitive, nous proposons une manière de représenter la notion d'influence pour chacun des autres modèles de cartes sémantiques dans la section 1.5.2.

1.5.1 Tableau de comparaison

Le tableau de la figure 1.16 compare les différents modèles de cartes sémantiques sur plusieurs points. Il discute de l'importance que chaque modèle accorde à ces critères en leur attribuant une valeur parmi *faible*, *moyen*, *fort* et *très fort*.

Pour expliquer les différents points de ce tableau, on présente tout d'abord les objectifs de chacun des modèles de cartes sémantiques, ainsi que leurs domaines d'application. Puis, on s'intéresse à la facilité de leurs constructions dans la section. Après cela, on présente comment les modèles s'équilibrent entre la visualisation de l'information et la signification de cette information. Enfin, on compare le choix de modélisation pour ces cartes.

		cartes mentales	**cartes conceptuelles**	**graphes conceptuels**	**cartes cognitives**
Rôle et objectifs	**rôle du modèle**	décrire une idée	répondre à une question	raisonner sur des connaissances	représenter une influence
	facilité de mémorisation	très fort	fort	moyen	moyen
	aide à l'apprentissage	fort	très fort	faible	moyen
	capacité de raisonnement	faible	faible	très fort	moyen
	aide à la décision de groupe	fort	moyen	moyen	très fort
Construction		très facile	facile	facile	facile
Visualisation et sémantique	**importance de l'aspect visuel**	très fort	fort	moyen	moyen
	importance de la sémantique	moyen	fort	très fort	fort
	précision de l'information	moyen	moyen	très fort	fort
Modélisation	**type de graphe**	arborescence	graphe biparti orienté étiqueté	multigraphe biparti non-orienté étiqueté	graphe orienté étiqueté
	étiquetage des sommets	libre	texte libre et concis	élément d'une ontologie	texte libre
	étiquetage des arêtes	libre	non	numérotation des liens	valeurs

FIGURE 1.16 – Comparaison des modèles de cartes sémantiques.

Objectifs

Chaque modèle a été défini pour des objectifs particuliers.

La mémorisation est un point fort des cartes mentales puisque c'est ce pour quoi elles ont été conçues. De par leur aspect relativement simple, les cartes conceptuelles sont facilement mémorisables. Les cartes cognitives et les graphes conceptuels permettent une facilitation de la lecture des connaissances, mais n'ont pas été conçus pour la mémorisation. Néanmoins, l'aspect graphique aide grandement à une telle tâche.

L'apprentissage est l'objectif principal des cartes conceptuelles. Elles sont donc particulièrement adaptées pour répondre à une question centrale. De part leur forte capacité de mémorisation, les cartes mentales sont également un bon outil pour l'aide à l'apprentissage. Les cartes cognitives peuvent être utiles pour représenter clairement et comprendre une influence. En revanche, les graphes conceptuels ne permettent pas un apprentissage aisé de l'information.

Le formalisme est un point fort des graphes conceptuels, qui ont été conçus pour raisonner sur des connaissances. Les cartes cognitives calculent des influences et permettent donc un raisonnement simple. Les cartes mentales et les cartes conceptuelles, quant à elles, ne permettent pas de raisonner sur des connaissances, mais il est toutefois possible d'en déduire indirectement de nouvelles.

L'aide à la prise de décision est une utilisation très courante des cartes cognitives : le calcul d'influence permet en effet d'avoir un aperçu des conséquences d'une telle décision. Il en va de même pour les cartes mentales qui se construisent souvent en groupe. Les cartes conceptuelles et les graphes conceptuels ne permettent pas vraiment une aide à la décision de groupe. Cependant, les raisonnements fournis par les graphes conceptuels peuvent être utiles pour l'aide à la décision, même si l'aspect collectif n'est pas pris en compte par le modèle.

Construction

Nous pouvons noter un point commun essentiel entre ces modèles de cartes : chacun d'eux permet une construction facile. Ces modèles ont été conçus pour représenter graphiquement des connaissances et pour faciliter leur modélisation. La carte mentale est la plus simple à construire car la moins contrainte et le graphe conceptuel le plus compliqué car étant le plus contraint. En effet, moins le modèle d'une carte est formel, plus elle est facile à construire, et plus le modèle est formel, plus il y a d'informations précises à fournir et par conséquent, plus sa construction est complexe.

Visualisation et sémantique

Ces modèles s'équilibrent entre deux aspects : la visualisation et la sémantique. En effet, une information précise et non ambiguë lui donne souvent un aspect graphique complexe. De même, une information représentée graphiquement de manière simple est parfois si concise qu'elle devient ambiguë. Typiquement, la visualisation des informations est très importante pour les cartes mentales aux dépens de leur sémantique, celles-ci étant conçues pour une mémorisation facile des informations, tandis qu'avec les graphes conceptuels, c'est l'inverse : la sémantique prend le pas sur leur visualisation, les graphes conceptuels étant en effet conçus pour supprimer toute ambiguïté, de manière à pouvoir raisonner. C'est aussi, du moins en partie, le cas avec les cartes cognitives, dont l'aspect visuel importe peu : comme elles calculent des influences, l'accent est donné sur les valeurs de ces influences et donc sur la sémantique. La visualisation n'est donc pas l'objectif premier mais est tout de même essentielle pour que la carte garde une lisibilité correcte. Concernant les cartes conceptuelles, les deux aspects sont importants puisque la carte doit être à la fois facilement lisible et compréhensible pour l'apprentissage.

Modélisation

Chacune des cartes sémantiques présentée ici est définie sur un modèle de graphe particulier, mais elles ont globalement une structure similaire : des concepts représentés par des sommets liés entre eux. La différence entre ces modèles est essentiellement la représentation des liens. Pour les cartes mentales, les liens, lorsqu'ils sont étiquetés par un texte, sont représentés par des sommets et deviennent semblables aux concepts. Pour les cartes cognitives, un lien est un arc entre des sommets : il est étiqueté pour représenter la valeur de l'influence qu'il représente. Pour les cartes conceptuelles et les graphes conceptuels, un lien est aussi un sommet qui est étiqueté pour identifier la relation et ce sommet est relié à un ou plusieurs sommets concept par un arc ou une arête selon le modèle de graphe.

L'orientation des liens dans les cartes n'est pas toujours indiquée et a un sens différent selon les modèles. Celle-ci sert généralement à connaître le rôle de chacun des concepts impliqués dans une relation. Avec une carte mentale, il n'y a pas d'orientation : celle-ci ayant l'aspect d'une arborescence, on peut déduire une orientation implicite en partant du sommet racine vers les sommets feuille. Avec les graphes conceptuels, la numérotation des arêtes permet de spécifier le rôle de chacun des concepts impliqués dans une relation et par conséquent l'orientation des liens. Avec les cartes conceptuelles, l'orientation représente le sens de lecture de la carte tandis qu'avec les cartes cognitives, l'orientation permet d'identifier pour chaque influence quel est le concept-cause et quel est le concept-effet.

Pour être plus précis dans la description de la modélisation, on peut noter qu'il est possible d'étiqueter les sommets d'une carte mentale comme on le souhaite : texte, image, couleur, épaisseur de trait... Pour tous les autres modèles, les sommets doivent être étiquetés par un texte. Pour les cartes conceptuelles et les graphes conceptuels, il est également obligatoire d'étiqueter les relations. L'étiquetage dans les graphes conceptuels n'est pas libre. Concernant l'étiquetage des arêtes et des arcs, il est libre pour les cartes mentales. En ce qui concerne les cartes cognitives, les arcs ne peuvent être étiquetés que par des valeurs représentant les valeurs des influences entre deux concepts. Pour les cartes conceptuelles et les graphes conceptuels, les arêtes et arcs ne sont pas étiquetés : leur rôle est de lier des sommets concept à des sommets relation et qui eux sont étiquetés. Selon le type de connaissances à représenter, certains modèles sont donc plus adaptés que d'autres.

1.5.2 Influences

Comme expliqué précédemment, les informations représentées par une carte cognitive sont essentiellement des influences. Les autres modèles de cartes sémantiques présentés précédemment sont cependant beaucoup plus expressifs. Par conséquent, ils devraient être capables de modéliser une influence et donc d'exprimer les informations d'une carte cognitive. Nous montrons comment représenter les influences d'une carte cognitive pour ces modèles, en utilisant le même exemple. Nous prenons un extrait de la carte cognitive de la figure 1.15 en nous limitant aux concepts *Filtrage d'Internet*, *Instruction*, *Contournement du filtrage* et *Liberté d'expression*.

Cartes mentales

Les cartes mentales étant centrées sur une idée principale, elles peuvent difficilement représenter une carte cognitive puisque celles-ci n'ont pas nécessairement de concept central. La notion d'arborescence limite de plus grandement les possibilités de liens entre des concepts. Néanmoins, on peut représenter une influence entre deux concepts grâce à un arc. La valeur de l'influence ainsi que son signe peuvent être représentés par exemple par l'épaisseur du trait et sa couleur, comme présenté sur la figure 1.17. L'influence de *Contournement du filtrage* vers *Filtrage d'Internet* n'a pas pu être représentée par un lien classique, en raison de la structure arborescente de la carte mentale. Elle a été substituée par un arc.

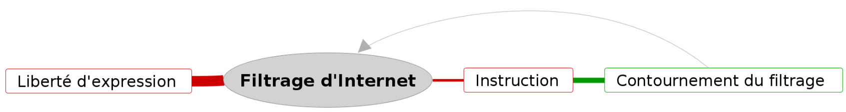


FIGURE 1.17 – Carte mentale représentant des relations d'influence.

Cartes conceptuelles

Les cartes conceptuelles n'ont pas de contraintes de structure. Les influences sont des relations ternaires qui associent un concept à un autre concept et à une valeur d'influence. On peut donc les représenter par trois concepts liés en série par des arcs, comme présenté sur la figure 1.18. La carte devient cependant illisible dès qu'un concept est influencé par valeurs différentes issues de deux concepts.

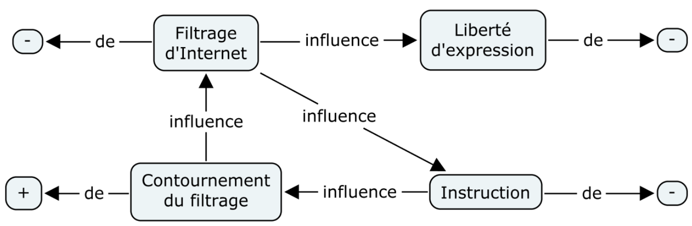


FIGURE 1.18 – Carte conceptuelle représentant des relations d'influence sous forme ternaire.

On peut également indiquer la valeur d'influence directement sur l'arc, comme présenté sur la figure 1.19. Cette représentation est plus juste et diminue les ambiguïtés mais les influences de la carte perdent en lisibilité.

Graphes conceptuels

Les graphes conceptuels peuvent quant à eux représenter de manière formelle les influences des cartes cognitives. Si l'ensemble de valeurs sur lequel la carte cognitive

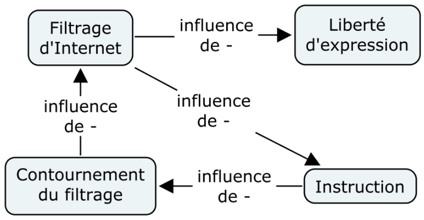


FIGURE 1.19 – Autre carte conceptuelle représentant des relations d'influence sous forme binaire.

est définie est un ensemble fini de valeurs tel que $\{+, -\}$ ou $\{nul < faible < moyen < fort\}$, les valeurs sont facilement représentables. En revanche, si c'est un ensemble infini tel que $[-1; 1]$, le modèle standard des graphes conceptuels est insuffisant puisque celui-ci ne gère pas les types de données. Il faut donc utiliser une extension du modèle pour qu'il puisse assurer cette gestion [Baget, 2007; Rudolph *et al.*, 2009].

