**Série d'exercices N$^o$6**

ING1 – Algorithmique procédurale

# 1 Invariants de boucle : exemples simples

(1) Démontrez la validité des algorithmes suivants à l'aide d'un invariant de boucle :

1. Division euclidienne par la méthode des soustractions.
2. Calcul (itératif) de la factorielle. □

# 2 Analyse du tri à bulle

(2) Rappelez l'algorithme du tri à bulles. On notera la structure de cet algorithme : deux boucles imbriquées que nous appellerons la boucle externe et la boucle interne. □

(3) Soit A le tableau à trier, et $A'$ le tableau résultat du tri à bulles. Quelles propriétés $A'$ doit-il vérifier pour que nous puissions conclure que cet algorithme effectue correctement la tâche qu'il doit effectuer ? □

(4) Déduire un invariant de boucle pour la boucle interne et montrez qu'il est vérifié.
En déduire un autre invariant de boucle pour la boucle externe et montrez qu'il est vérifié.
En déduire que l'algorithme est correct. □

# 3 Analyse du tri par sélection

(5) Reprendre les questions de l'exercice précédent pour le tri par sélection. □

# 4 Analyse du crible d'Eratosthène

Dans cet exercice nous étudions le crible d'Eratosthène, algorithme servant à trouver tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier donné $N$. Le principe de cet algorithme est le suivant (on entend par cribler : cocher ou encore supprimer de la liste des nombres premiers) :

---

- **Pour** $p$ variant de 2 à $N$
  - Cribler tous les multiples de $p$ inférieurs ou égaux à $N$.
- **FinPour**

---

6 En utilisant la syntaxe introduite en cours écrire cet algorithme en commençant par demander à l'utilisateur de saisir la valeur de $N$ et en terminant par afficher la liste des nombres premiers trouvés. ☐

7 Démontrer que dans la boucle externe on peut remplacer la condition "$\leq N$" par la condition "$\leq \sqrt(N)$". ☐

8 Démontrez la validité de l'algorithme. ☐

9 Calculez la complexité (temporelle) de l'algorithme (on fera attention à la définition de la taille du problème).
Cette complexité change-t-elle lorsqu'on utilise la propriété démontrée dans la question 7 ? ☐

10 Calculez la complexité spatiale. ☐

# 5 Règle de Horner (d'après [1])

Étant donné un polynôme $P$ défini par

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

La règle de Horner consiste à écrire $P$ de la manière suivante :

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + x a_n)))$$

Cela donne donc deux algorithmes pour le calcul des valeurs de $P(x)$.

11 Écrire en pseudo-code ces deux algorithmes.
Calculez leur complexité. □

12 Définissez un invariant de boucle pour le deuxième algorithme (Horner) et utilisez le pour démontrer que cet algorithme évalue bien les valeurs des polynômes. □

# Références

[1] Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L. et Stein C. Algorithmique. Dunod. 2010, 1188 pages.