Une influence peut être tout simplement représentée par une relation ternaire qui associe un concept-cause, un concept-effet et une valeur d'influence, comme présenté dans l'extrait de support de la figure 1.20. Le concept lié par l'arc étiqueté par 1 est le concept-cause, celui lié par l'arc 2 le concept-effet. L'arc 3 lie quant à lui la relation d'influence à une valeur. Représenter une influence revient donc simplement à représenter graphiquement une instance de cette relation, comme présenté dans le graphe conceptuel de la figure 1.21.

Type de relation (r)	$\sigma_1(\mathbf{r})$	$\sigma_2(\mathbf{r})$	$\sigma_3(\mathbf{r})$
influence	Concept	Concept	Valeur

Marqueur	**Type**
$+$	Valeur
$-$	Valeur

FIGURE 1.20 – Extrait du support d'un graphe conceptuel figurant des relations d'influence ternaires.

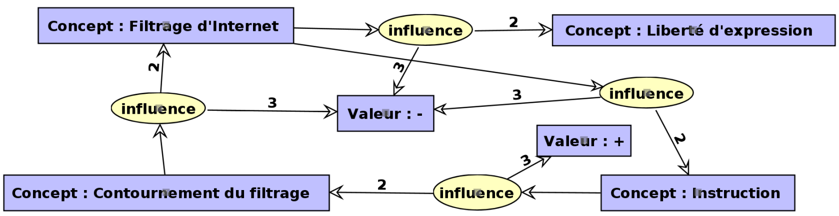
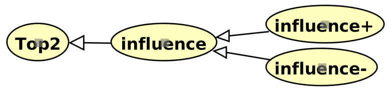


FIGURE 1.21 – Graphe conceptuel représentant des relations d'influence ternaires.

Cependant, comme pour les cartes conceptuelles, on peut également représenter une influence par une relation binaire entre les deux concepts liés. La valeur de l'influence fait partie du libellé de la relation. Néanmoins, l'ensemble de valeurs doit nécessairement être fini puisque l'intégralité des relations d'influence possibles doit être listée. L'extrait de support de la figure 1.22 décrit de telles relations d'influence. La figure 1.23 représente le même graphe conceptuel que précédemment, mais avec des relations d'influence binaires.



Type de relation (r)	$\sigma_1(\mathbf{r})$	$\sigma_2(\mathbf{r})$
influence	Concept	Concept
influence+	Concept	Concept
influence-	Concept	Concept

FIGURE 1.22 – Extrait du support d'un graphe conceptuel figurant des relations d'influence binaires.

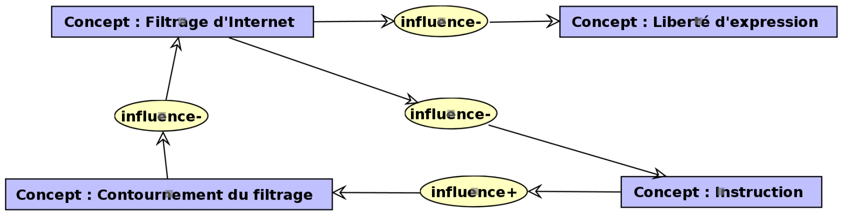


FIGURE 1.23 – Graphe conceptuel représentant des relations d'influence binaires.

Quelle que soit la modélisation d'influence choisie, aucun raisonnement concernant le calcul d'influence propagée n'est possible avec un graphe conceptuel. Pour cela, il faudrait étendre le modèle.

Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté différents modèles de cartes sémantiques et nous avons procédé à une étude comparative de ceux-ci.

Nous nous sommes intéressés principalement à la représentation, la visualisation et le raisonnement dans chaque modèle. Chaque type de carte a des objectifs différents. Pour certains modèles, la capacité de raisonnement est plus importante que pour d'autres. C'est pourquoi, pour ces modèles, la formalisation est essentielle. Leur principal point commun est qu'ils permettent tous une visualisation aisée de l'information : ils utilisent une représentation sous forme de graphe dont les sommets sont des concepts liés entre eux par des arcs représentant des relations entre ces concepts. Pour cette raison, la construction de ces cartes sémantiques est facile malgré l'aspect formel de certains modèles. Ces modèles permettent donc de représenter facilement des informations complexes. Il faut noter que ces aspects de visualisation sont liés à l'un des objectifs communs à ces modèles qui est de permettre une communication aisée au sein d'un groupe de personnes.

Les différences entre les modèles de cartes sémantiques s'expliquent par leurs objectifs distincts. Ces objectifs mêlent des aspects de sémantique et de visualisation de l'information. Il faut noter que ces aspects entrent en concurrence. En effet, du point de vue de la sémantique, une visualisation plus simple entraîne une sémantique moins précise de l'information alors qu'une sémantique précise nécessite une visualisation plus complexe. Les objectifs ont un impact sur la construction. Dans certains cas, la carte résulte d'un travail en commun entre plusieurs utilisateurs, dans d'autres cas, chaque utilisateur a la possibilité d'avoir un profil de la carte en fonction de ses intérêts. Enfin, la construction de la carte est d'autant plus aisée que la formalisation du modèle est faible alors qu'une formalisation plus importante, plus contraignante pour la construction, assure une meilleure précision de la carte obtenue, voire une sémantique logique dans le cas des graphes conceptuels. Du point de vue de la visualisation, on peut voir que la richesse des attributs visuels proposés dans les cartes mentales pourrait être aisément appliquée aux autres modèles de cartes, par exemple dans le but de faciliter la mémorisation. D'un autre côté, nous avons noté que certains modèles n'ont pas été définis de manière précise. Dans un but de traitement automatique pour inférer des informations, il serait intéressant de réaliser une telle formalisation.

D'autres modèles représentent également sous forme graphique des informations et peuvent également être considérés comme des cartes sémantiques. Citons ici quelques modèles. Les cartes argumentatives [van Gelder, 2013] représentent sous la forme d'un graphe une série d'arguments et de contre-arguments qui se confortent ou se confrontent. Comme les cartes cognitives, elles sont attachées à un formalisme particulier et peuvent être liées à la théorie de l'argumentation [Dung, 1995]. Les cartes topiques [ISO/IEC JTC1/SC34, 2007] représentent formellement des informations à la manière d'un index. Leur formalisme est proche de celui de RDF [W3C, 2004a] et d'OWL [W3C, 2004b] dans le sens où elles représentent des connaissances ontologiques et peuvent êtres représentées sous la forme d'un document XML [W3C, 2008; ISO/IEC JTC1/SC34, 2008]. Elles ont cependant l'avantage d'être représentables facilement sous la forme d'un graphe.

2

Carte cognitive

Introduction

Nous avons présenté différents modèles de cartes sémantiques et nous avons procédé à une étude comparative de ceux-ci dans le chapitre 1. La plupart des modèles présentés étaient soit très formels mais difficiles à construire, tels les graphes conceptuels, soit peu formels mais faciles à construire, tels les cartes mentales. Les cartes cognitives combinent les avantages de ces deux aspects puisque c'est un modèle à la fois formel et simple à construire. Il constitue le modèle essentiel étudié dans notre thèse.

Ce chapitre a pour but de décrire formellement le modèle des cartes cognitives ainsi que les opérateurs associés de calcul de l'influence propagée d'un concept sur un autre. Nous définissons formellement le calcul de cette influence. Comme expliqué dans le chapitre précédent, une carte cognitive peut être définie sur des ensembles de valeurs très divers. On peut notamment utiliser les ensembles $\{+, -\}$, $\{\textit{nul} < \textit{faible} < \textit{moyen} < \textit{fort}\}$ ou encore $[-1; 1]$. Le calcul de l'influence propagée est effectué en agrégeant les valeurs portées par les influences, c'est-à-dire des valeurs appartenant à de tels ensembles.

Lionel Chauvin [Chauvin, 2009; Chauvin *et al.*, 2009] a étendu le modèle classique des cartes cognitives en lui associant une ontologie de concepts qui permet de regrouper plusieurs concepts de la carte cognitive au sein d'un seul concept plus grand. Grâce à cette ontologie, on est mesure de réaliser diverses opérations sur une carte, comme le calcul de l'influence ontologique ou la construction de vue. L'influence ontologique permet de calculer l'influence de n'importe quel concept de l'ontologie sur n'importe quel autre en effectuant un calcul sur les influences propagées entre les couples de concepts regroupés par chacun des concepts de l'ontologie. Nous réutilisons ces notions en remplaçant le terme d'« ontologie » par celui de « taxonomie » que nous pensons plus approprié pour la notion qu'il représente.

L. Chauvin a également introduit dans sa thèse la notion de vue de cartes cognitives. Construire une vue d'une carte consiste à simplifier la dite carte en regroupant certains concepts au sein d'autres concepts grâce à l'ontologie, les influences étant calculés à partir de l'influence ontologique. Pour cela, on doit définir une échelle, c'est-à-dire les concepts qui apparaîtront dans la vue.

Enfin, comme nous l'avons vu, une carte cognitive peut être définie sur d'autres ensembles de valeurs. Dans la section 2.4, nous proposons d'autres opérateurs de calcul adaptés pour les ensembles valeurs $\{+, -\}$ et $\{\mathit{nul} < \mathit{faible} < \mathit{moyen} < \mathit{fort}\}$ pour l'influence propagée d'un concept sur un autre et pour l'influence taxonomique.

Pour présenter ce modèle, nous définissons tout d'abord comment calculer l'influence propagée d'un concept sur un autre pour l'ensemble de valeurs $[-1; 1]$ dans la section 2.1. Puis, nous présentons le modèle des cartes cognitives taxonomiques dans la section 2.2 qui nous sera utile pour les différentes notions définies dans ce mémoire de thèse. De ce modèle, nous présentons le mécanisme de vue dans la section 2.3 qui permet d'obtenir une représentation simplifiée d'une carte cognitive en adaptant nos définitions à la notion de taxonomie. Enfin, dans la section 2.4, nous montrons comment adapter les différents opérateurs définis dans ces différentes sections à d'autres ensembles de valeurs.

2.1 Définition du calcul de l'influence propagée

Nous avons déjà présenté formellement le modèle des cartes cognitives dans le chapitre 1 (définition 1.6) de manière générique pour n'importe quel ensemble de valeurs. Nous définissons à présent dans cette partie le calcul de l'influence propagée d'un concept sur un autre pour une carte cognitive dont les valeurs d'influence sont celles de l'intervalle de valeurs numériques $[-1; 1]$. Ces définitions sont basées sur celles décrites par L. Chauvin [Chauvin, 2009]. Avec cet ensemble de valeurs, une valeur d'influence $\alpha > 0$ d'un concept vers un autre signifie que ce concept influence positivement l'autre. Une valeur d'influence $\alpha < 0$ d'un concept sur un autre signifie cette fois que le concept influence négativement l'autre. Une valeur de -1 ou de 1 signifie que l'influence est totale. Une valeur de 0 signifie qu'il n'y a pas d'influence directe du concept sur l'autre. Une influence portant cette valeur n'est toutefois pas équivalente à une absence d'influence : sa valeur sera en effet prise en compte dans le calcul de l'influence propagée d'un concept sur un autre. En règle générale, cette valeur n'est donc jamais placée dans une carte en raison du comportement inattendu qu'elle peut provoquer. Nous la conservons néanmoins dans l'ensemble de valeurs car les définitions présentées ici restent valables pour cette valeur.

Dans cette partie, nous définissons le calcul de l'influence propagée de n'importe quel concept de la carte sur n'importe quel autre. L'idée est de considérer que chaque chemin permettant de lier ce concept à l'autre représente une manière possible pour le concept d'influencer l'autre. Chacun de ces chemins amène une valeur d'influence qu'il faut calculer. Enfin, on agrège les valeurs apportées par les différents chemins pour calculer l'influence propagée du concept sur l'autre. Ce calcul se fait donc en 3 étapes :

1. considérer l'ensemble des chemins liant ce concept à l'autre dans la carte (section 2.1.1) ;
2. calculer l'influence propagée sur chacun des chemins (section 2.1.2) ;
3. calculer enfin l'influence propagée d'un concept sur un autre (section 2.1.3).

Pour illustrer ces différents calculs, la carte cognitive sur laquelle nous appliquons les opérateurs définis dans cette partie est celle de l'exemple 2.1.

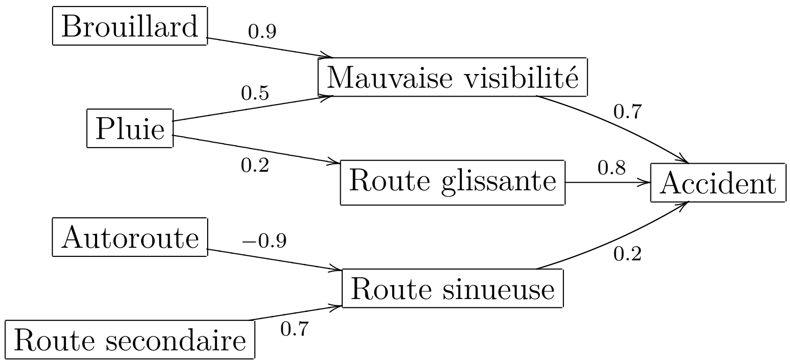


FIGURE 2.1 – La carte cognitive *CM1* définie sur $[-1; 1]$.

Exemple 2.1. *La carte CM1 (figure 2.1) représente différents facteurs pouvant influencer le risque qu'un accident de la route se produise. Cette carte cognitive est définie sur l'ensemble de valeurs* $[-1; 1]$.

Si on considère l'influence de Pluie *vers* Mauvaise visibilité*, si de la pluie tombe, elle influence positivement le risque que la visibilité soit mauvaise de* 0.5*. Si on considère l'influence de* Autoroute *vers* Route sinueuse*, le fait d'être sur une autoroute influence négativement le risque que la route soit sinueuse de* 0.9*. Si on considère les concepts* Brouillard *et* Route glissante*, il n'y a pas d'influence directe entre ces concepts.*

2.1.1 Chemins minimaux

La première étape du calcul de l'influence propagée d'un concept sur un autre consiste à calculer l'intégralité des chemins qui permettent de lier ce concept à l'autre.

Avant toute chose, nous définissons ce qu'est un *chemin d'influence* d'un concept vers un autre. Un chemin d'influence est une séquence de couples de concepts basée sur les arcs d'une carte cognitive.

Définition 2.1 (Chemin d'influence d'un concept vers un autre)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive. Soient* $c_1, c_2 \in C$ *deux concepts de* CM.
On appelle un chemin d'influence P *de* c_1 *vers* c_2 *une séquence de longueur* $k \geq 1$ *d'influences* $(u_i, u_{i+1}) \in A$ *avec* $i \in [0; k-1]$ *telle que* $u_0 = c_1$ *et* $u_k = c_2$.
On note un tel chemin d'influence $c_1 \rightarrow u_1 \rightarrow \cdots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow c_2$.
c_1 *est la* source *du chemin d'influence* P.

c_1 *est la* destination *du chemin d'influence* P.

Par souci de concision, nous parlerons souvent par la suite simplement de *chemin*.

On rappelle qu'une carte cognitive est un graphe. Si ce graphe autorise les circuits, il y a potentiellement une infinité de chemins permettant de lier un concept à un autre. Un ensemble fini de chemins est préférable pour calculer une influence. Pour cela, on définit la notion de chemin d'influence *minimal*. Cette définition permet d'assurer que l'ensemble des chemins minimaux soit fini.

Un *chemin minimal* est défini comme étant un chemin ne comportant aucun circuit, c'est-à-dire qu'aucun concept n'apparaît deux fois dans la séquence. Une telle définition autorise un circuit du concept-source au concept-destination mais pas au sein du chemin. D'autres définitions sont possibles et seront discutées dans la section 2.4.1.

Définition 2.2 (Chemin d'influence minimal)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive. Soit* P *un chemin d'influence liant deux concepts de* CM *de longueur* k.
P *est un* chemin d'influence minimal *ssi* $\forall i, j \in [0; k-1], i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j \wedge u_{i+1} \neq u_{j+1}$.

La proposition 2.1 nous assure que, dans une carte cognitive sans circuit, n'importe quel chemin permettant de lier deux concepts est minimal.

Proposition 2.1. *Soit* $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive sans circuit. Soit* P *un chemin d'influence liant deux concepts de* CM.
P *est minimal.*

Démonstration. Par définition, dans un graphe sans circuit, un chemin ne peut passer deux fois par le même sommet. P étant un chemin dans une carte cognitive sans circuit, il ne peut contenir deux fois le même sommet. On note k la longueur de P. On a donc $\forall i, j \in [0; k], i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j$. On en déduit trivialement que $\forall i, j \in [0; k-1], i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j \wedge u_{i+1} \neq u_{j+1}$.
Donc P est minimal. □

Maintenant que la notion de chemin minimal est définie, on peut définir l'*ensemble des chemins minimaux* d'un concept vers un autre. C'est sur cet ensemble de chemins que sera calculée l'influence propagée d'un concept sur un autre.

Définition 2.3 (Ensemble des chemins minimaux d'un concept vers un autre)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive. Soient* $c_1, c_2 \in C$ *deux concepts de* CM.
On note $\mathcal{P}_{c_1,c_2}$ *l'*ensemble des chemins minimaux *de* c_1 *vers* c_2.

Exemple 2.2. *On considère les concepts Pluie et Accident dans la carte CM1 de l'exemple 2.1. Il y a deux chemins permettant de lier Pluie à Accident :*

$$p_1 = \{\textit{Pluie} \rightarrow \textit{Mauvaise visibilité} \rightarrow \textit{Accident}\}$$
$$p_2 = \{\textit{Pluie} \rightarrow \textit{Route glissante} \rightarrow \textit{Accident}\}$$

Ces deux chemins sont trivialement minimaux.

L'ensemble des chemins minimaux de Pluie vers Accident est donc $\mathcal{P}_{Pluie,Accident} = \{p_1, p_2\}$.

Au cours de ce mémoire, nous aurons besoin de la notion de parents d'un concept. L'ensemble des parents d'un concept est tout simplement l'ensemble des concepts parent de concept dans le graphe représentant la carte cognitive. La notion de *parents d'un concept* désigne donc l'ensemble des concepts qui influencent directement ce concept.

Définition 2.4 (Parents d'un concept)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive. Soit* $c \in C$ *un concept.*
Les parents de c *sont :*

$$\mathcal{C}(c) = \{c' \in C \ / \ (c', c) \in A\}$$

Exemple 2.3. *Dans la carte cognitive CM1 (exemple 2.1), les parents du concept Route sinueuse sont Autoroute et Route. Le concept Pluie n'a pas de parent.*

2.1.2 Influence propagée sur un chemin

Le calcul de l'*influence propagée sur un chemin d'influence* consiste à agréger les valeurs portées par les différentes influences qui composent ce chemin. Cette agrégation dépend bien évidemment de l'ensemble de valeurs sur lequel est définie la carte cognitive. Pour un ensemble de valeurs donné, il est également possible de définir cet opérateur de calcul de différentes manières.

Le calcul de l'influence propagée sur un chemin est défini ici, pour l'ensemble de valeurs $[-1; 1]$, comme étant un produit des valeurs d'influence composant ce chemin. Le produit permet de généraliser les opérateurs définis par Robert Axelrod [Axelrod, 1976] pour l'ensemble de valeurs $[-1; 1]$. En associant la valeur $+$ à 1 et la valeur $-$ à -1, on retrouve en effet la même influence propagée sur un chemin.

Définition 2.5 (Influence propagée sur un chemin pour $[-1; 1]$**)**
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive définie sur l'ensemble de valeurs* $I = [-1; 1]$*. Soit* P *un chemin d'influence liant deux concepts de* CM*.*
*L'*influence propagée sur P *est :*

$$\mathcal{IP}(P) = \prod_{i=0}^{k-1} \text{label}\Big((u_i, u_{i+1})\Big)$$

Exemple 2.4. *On calcule les influences propagées sur les chemins* p_1 *et* p_2 *définis dans l'exemple 2.2 :*

$$\mathcal{IP}(p_1) = \times \begin{cases} \text{label}\Big((\textit{Pluie}, \textit{Mauvaise visibilité})\Big) \\ \text{label}\Big((\textit{Mauvaise visibilité}, \textit{Accident})\Big) \end{cases} = \times \begin{cases} 0.5 \\ 0.7 \end{cases} = 0.35$$

$$\mathcal{IP}(p_2) = \times \begin{cases} \text{label}\Big((\textit{Pluie}, \textit{Route glissante})\Big) \\ \text{label}\Big((\textit{Route glissante}, \textit{Accident})\Big) \end{cases} = \times \begin{cases} 0.2 \\ 0.8 \end{cases} = 0.16$$

2.1.3 Influence propagée d'un concept sur un autre

Le calcul de l'*influence propagée d'un concept sur un autre* consiste à agréger les influences propagées sur les différents chemins qui permettent de lier ce concept à l'autre. Cette agrégation dépend elle aussi de l'ensemble de valeurs sur lequel est définie la carte cognitive et il est aussi possible de définir cette agrégation de différentes manières pour un même ensemble de valeurs.

Pour l'ensemble de valeurs $[-1;1]$, nous définissons ici l'influence propagée d'un concept sur un autre comme étant une moyenne des influences propagées sur les différents chemins qui permettent de lier ce concept à l'autre. Cette définition permet de quantifier la valeur ambiguë (?) qui apparaissait avec les opérateurs de R. Axelrod.

Définition 2.6 (Influence propagée d'un concept sur un autre sur $[-1;1]$**)** *Soit* $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive définie sur l'ensemble de valeurs* $I = [-1;1]$. *Soient* $c_1, c_2 \in C$ *deux concepts de* CM.
*L'*influence propagée de c_1 sur c_2 *est une fonction* $\mathcal{I}\colon C \times C \to [-1;1]$ *telle que :*

$$\mathcal{I}(c_1, c_2) = \begin{cases} 0 & si\ \mathcal{P}_{c_1,c_2} = \emptyset \\ \frac{1}{|\mathcal{P}_{c_1,c_2}|} \times \sum\limits_{P \in \mathcal{P}_{c_1,c_2}} \mathcal{IP}(P) & sinon \end{cases}$$

Il faut noter qu'ici, la sémantique de la valeur 0 est légèrement différente par rapport au cas où elle est portée par une influence. En effet, dans le cas d'une influence directe, elle signifie qu'il n'y a pas d'influence directe entre ces deux concepts. Ici, elle signifie que globalement, en considérant l'ensemble de la carte, il n'y a pas d'influence entre ces deux concepts.

Exemple 2.5. *On calcule l'influence propagée de Pluie sur Accident dans CM1 grâce aux influences propagées sur les chemins calculées dans l'exemple 2.5.*

$$\mathcal{I}(c_1, c_2) = \frac{1}{|\mathcal{P}_{Pluie,Accident}|} \times \Big(\mathcal{IP}(p_1) + \mathcal{IP}(p_2)\Big) = \frac{1}{2} \times (0.35 + 0.16) = 0.255$$

2.2 Carte cognitive taxonomique

Dans les différents chapitres qui composent cette thèse, nous aurons besoin d'un modèle de carte qui étend le modèle classique des cartes cognitives, le modèle des cartes cognitives taxonomiques. Ce modèle est celui des cartes cognitives ontologiques défini par L. Chauvin [Chauvin *et al.*, 2011] dans lequel le terme d'« ontologie » est remplacé par celui de « taxonomie ».

Dans un premier temps, nous définissons donc la notion de taxonomie dans la section 2.2.1, puis la notion de carte cognitive taxonomique en introduisant l'opérateur d'influence taxonomique associé dans la section 2.2.2.

2.2.1 Taxonomie

L'intérêt de la taxonomie est de regrouper plusieurs concepts d'une carte cognitive au sein d'un autre concept plus général. Un tel procédé permet ainsi par exemple de simplifier une carte cognitive en en réalisant une vue, comme expliqué dans la section 2.3. Dans un premier temps, nous allons définir cette taxonomie, puis différents opérateurs sur cette taxonomie qui nous seront utiles pour des définitions ultérieures.

Formellement, une *taxonomie* associe à un ensemble de concepts une relation d'ordre partiel de simple héritage. Une taxonomie peut donc être représentée par un ensemble d'arborescences.

Définition 2.7 (Taxonomie)
Soit C un ensemble de concepts.
Une taxonomie $T = (C, \leq)$ *est un ensemble d'arborescences de concepts représentant une relation d'ordre partiel* $\leq$.

La relation d'ordre d'une taxonomie étant une relation d'héritage, elle peut être interprétée comme étant une relation *est une sorte de*.

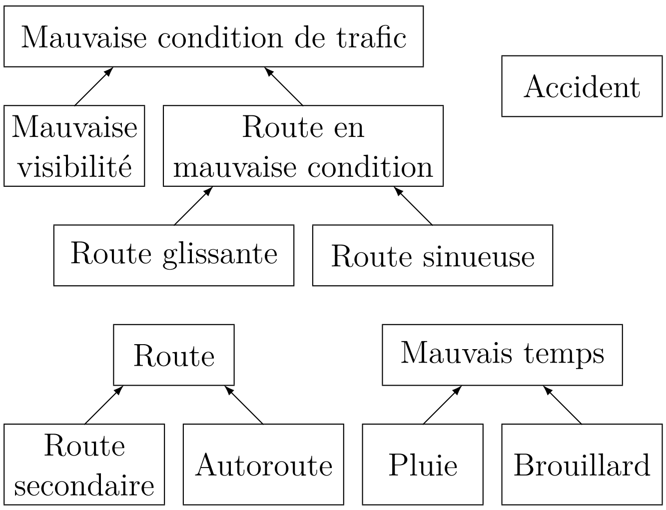


FIGURE 2.2 – La taxonomie de concepts *T1*.

Exemple 2.6. *T1 (figure 2.2) est une taxonomie ordonnant des concepts. La relation d'ordre partiel $\leq$ y est représentée par des liens fléchés. On peut par exemple y lire que la* Pluie *et le* Brouillard *sont des sortes de* Mauvais temps.

Nous définissons à présent quelques notions liées à la taxonomie qui nous seront utiles dans les définitions à venir. Nous définissons ainsi la notion de comparabilité. Intuitivement, deux concepts sont *comparables* si l'un est plus petit que l'autre. Deux concepts sont *incomparables* s'ils ne sont pas comparables.

Définition 2.8 (Concepts comparables)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie. Soient $c_1, c_2 \in C$ deux concepts ordonnés par T.
c_1 et c_2 sont dits comparables, *noté $c_1 \perp c_2$, ssi $(c_1 \leq c_2) \vee (c_2 \leq c_1)$.*
c_1 et c_2 sont dits incomparables, *noté $c_1 \parallel c_2$, ssi $\neg(c_1 \perp c_2)$.*

Exemple 2.7. *En reprenant la taxonomie T1 (exemple 2.6),* Route glissante *et* Mauvaise condition de trafic *sont comparables. En revanche,* Mauvais temps *et* Mauvaise visibilité *sont incomparables. On peut par ailleurs noter que* Accident *est incomparable avec tous les concepts ordonnés par T1, sauf avec lui-même.*

Les concepts *minimaux* d'un ensemble de concepts par rapport à une taxonomie sont les concepts les plus petits par rapport à cette taxonomie. On définit de la même manière les concepts *maximaux* d'un ensemble de concepts comme étant les concepts les plus grands.

Définition 2.9 (Concepts minimaux & maximaux)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie de concepts C. Soit $C' \subseteq C$ un ensemble de concepts ordonnés par T.
Les concepts minimaux de C' par rapport à T *sont :*

$$\min_{\mathrm{T}}(C') = \{c \in C' \ / \ \forall c' \in C', c' \leq c \Rightarrow c = c'\}$$

De la même manière, les concepts maximaux de C' par rapport à T *sont :*

$$\max_{\mathrm{T}}(C') = \{c \in C' \ / \ \forall c' \in C', c \leq c' \Rightarrow c = c'\}$$

Exemple 2.8. *On considère l'ensemble de concepts* {*Pluie, Brouillard, Mauvais temps, Mauvaise condition de trafic, Mauvaise visibilité, Autoroute, Accident*}*.*
Les concepts minimaux de cet ensemble par rapport à T1 (exemple 2.6) sont :

{*Pluie*, *Brouillard*, *Mauvaise visibilité*, *Autoroute*, *Accident*}

Les concepts maximaux de cet ensemble par rapport à T1 sont :

{*Mauvais temps*, *Mauvaise condition de trafic*, *Autoroute*, *Accident*}

Les concepts *élémentaires* d'une taxonomie sont les concepts les plus petits de cette taxonomie. Ce sont les concepts les plus spécialisés, c'est-à-dire ceux pour lesquels il n'y a pas de concept plus petit dans la taxonomie. Ce sont donc les feuilles des arbres représentant la relation d'héritage.

Définition 2.10 (Concepts élémentaires d'une taxonomie)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie de concepts.
Les concepts élémentaires *de T sont* $\mathrm{elem}(T) = \min_{\mathrm{T}}(C)$.

Les concepts élémentaires pour un concept selon une taxonomie sont les concepts élémentaires plus petits que ce concept dans cette taxonomie.

Définition 2.11 (Concepts élémentaires pour un concept)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie de concepts et $c \in C$ un concept.
L'ensemble des concepts élémentaires pour c selon T *est un sous-ensemble de* $\mathrm{elem}(T)$ *tel que :*

$$\mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(c) = \{c' \in \mathrm{elem}(T) \ / \ c' \leq c\}$$

Exemple 2.9. *Les concepts élémentaires de T1 sont représentés doublement encadrés sur la figure 2.3.*

Les concepts élémentaires pour Mauvaise condition de trafic *sont* {*Mauvaise visibilité, Route sinueuse, Route glissante*}*.*

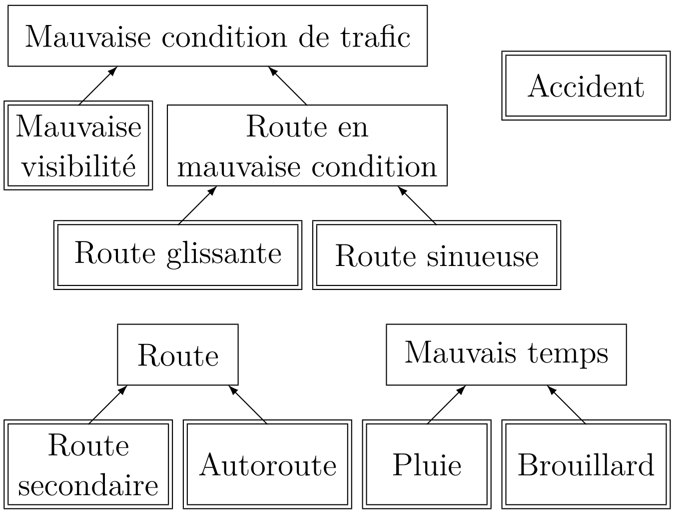


FIGURE 2.3 – Concepts élémentaires de *T1*.

2.2.2 Influence taxonomique

L'influence taxonomique consiste à calculer l'influence d'un concept ordonné par la taxonomie sur un autre concept de la taxonomie par rapport à une carte cognitive. Pour calculer cette influence, il faut donc tout d'abord lier une taxonomie à une carte cognitive.

Une *carte cognitive taxonomique* est l'association d'une carte cognitive et d'une taxonomie. Les concepts élémentaires de la taxonomie sont les concepts de la carte cognitive.

Définition 2.12 (Carte cognitive taxonomique)
Une carte cognitive taxonomique TM *définie sur un ensemble de valeurs* I *est l'association d'une taxonomie* $T = (C, \leq)$ *et d'une carte cognitive* $(\mathrm{elem}(T), A, \mathrm{label})$ *définie sur* I*.*

Exemple 2.10. *TM1 est une carte cognitive taxonomique associant la taxonomie T1 (exemple 2.6) et la carte cognitive CM1 (exemple 2.1).*

L'*influence taxonomique* d'un concept d'une taxonomie sur un autre est une agrégation des influences propagées de tous les couples possibles constitués des concepts élémentaires pour le premier concept et ceux pour le second. Le calcul de l'influence taxonomique d'un concept sur un autre pour l'ensemble de valeurs $[-1; 1]$ est défini ici comme étant un intervalle entre la plus petite influence propagée des couples de concepts élémentaires et la plus grande.

Définition 2.13 (Influence taxonomique d'un concept sur un autre)
Soit $T = (C, \leq)$ *une taxonomie. Soit* $TM = (\mathrm{elem}(T), A, \mathrm{label})$ *une carte cognitive taxonomique associée à* T *définie sur* $[-1; 1]$*. Soient* $c_1, c_2 \in C$ *deux concepts ordonnés par* T*.*
*L'*influence taxonomique de c_1 sur c_2 *est une fonction* $\mathcal{I}_{\mathrm{T}} \colon C \times C \to \mathcal{P}\Big([-1; 1]\Big)$

telle que :

$$\mathcal{I}_{\mathrm{T}}(c_1, c_2) = \left[\min_{\substack{c'_1 \in \mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(c_1) \\ c'_2 \in \mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(c_2)}} \mathcal{I}(c'_1, c'_2) \; ; \max_{\substack{c'_1 \in \mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(c_1) \\ c'_2 \in \mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(c_2)}} \mathcal{I}(c'_1, c'_2) \right]$$

Exemple 2.11. *On considère les concepts Mauvais temps et Mauvaise condition de trafic dans la carte cognitive TM1 (exemple 2.10). Les concepts élémentaires pour Mauvais temps sont {Pluie, Brouillard}. Ceux pour Mauvaise condition de trafic ont déjà été énoncés dans l'exemple 2.9. On calcule les influences propagées de chacun des couples de concepts élémentaires de Mauvais temps sur Mauvaise condition de trafic.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\textit{Brouillard}, \textit{Mauvaise visibilité}) &= 0.9 \\
\mathcal{I}(\textit{Brouillard}, \textit{Route glissante}) &= 0 \\
\mathcal{I}(\textit{Brouillard}, \textit{Route sinueuse}) &= 0 \\
\mathcal{I}(\textit{Pluie}, \textit{Mauvaise visibilité}) &= 0.5 \\
\mathcal{I}(\textit{Pluie}, \textit{Route glissante}) &= 0.2 \\
\mathcal{I}(\textit{Pluie}, \textit{Route sinueuse}) &= 0
\end{aligned}$$

L'influence taxonomique de Mauvais temps sur Mauvaise condition de trafic est alors :

$$\mathcal{I}_{\mathrm{T}}(\textit{Mauvais temps}, \textit{Mauvaise condition de trafic}) = [0; 0.9]$$

Utiliser un intervalle permet d'avoir une valeur synthétique représentant les valeurs possibles des influences propagées entre les concepts élémentaires. Un intervalle dont les bornes sont proches permet également de conclure que les influences propagées entre les concepts élémentaires sont homogènes, c'est-à-dire que les influences entre les concepts regroupés sont semblables. Au contraire, un intervalle dont les bornes sont éloignées signifie que les influences propagées sont hétérogènes.

2.3 Vue d'une carte cognitive taxonomique

Le mécanisme de vue a été formellement défini par L. Chauvin dans sa thèse [Chauvin, 2009]. Il permet de simplifier une carte cognitive en rassemblant plusieurs concepts d'une carte au sein d'un concept regroupant à l'aide d'une ontologie. Les influences entre les concepts de la carte originelle doivent être réaffectées aux concepts les regroupant et leurs valeurs calculées en fonction des influences qu'elles représentent. Pour sélectionner quels concepts de la carte cognitive seront présents dans la vue, l'utilisateur souhaitant réaliser cette vue doit choisir une échelle. Cette échelle représente le degré de détail qu'il souhaite obtenir dans la vue finale. Nous redéfinissons ici les notions d'échelle dans la section 2.3.1 et de vue dans la section 2.3.2 en utilisant la notion de taxonomie. Nous montrons enfin comment construire une vue adaptée à un usage particulier dans la section 2.3.3.

2.3.1 Échelle

Une *échelle* est l'ensemble des concepts qui seront présents dans la vue. Par conséquent, cette échelle doit respecter certaines contraintes. D'une part, les concepts d'une échelle doivent être incomparables entre eux pour s'assurer qu'un même concept ne sera pas représenté deux fois dans la vue. D'autre part, une échelle doit être représentative des concepts de la carte cognitive. Un ensemble de concepts est *représentatif* d'un autre ensemble de concepts par rapport à une taxonomie les ordonnant si chaque concept du second ensemble a au moins un représentant dans le premier. Un concept *représente* un autre concept s'il lui est comparable.

De la notion de comparabilité (définition 2.8), nous définissons trivialement la notion d'*ensemble de concepts incomparables*.

Définition 2.14 (Ensemble de concepts incomparables)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie. Soit $C' \subseteq C$ un ensemble de concepts ordonnés par T.
C' est un ensemble de concepts incomparables *ssi* $\forall c_1, c_2 \in C', c_1 \neq c_2 \Rightarrow c_1 \parallel c_2$.

Exemple 2.12. *On considère les trois ensembles de concepts suivants :*

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left\{\textit{Mauvaise visibilité}, \textit{Route}, \textit{Mauvais temps}, \textit{Accident}\right\} \\
C_2 &= \left\{\begin{matrix}\textit{Mauvaise condition de trafic}, \textit{Route}, \\ \textit{Autoroute}, \textit{Mauvais temps}, \textit{Accident}\end{matrix}\right\} \\
C_3 &= \left\{\begin{matrix}\textit{Mauvaise visibilité}, \textit{Route en mauvaise condition}, \\ \textit{Route secondaire}, \textit{Autoroute}, \textit{Mauvais temps}, \textit{Accident}\end{matrix}\right\}
\end{aligned}$$

C_1 et C_3 sont des ensembles de concepts incomparables selon T1 (exemple 2.6). En revanche, C_2 n'est pas un ensemble de concepts incomparables puisque Autoroute *$\leq$ Route.*

Pour vérifier simplement la représentativité, nous allons vérifier que l'ensemble des concepts élémentaires pour tous les concepts du premier ensemble inclut les concepts élémentaires du second.

Avant toute chose, il faut donc définir ce que sont les *concepts élémentaires pour un ensemble de concepts*.

Définition 2.15 (Concepts élémentaires pour un ensemble de concepts)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie. Soit $C' \subseteq C$ un ensemble de concepts ordonnés par T.
*L'*ensemble de concepts élémentaires pour *C' est :*

$$\mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(C') = \bigcup_{c \in C'} \mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(c)$$

Remarque. Pour une taxonomie $T = (C, \leq)$, $\mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(C) = \min_{\mathrm{T}}(C)$.

Exemple 2.13. *On considère l'ensemble de concepts* {Mauvaise visibilité, Mauvaise route} *ordonnés par la taxonomie T1 (exemple 2.6). L'ensemble des concepts élémentaires pour cet ensemble est* {Mauvaise visibilité, Route glissante, Route sinueuse}*.*

À présent, la notion d'ensemble représentatif est facile à définir.

Définition 2.16 (Ensemble représentatif d'un autre ensemble)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie. Soient $C_1, C_2 \subseteq C$ deux ensembles de concepts ordonnés par T.
C_1 *est un* ensemble représentatif de C_2 *ssi* $\mathrm{elemPour_T}(C_2) \subseteq \mathrm{elemPour_T}(C_1)$.

Exemple 2.14. *Avec T1 (exemple 2.6), l'ensemble de concepts* {Mauvaise visibilité, Mauvaise route} *est représentatif de* {Mauvaise condition de trafic}*. En effet, les concepts élémentaires pour* {Mauvaise condition de trafic} *(*{Mauvaise visibilité, Route glissante, Route sinueuse}*) sont, étant égaux, inclus dans ceux de* {Mauvaise visibilité, Mauvaise route} *qui ont déjà été calculés dans l'exemple 2.13.*

On reprend les trois ensembles de concepts de l'exemple 2.12. De la même manière, on peut montrer que C_2 et C_3 sont représentatifs des concepts élémentaires de T. En revanche, C_1 n'est pas représentatif des concepts élémentaires de T puisque Route glissante *et* Route sinueuse *ne trouvent pas de représentant dans C_1.*

Une *échelle* est un ensemble de concepts incomparables et représentatif des concepts d'une carte. Les concepts d'une carte taxonomique étant les concepts élémentaires de cette taxonomie, une échelle doit donc être représentative des concepts ordonnés par la taxonomie.

Définition 2.17 (Échelle)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie. Soit $C' \subseteq C$ un ensemble de concepts ordonnés par T.
C' *est une* échelle pour T *ssi :*

- *C' est un ensemble de concepts incomparables ;*
- *C' est représentatif de C.*

Exemple 2.15. *On reprend à nouveau les ensembles de concepts de l'exemple 2.12. Comme déjà montré aux exemples 2.12 et 2.14, C_1 est un ensemble de concepts incomparables mais non représentatif de T1 : C_1 n'est donc pas une échelle. C_2 est représentatif mais ses concepts ne sont pas incomparable : C_2 n'est donc pas une échelle non plus. En revanche, C_3 est un ensemble de concepts incomparables et représentatif des concepts de T1 : C_3 est donc une échelle pour T1.*

2.3.2 Vue pour une échelle

Maintenant que nous disposons des concepts de la vue sous la forme d'une échelle, on est en mesure de construire cette vue. Pour cela, il faut déterminer quelles seront les influences entre les concepts ainsi que les valeurs de ces influences.

Pour définir ces influences, on cherche à connaître les couples de concepts connectés dans une carte taxonomique. Deux concepts d'une taxonomie sont *connectés* dans une carte cognitive taxonomique s'il existe un concept élémentaire pour chacun d'entre eux liés par une influence dans la carte.

Définition 2.18 (Connexion entre deux concepts)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie. Soit $TM = (\mathrm{elem}(T), A, \mathrm{label})$ une carte cognitive

taxonomique associée à T. Soient $c_1, c_2 \in C$ deux concepts ordonnés par T.
c_1 et c_2 sont connectés dans *TM ssi* $\exists c'_1 \in \mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(c_1), \exists c'_2 \in \mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(c_2)$ / $(c_1, c_2) \in A$.

Exemple 2.16. *Dans TM1 (exemple 2.10), les concepts Mauvais temps et Mauvaise condition de trafic sont connectés selon TM1 car leurs concepts élémentaires respectifs Pluie et Route glissante sont directement liés par une influence dans la carte.*

Dans la *vue*, les concepts sont ceux de l'échelle. On place une influence entre chaque couple de concepts connectés. La valeur de ces influences est l'influence taxonomique entre ces concepts. Cependant, si les deux concepts aux extrémités de cette influence sont des concepts élémentaires, alors cela signifie qu'il existe déjà une influence entre ces deux concepts dans la carte originale. Dans une telle situation, la valeur de cette influence originale est plus pertinente que celle de l'influence taxonomique et elle est donc conservée dans la vue.

Définition 2.19 (Vue d'une carte taxonomique)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie. Soit $TM = (\mathrm{elem}(T), A, \mathrm{label})$ une carte cognitive taxonomique associée à T définie sur un ensemble de valeurs I. Soit C' une échelle pour T.
Une vue de *TM* pour *C' est une carte cognitive $(C', A', \mathrm{label}')$ définie sur $I \cup \mathcal{P}(I)$ où :*

- $A' = \{(c_1, c_2)$ / $c_1, c_2 \in C' \wedge c_1$ *et* c_2 *sont connectés dans* $TM\}$;
- $\mathrm{label}'((c_1, c_2)) = \begin{cases} \mathrm{label}\big((c_1, c_2)\big) & \textit{si } (c_1, c_2) \in A \\ \mathcal{I}_{\mathrm{T}}(c_1, c_2) & \textit{sinon} \end{cases}$

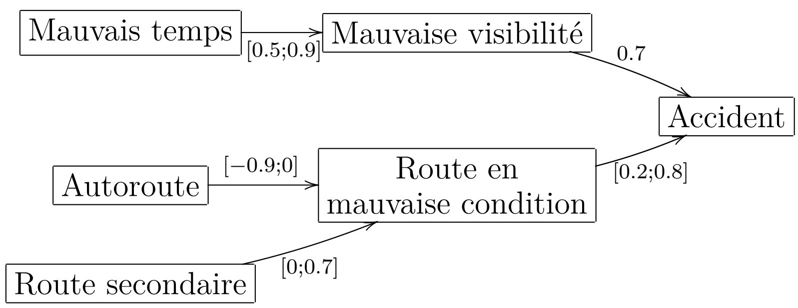


FIGURE 2.4 – Vue de *TM1* pour l'échelle C_3.

Exemple 2.17. *La carte cognitive de la figure 2.4 est une vue de TM1 (exemple 2.10) pour l'échelle $C_3 = \{$Mauvaise visibilité, Route en mauvaise condition, Route secondaire, Autoroute, Mauvais temps, Accident$\}$.*

2.3.3 Vues adaptées

Une vue d'une carte cognitive adaptée à un utilisateur est tout simplement une simplification de la carte originale détaillant en priorité les informations pertinentes. Ceci permet d'obtenir une vue dédiée à un usage particulier.

Pour adapter une vue à un usage particulier, on a besoin de définir une échelle qui correspond à un certain *profil d'utilisateur*. Un profil est tout simplement une échelle pour une taxonomie.

Définition 2.20 (Profil d'utilisateur)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie.
Un profil d'utilisateur P_u *est une échelle pour* T.

Exemple 2.18. *On considère à nouveau la taxonomie T1 (exemple 2.6). Le profil* $P_m = \{$*Brouillard, Pluie, Route, Mauvaise condition de trafic*$\}$ *est un profil pour l'utilisateur « météorologiste ».*

On définit trivialement la *vue pour un profil* comme étant la vue de l'échelle représentée par le profil.

Définition 2.21 (Vue pour un profil)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie. Soit $TM = (\mathrm{elem}(T), A, \mathrm{label})$ une carte cognitive taxonomique associée à T définie sur un ensemble de valeurs I. Soit P_u un profil d'utilisateur.
Une vue de TM pour le profil P_u *est la vue de TM pour P_u.*

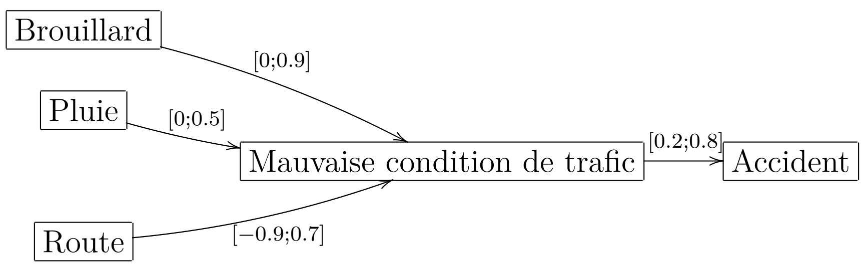


FIGURE 2.5 – Vue de *TM1* pour le profil P_m.

Exemple 2.19. *La carte cognitive de la figure 2.5 est une vue de TM1 (exemple 2.10) adaptée à l'usage de l'utilisateur « météorologiste » (exemple 2.18).*

Lorsque plusieurs utilisateurs souhaitent partager une même carte pour travailler ensemble, une vue partagée doit être construite de telle manière qu'elle soit adaptée à tous les usages. Pour cela, on définit une nouvelle échelle basée sur les concepts partagés par les différents profils. Cet ensemble de concepts partagés est tout simplement l'union des ensembles de concepts représentés par les profils à laquelle on applique un min de sorte à fournir les concepts les plus spécialisés qui intéressent au moins un utilisateur. De plus, ceci nous permet de nous assurer que cet ensemble de concepts est bien une échelle.

Définition 2.22 (Concepts partagés)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie. Soit $TM = (\mathrm{elem}(T), A, \mathrm{label})$ une carte cognitive taxonomique associée à T définie sur un ensemble de valeurs I. Soit $P = \{P_{u_1}, \ldots, P_{u_n}\}$ un ensemble de profils d'utilisateurs.
*L'*ensemble des concepts partagés *pour les profils $P_{u_1}, \ldots, P_{u_n}$ est :*

$$\mathrm{ConceptsPartagés}(P) = \min(\bigcup_{P_{u_i} \in P} P_{u_i})$$

L'ensemble des concepts partagés d'un ensemble de profils étant une échelle, on peut aisément construire une vue basée sur cet ensemble.

Définition 2.23 (Vue partagée)
Soit $T = (C, \leq)$ *une taxonomie. Soit* $TM = (\mathrm{elem}(T), A, \mathrm{label})$ *une carte cognitive taxonomique associée à* T *définie sur un ensemble de valeurs* I*. Soit* $P = \{P_{u_1}, \dots, P_{u_n}\}$ *un ensemble de profils d'utilisateurs.*
Une vue partagée de TM pour P *est la vue de* TM *pour* ConceptsPartagés(P)*.*

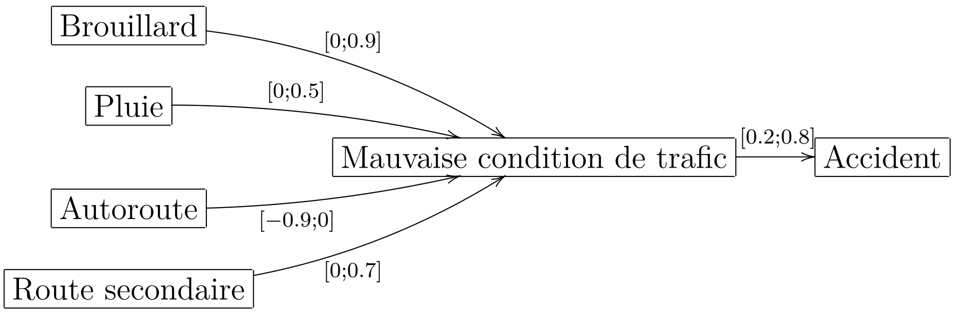


FIGURE 2.6 – Vue de *TM1* pour les profils P_m et P_r.

Exemple 2.20. *On définit le profil « constructeur de route »* P_r = {*Autoroute, Route secondaire, Mauvais temps, Mauvaise condition de trafic, Accident*} *pour T1 (exemple 2.6). La carte cognitive de la figure 2.6 représente une vue partagée de TM1 (exemple 2.10) de pour les profils « météorologiste » (exemple 2.18) et « constructeur de route ».*

Dans sa thèse, L. Chauvin décrit différents mécanismes d'autres types de vues, comme les vues pour un ensemble de concepts sélectionnés ou les vues d'une influence. Nous ne détaillerons pas ici ces mécanismes, bien qu'ils puissent tout à fait s'appliquer à notre modèle.

2.4 Paramétrage

Dans cette section, nous discutons de la manière d'adapter nos définitions pour d'autres ensembles de valeurs que $[-1;1]$. À noter qu'on peut définir de différentes manières les opérateurs de calcul d'influence propagée sur un chemin, d'influence propagée d'un concept sur un autre et d'influence taxonomique pour ce même ensemble $[-1;1]$. Ce n'est pas l'objet de la discussion ici : le paramétrage concerne uniquement l'application du modèle à d'autres ensembles de valeurs. La discussion sur la sémantique des valeurs et l'adaptation des opérateurs en conséquence est davantage étayée dans le chapitre 5.

Nous discutons dans un premier temps des différents manières de définir la notion de chemin minimal dans la section 2.4.1. Puis nous montrons comment adapter les opérateurs d'influence pour l'ensemble de valeurs $\{+, -\}$ dans la section 2.4.2. Nous faisons de même pour l'ensemble de valeurs $\{nul < faible < moyen < fort\}$ dans la section 2.4.3.

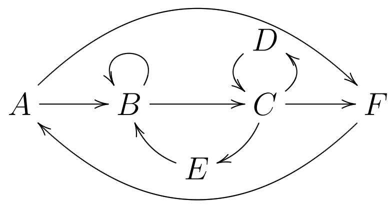


FIGURE 2.7 – Influences reliant un concept A à un concept F.

2.4.1 Chemins minimaux

Cette section discute de la possibilité d'adapter la définition de ce qu'est un chemin minimal en fonction de ce que l'utilisateur estime pertinent. On peut ainsi par exemple ignorer ou non les circuits ou encore limiter un chemin à un certain nombre d'influences.

Un chemin minimal peut être défini comme étant uniquement des influences directes. Une telle définition diminue l'intérêt du modèle des cartes cognitives puisque le calcul de l'influence propagée sur un chemin n'a plus d'intérêt, un chemin étant limité à une seule influence. Néanmoins, une telle définition permet d'indiquer qu'on ne considère que seules les informations fournies par le designer de la carte.

Définition 2.24 (Chemin minimal direct)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive. Soit* P *un chemin d'influence liant deux concepts de* CM *de longueur* k.
P *est* minimal *ssi* $k = 1$.

On peut étendre cette définition en définissant un chemin minimal liant deux concepts comme étant un chemin quelconque liant ces deux concepts, mais limité à une certaine longueur. En effet, on peut considérer que la pertinence de l'influence sur un chemin diminue avec sa longueur. [Christiansen, 2011] limite ainsi les chemins à 3 influences.

Définition 2.25 (Chemin minimal limité)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive. Soit* P *un chemin d'influence liant deux concepts de* CM *de longueur* k. *Soit* $K \in \mathbb{N}^*$ *une limite de taille de chemin.*
P *est* minimal *ssi* $k \leq K$.

Remarque. En posant $K = 1$, on retrouve la définition 2.24.

Exemple 2.21. *La figure 2.7 représente une carte cognitive simplifiée dans laquelle de nombreuses influences permettent de lier le concept* A *au concept* F.

Avec la définition classique de la notion de chemin minimal (définition 2.2), seuls 2 chemins sont minimaux : $A \to F$ *et* $A \to B \to C \to F$.

Avec la définition considérant uniquement les influences directes (définition 2.24), un seul chemin est minimal : $A \to F$.

Avec la définition limitant la taille des influences (définition 2.25), en posant $K = 3$, *les chemins minimaux sont :* $A \to F$, $A \to B \to C \to F$ *et* $A \to F \to A \to F$. *En posant* $K = 5$, *il y a 6 chemins minimaux supplémentaires parmi lesquels* $A \to B \to B \to C \to F$, $A \to B \to C \to D \to F$ *et* $A \to F \to A \to F \to A \to F$.

On peut définir un chemin minimal liant deux concepts comme étant un chemin quelconque liant ces deux concepts, mais dont chaque influence du chemin est unique. Une telle définition permet de s'assurer chaque influence d'un chemin n'est prise en compte qu'une seule fois lors du calcul de l'influence propagée sur ce chemin. Elle permet en outre à un chemin de passer plusieurs fois par le même concept à condition qu'il n'utilise pas la même influence.

Définition 2.26 (Chemin minimal avec influence unique)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive. Soit* P *un chemin d'influence liant deux concepts de* CM *de longueur* k*.*
P *est* minimal *ssi* $\forall i, j \in [0; k-1], i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j \vee u_{i+1} \neq u_{j+1}$.

Proposition 2.2. *L'ensemble des chemins minimaux obtenu par la définition 2.2 est inclus dans l'ensemble des chemins minimaux obtenu par la définition 2.26.*

Démonstration. Soit P un chemin minimal selon la définition 2.2. On a alors $\forall i, j \in [0; k-1], i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j \wedge u_{i+1} \neq u_{j+1}$ et donc trivialement $\forall i, j \in [0; k-1], i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j \vee u_{i+1} \neq u_{j+1}$.
P est donc minimal selon la définition 2.26. □

Exemple 2.22. *Nous considérons à nouveau la carte cognitive de la figure 2.7. Avec la définition basée sur l'influence unique (définition 2.26), nous ne listons pas l'intégralité des chemins minimaux car il y en a 13. On notera simplement que* $A \to B \to B \to C \to D \to C \to F$ *et* $A \to B \to C \to F \to A \to F$ *sont des chemins minimaux.* $A \to B \to C \to E \to B \to C \to F$ *n'en est pas un puisqu'il contient deux fois l'influence* (B, C) *(entre autres).*

Une définition autorisant davantage de chemins sans pour autant amener à avoir un ensemble infini de chemins minimaux est celle qui interdit à un chemin minimal de passer deux fois par le même circuit. Une telle définition permet de s'assurer chaque circuit d'un chemin n'est pris en compte qu'une seule fois lors du calcul de l'influence propagée sur ce chemin. Un *circuit* est un chemin qui commence et termine au même concept.

Définition 2.27 (Circuit)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive. Soit* P *un chemin d'influence liant deux concepts de* CM *de longueur* k*.*
P *possède un* circuit p *ssi* $\exists i, j \in [0; k], i \neq j \wedge u_i = u_j$.
On définit alors le circuit p *comme étant un chemin de longueur* $j - i$ *d'influences* (u'_l, u'_{l+1}) *telles que* $\forall l \in [0; j-i], u'_l = u_{i+l}$.
On note $i_p = i$ l'indice du circuit p dans le chemin P.

On définit alors un chemin minimal comme étant un chemin qui ne contient pas deux fois le même circuit.

Définition 2.28 (Chemin minimal avec circuit unique)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive. Soit* P *un chemin d'influence liant deux concepts de* CM *de longueur* k*.*
P *est* minimal *ssi* $\forall p, p'$ *circuits de* $P, p = p' \Rightarrow i_p = i_{p'}$.

Proposition 2.3. *L'ensemble des chemins minimaux obtenu par la définition 2.26 est inclus dans l'ensemble des chemins minimaux obtenu par la définition 2.28. De plus, ceux obtenus par la définition 2.2 y sont également inclus.*

Démonstration. Soit P un chemin minimal selon la définition 2.26. Soient p, p' deux circuits de P. On considère (u_{i_p}, u_{i_p+1}) la première influence de p et $(u'_{i'_p}, u'_{i'_p+1})$ la première influence de p'. Si $p = p'$, alors nécessairement $u_{i_p} = u'_{i'_p}$ et $u_{i_p+1} = u'_{i'_p+1}$. Selon la définition 2.26, on en déduit $i_p = i_{p'}$.
Par conséquent, P est minimal selon la définition 2.28. □

Concernant la seconde partie de la proposition, il suffit d'appliquer la proposition 2.2 qui spécifie que l'ensemble des chemins minimaux selon la définition 2.2 est inclus dans celui de la définition 2.26. On en déduit alors par la première partie de la proposition qu'ils sont également inclus dans l'ensemble des chemins minimaux de la définition 2.28. □

Exemple 2.23. *Nous considérons à nouveau la carte cognitive de la figure 2.7. Avec la définition basée sur le circuit unique (définition 2.28), il y a 585 chemins minimaux.* $A \to B \to C \to E \to B \to C \to F$ *est désormais un chemin minimal.* $A \to B \to C \to F \to A \to B \to C \to F$ *est également minimal puisque* $A \to B \to C \to F$*, bien qu'il apparaisse deux fois, n'est pas un circuit.* $A \to F \to A \to F$ *est aussi un chemin minimal mais* $A \to F \to A \to F \to A \to F$ *ne l'est pas puisque le circuit* $A \to F \to A$ *apparaît deux fois.*

Pour le calcul de l'influence propagée, certains chemins s'avèrent redondants. En effet, deux chemins passant exactement par les mêmes influences le même nombre de fois mais pas dans le même ordre sont considérés comme différents et peuvent donc apparaître tout deux dans l'ensemble des chemins minimaux. De tels chemins sont donc identiques à l'ordre des influences près. Si cet ordre n'a pas d'importance dans le calcul de l'influence propagée sur un chemin, ils auront donc la même influence propagée. Afin d'obtenir une valeur d'influence propagée d'un concept sur un autre plus pertinente, il peut être judicieux de supprimer de tels doublons.

Cependant, cette suppression peut amener à une valeur d'influence propagée d'un concept sur un autre différente de celle calculée sans cette suppression. Par exemple, avec une moyenne (définition 2.6), on divise par le nombre de chemins. Or, si on supprime des chemins, ce nombre sera forcément différent. La sémantique de l'opérateur peut donc être modifiée.

Si deux chemins sont identiques à l'ordre des influences près, un de ces chemins doit être supprimé, au choix. Un *ensemble de chemins minimaux ignorant l'ordre des influences* n'est donc pas unique.

Définition 2.29 (Chemins minimaux ignorant l'ordre des influences) *Soit* $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive. Soit* $\mathcal{P}_{c_1,c_2}$ *un ensemble de chemins minimaux. On note* $\text{influences}(P)$ *le multiensemble contenant les influences de* P*. Un ensemble de chemins* $\mathcal{P}'_{c_1,c_2}$ *est un* ensemble de chemins minimaux ignorant l'ordre des influences de $\mathcal{P}_{c_1,c_2}$ *si :*

- $\forall P \in \mathcal{P}_{c_1,c_2}, \exists P' \in \mathcal{P}'_{c_1,c_2}, \text{influences}(P) = \text{influences}(P')$ *;*

- $\forall P', P'' \in \mathcal{P}'_{c_1,c_2}, P' \neq P'' \Rightarrow \text{influences}(P') \neq \text{influences}(P'')$.

Proposition 2.4. *Avec la définition classique des chemins minimaux (définition 2.2), il n'y a jamais de chemins identiques à l'ordre des influences près.*

Démonstration. Soit $\mathcal{P}_{c_1,c_2}$ un ensemble de chemins minimaux entre deux concepts selon la définition 2.2.

Pour chaque $P \in \mathcal{P}_{c_1,c_2}$, il existe au moins un chemin P' tel que $\text{influences}(P) = \text{influences}(P')$, qui est P lui-même. La première condition est donc vérifiée.

Soient $P, P' \in \mathcal{P}_{c_1,c_2}$ tels que $\text{influences}(P) = \text{influences}(P')$. D'après la proposition 2.2, on sait qu'il n'y a pas deux fois la même influence dans P ou dans P'. Par conséquent, on en déduit que P et P' sont d'une même longueur $k = |\text{influences}(P)|$. On cherche à montrer par récurrence que pour tout concept u_i de P et pour tout concept u'_i de P', on a $u_i = u'_i$ avec $i \in [0; k]$.
On considère u_0 et u'_0. Puisque P et P' sont des chemins de c_1 vers c_2, par définition, $u_0 = u'_0 = c_1$.
On suppose qu'on a $u_i = u'_i$ avec $i \in [0; k-1]$. On cherche à montrer $u_i = u'_i \Rightarrow u_{i+1} = u'_{i+1}$. On considère les influences (u_i, u_{i+1}) et (u'_i, u'_{i+1}). (u'_i, u'_{i+1}) est également une influence P puisque $\text{influences}(P) = \text{influences}(P')$. On ne connaît cependant pas son emplacement dans P. On la note (u_j, u_{j+1}) telle que $u_j = u'_i$ et $u_{j+1} = u'_{i+1}$. On a donc $u_i = u_j$. D'après la définition 2.2, $u_i = u_j \vee u_{i+1} = u_{j+1} \Rightarrow i = j$. On en déduit donc que $i = j$. Puisque $i = j$, $u_{i+1} = u_{j+1}$ et par conséquent, $u_{i+1} = u'_{i+1}$.
On a $u_0 = u'_0$ et $\forall i \in [0; k-1], u_i = u'_i \Rightarrow u_{i+1} = u'_{i+1}$. Par récurrence, on a donc $\forall i \in [0; k], u_i = u'_i$. Les deux séquences sont donc équivalentes et par conséquent, $P = P'$. La seconde condition est donc vérifiée. □

Exemple 2.24. *Nous considérons à nouveau la carte cognitive de la figure 2.7. En utilisant la définition 2.29 pour supprimer les chemins équivalents, le nombre de chemins minimaux avec un circuit unique tombe à 69. Ainsi, quand $A \to B \to B \to C \to E \to B \to C \to F$ et $A \to B \to C \to E \to B \to B \to C \to F$ étaient considérés comme deux chemins différents, maintenant, seul l'un des deux sera conservé.*

2.4.2 Définitions des opérateurs d'influence pour $\{+, -\}$

Pour appliquer nos opérateurs pour l'ensemble de valeurs $\{+, -\}$, nous utilisons les opérateurs définis par R. Axelrod [Axelrod, 1976]. Une influence d'un concept sur un autre portant la valeur $+$ signifie simplement que le premier concept influence positivement le second. Inversement, la valeur $-$ signifie qu'il l'influence négativement.

Exemple 2.25. *La carte cognitive CM2 de la figure 2.8 est identique à la carte cognitive CM1 (exemple 2.1) mais définie sur l'ensemble de valeurs $\{+, -\}$.*

Influence propagée sur un chemin

L'influence propagée sur un chemin est définie selon un opérateur spécial, $\wedge$. Cette définition est équivalente à l'application de la définition 2.5 pour une carte cognitive

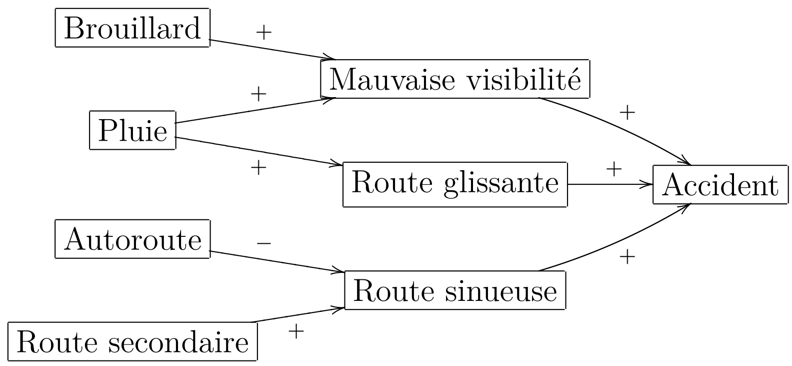


FIGURE 2.8 – La carte cognitive *CM2* définie sur $\{+,-\}$.

utilisant uniquement les valeurs -1 et 1.

Définition 2.30 (Influence propagée sur un chemin pour $\{+,-\}$)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive définie sur l'ensemble de valeurs* $I = \{+,-\}$*. Soit* P *un chemin d'influence liant deux concepts de* CM*.*
*L'*influence propagée sur P *est :*

$$\mathcal{IP}(P) = \bigwedge_{i=0}^{k-1} \text{label}\big((u_i, u_{i+1})\big)$$

avec $\wedge$ *un opérateur commutatif et associatif défini sur* $\{+,-\}$ *tel que :*

$\wedge$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Influence propagée d'un concept sur un autre

L'influence propagée d'un concept sur un autre introduit deux nouvelles valeurs. On rappelle la signification de ces valeurs, déjà expliquée dans la section 1.4.2 :

- la valeur nulle 0 indique qu'il n'y a aucun chemin d'influence entre les deux concepts ;
- la valeur ambiguë ? indique que l'influence entre les deux concepts est soit positive, soit négative.

Définition 2.31 (Influence propagée d'un concept sur un autre pour $\{+,-\}$)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive définie sur l'ensemble de valeurs* $I = \{+,-\}$*. Soient* $c_1, c_2 \in C$ *deux concepts de* CM*.*
*L'*influence propagée de c_1 sur c_2 *est une fonction* $\mathcal{I}\colon C \times C \to \{+,0,-,?\}$ *telle que :*

$$\mathcal{I}(c_1, c_2) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \mathcal{P}_{c_1,c_2} = \emptyset \\ \bigvee\limits_{P \in \mathcal{P}_{c_1,c_2}} \mathcal{IP}(P) & \textit{sinon} \end{cases}$$

avec $\vee$ *un opérateur commutatif et associatif défini sur* $\{+,0,-,?\}$ *tel que :*

$\vee$	$+$	$-$	$?$
$+$	$+$	$?$	$?$
$-$	$?$	$-$	$?$
$?$	$?$	$?$	$?$

La valeur 0 associée à $\{+,-\}$ n'a pas la même sémantique que celle de l'intervalle $[-1;1]$ mais a celle décrite dans la section 2.1.3. Elle signifie qu'il n'y a pas d'influence globale entre deux concepts.

Exemple 2.26. *On reprend les concepts Pluie et Accident de l'exemple 2.2. L'influence propagée de Pluie sur Accident dans CM2 (exemple 2.25) est :*

$$\mathcal{I}(\mathit{Pluie}, \mathit{Accident}) = \mathcal{IP}(p_1) \vee \mathcal{IP}(p_2) = (+ \wedge +) \vee (+ \wedge +) = + \vee + = +$$

Influence taxonomique

L'influence taxonomique introduit elle aussi deux nouvelles valeurs d'influence entre deux concepts [Chauvin *et al.*, 2008] :

- la valeur $\oplus$ indique que l'influence est positive ou nulle ;
- la valeur $\ominus$ indique que l'influence est négative ou nulle.

Définition 2.32 (Influence taxonomique d'un concept sur un autre pour $\{+,-\}$)
Soit $T = (C, \leq)$ une taxonomie. Soit $TM = (\mathrm{elem}(T), A, \mathrm{label})$ une carte cognitive taxonomique associée à T définie sur $\{+,-\}$. Soient $c_1, c_2 \in C$ deux concepts ordonnés par T.
*L'*influence taxonomique de c_1 sur c_2 *est une fonction* $\mathcal{I}_{\mathrm{T}} \colon C \times C \to \{+, \oplus, 0, \ominus, -, ?\}$ *telle que :*

$$\mathcal{I}_{\mathrm{T}}(c_1, c_2) = \bigodot_{\substack{c'_1 \in \mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(c_1) \\ c'_2 \in \mathrm{elemPour}_{\mathrm{T}}(c_2)}} \mathcal{I}(c'_1, c'_2)$$

avec $\odot$ un opérateur commutatif et associatif défini sur $\{+, \oplus, 0, \ominus, -, ?\}$ tel que :

$\odot$	$+$	$\oplus$	0	$\ominus$	$-$	$?$
$+$	$+$	$\oplus$	$\oplus$	$?$	$?$	$?$
$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$?$	$?$	$?$
0	$\oplus$	$\oplus$	0	$\ominus$	$\ominus$	$?$
$\ominus$	$?$	$?$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$?$
$-$	$?$	$?$	$\ominus$	$\ominus$	$-$	$?$
$?$	$?$	$?$	$?$	$?$	$?$	$?$

Exemple 2.27. *On définit la carte taxonomique TM2 comme étant l'association de la carte CM2 (exemple 2.25) et la taxonomie T1 (exemple 2.6). On considère à nouveau les concepts Mauvais temps et Mauvaise condition de trafic, comme pour*

l'exemple 2.11. L'influence taxonomique de Mauvais temps sur Mauvaise condition de trafic est :

$$\mathcal{I}_{\mathrm{T}}(\textit{Mauvais temps}, \textit{Mauvaise condition de trafic}) = \odot \begin{Bmatrix} \mathcal{I}(\textit{Brouillard}, \textit{Mauvaise visibilité}) \\ \mathcal{I}(\textit{Brouillard}, \textit{Route glissante}) \\ \mathcal{I}(\textit{Brouillard}, \textit{Route sinueuse}) \\ \mathcal{I}(\textit{Pluie}, \textit{Mauvaise visibilité}) \\ \mathcal{I}(\textit{Pluie}, \textit{Route glissante}) \\ \mathcal{I}(\textit{Pluie}, \textit{Route sinueuse}) \end{Bmatrix} = \odot \begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ 0 \\ + \\ + \\ 0 \end{Bmatrix} = \oplus$$

2.4.3 Définitions des opérateurs d'influence pour $\{$***nul*** $<$ ***faible*** $<$ ***moyen*** $<$ ***fort***$\}$

L'ensemble de valeurs $\{$*nul* $<$ *faible* $<$ *moyen* $<$ *fort*$\}$ est un ensemble de valeurs totalement ordonné. La valeur *nul* est sémantiquement équivalente à la valeur 0 dans l'ensemble de valeurs $[-1; 1]$. Les autres valeurs représentent différents degrés de la force de l'influence. La valeur *fort* est la valeur maximale attribuable à une influence.

$\{$*nul* $<$ *faible* $<$ *moyen* $<$ *fort*$\}$ étant un ensemble ordonné, il est adapté pour les cartes cognitives floues [Kosko, 1986]. Celles-ci seront présentées plus en détail dans le chapitre 5, notamment la section 5.1.2.

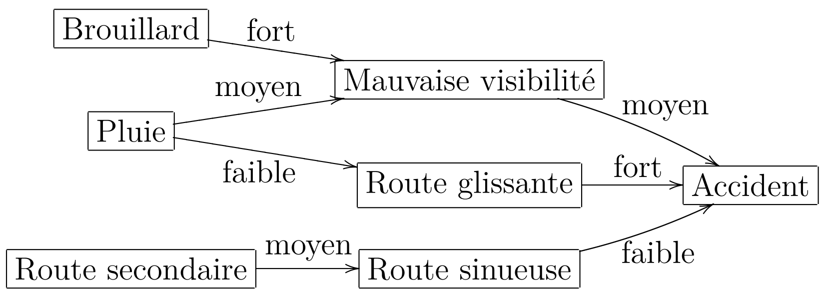


FIGURE 2.9 – La carte cognitive *CM3* définie sur $\{$*nul* $<$ *faible* $<$ *moyen* $<$ *fort*$\}$.

Exemple 2.28. *La carte cognitive CM3 de la figure 2.9 est identique à la carte cognitive CM1 (exemple 2.1) mais définie sur l'ensemble de valeurs* $\{$nul $<$ faible $<$ moyen $<$ fort$\}$. *Cet ensemble ne contenant que des valeurs positives, le concept* Autoroute *a été retiré puisqu'il amenait une influence négative sur* Route sinueuse.

Influence propagée sur un chemin

L'influence propagée sur un chemin est définie comme étant la valeur minimale portée par les influences de ce chemin.

Définition 2.33 (Influence propagée sur un chemin pour $\{$*nul* $<$ *faible* $<$ *moyen* $<$ *fort*$\}$)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ *une carte cognitive définie sur l'ensemble de valeurs* $I = \{$nul $<$ faible $<$ moyen $<$ fort$\}$. *Soit* P *un chemin d'influence liant deux concepts*

de C.
*L'*influence propagée sur P *est :*

$$\mathcal{IP}(P) = \min\Big(\bigcup_{i=0}^{k-1}\Big\{\text{label}\big((u_i, u_{i+1})\big)\Big\}\Big)$$

Influence propagée d'un concept sur un autre

L'influence propagée d'un concept sur un autre est définie comme étant la valeur maximale des influences propagées sur les différents chemins permettant de lier ce concept à l'autre.

Définition 2.34 (Influence propagée d'un concept sur un autre pour $\{$*nul* $<$ *faible* $<$ *moyen* $<$ *fort*$\}$)
Soit $CM = (C, A, \text{label})$ une carte cognitive définie sur l'ensemble de valeurs $I = \{\mathit{nul} < \mathit{faible} < \mathit{moyen} < \mathit{fort}\}$. Soient $c_1, c_2 \in C$ deux concepts de CM.
*L'*influence propagée de c_1 sur c_2 *est une fonction $\mathcal{I}\colon C \times C \to \{\mathit{nul} < \mathit{faible} < \mathit{moyen} < \mathit{fort}\}$ telle que :*

$$\mathcal{I}(c_1, c_2) = \begin{cases} \mathit{nul} & \text{si } \mathcal{P}_{c_1,c_2} = \emptyset \\ \max\Big(\bigcup_{P \in \mathcal{P}_{c_1,c_2}} \{\mathcal{IP}(P)\}\Big) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 2.29. *On reprend à nouveau les concepts Pluie et Accident de l'exemple 2.2. L'influence propagée de Pluie sur Accident dans CM3 (exemple 2.28) est :*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathit{Pluie}, \mathit{Accident}) &= \max\Big(\{\mathcal{IP}(p_1), \mathcal{IP}(p_2)\}\Big) \\ &= \max\Big(\Big\{\min_{\mathrm{T}}(\{\mathit{moyen}, \mathit{moyen}\}), \min(\{\mathit{faible}, \mathit{fort}\})\Big\}\Big) \\ &= \max\Big(\{\mathit{moyen}, \mathit{faible}\}\Big) \\ &= \mathit{moyen} \end{aligned}$$

Influence taxonomique

Pour définir l'influence taxonomique pour $\{\mathit{nul} < \mathit{faible} < \mathit{moyen} < \mathit{fort}\}$, il n'y pas réellement d'opérateur plus adapté qu'un autre. On peut donc utiliser un max, comme pour l'influence propagée d'un concept sur un autre (définition 2.34) ou un intervalle, comme pour l'influence taxonomique pour $[-1; 1]$ (définition 2.13) [Genest et Loiseau, 2007].

Conclusion

Les cartes cognitives sont un modèle efficace pour représenter visuellement des influences et pour raisonner. Le calcul de l'influence propagée permet de déduire des connaissances pertinentes pour un utilisateur.

Néanmoins, si obtenir une valeur unique d'influence est une information simple et concise, elle peut s'avérer insuffisante si on cherche à mettre en évidence les chemins d'influence portant une valeur différente de celles des autres. Des problèmes de qualité de la carte peuvent aussi exister. Pour faire face à ce problème, nous proposons différents critères de validité d'une carte au chapitre 3.

Les vues partagées sont un système efficace pour manipuler une carte cognitive entre plusieurs utilisateurs. Cependant, rien n'est dit sur la construction de la carte elle-même. Cette construction peut en effet être le résultat d'un travail de groupe entre plusieurs designers de cartes. L'idée de synthèse qui est introduite au chapitre 4 propose des solutions pour construire une carte issue de différents designers en une carte unique. Elle utilise pour cela un ordre de préférence défini sur ces designers.

Enfin, les opérateurs de calcul de l'influence propagée d'un concept sur un autre ont en sens un soi. Néanmoins, la sémantique des ces valeurs n'est pas abordée. On ne peut donc savoir si les valeurs d'influence calculées ont effectivement un sens. Dans le chapitre 5, nous discutons de la sémantique qui peut être associée aux valeurs d'une carte cognitive et de la manière d'adapter les opérateurs de calcul d'influence propagée en conséquence.