Série d'exercices N^{o}4

ING1 – Algorithmique procédurale

Objet de la série : Inversion d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss

---

1 Les trois opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

1. Écrire une procédure `dilatation` qui prend comme arguments une matrice A carrée ou rectangulaire "horizontale", un entier i et un réel k. La procédure retourne la matrice obtenue après avoir effectué l'opération élémentaire : $L_i \leftarrow kL_i$. ☐

2. Écrire une procédure `permutation` qui prend comme arguments une matrice A carrée ou rectangulaire "horizontale" et deux entiers i et j. La procédure retourne la matrice obtenue après avoir effectué l'opération élémentaire : $L_i \leftrightarrow L_j$. ☐

3. Écrire une procédure `transvection` qui prend comme arguments une matrice A carrée ou rectangulaire "horizontale", deux entiers i et j et un réel k. La procédure retourne la matrice obtenue après avoir effectué l'opération élémentaire : $L_i \leftarrow L_i + kL_j$. ☐

2 Mettre des zéros au-dessous du pivot choisi

4. Écrire une procédure `zerosSousPivot` qui prend comme arguments une matrice A carrée ou rectangulaire "horizontale" et un entier i. L'élément $A[i,i]$ est le "pivot". Il est supposé non nul. Par une dilatation appropriée, on le transforme d'abord en 1. Puis, par des transvections successives, on place des 0 au-dessous de ce pivot. ☐

3 Itérer pour obtenir une forme triangulaire

5. Écrire une procédure `formeTriangulaire1` qui prend comme argument une matrice A carrée ou rectangulaire "horizontale". On effectue la méthode du pivot de Gauss, de manière à obtenir une matrice triangulaire supérieure. Pour cela, on itère la procédure `zerosSousPivot` de la section 2. La version 1 de cette procédure ne traite pas le cas où le pivot est nul. ☐

6 Écrire la version 2 de la procédure précédente, `formeTriangulaire2`. Elle traite le cas où le pivot est égal à 0. On doit, dans ce cas, permuter la ligne du pivot avec la première des lignes suivantes, qui ne comporte pas de 0 à la place considérée. Si toutes la colonne, au-dessous du pivot, est composée de 0, la matrice n'était pas inversible. □

4 Mettre des zéros au-dessus du pivot choisi

7 Écrire une procédure `zerosSurPivot` qui prend comme arguments une matrice A carrée ou rectangulaire "horizontale" et un entier i. La matrice A est sensée avoir été obtenue par la procédure `formeTriangulaire2`. Elle est donc triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. L'élément $A[i,i]$ est le "pivot". Il est égal à 1. Par des transvections successives, on place des 0 au-dessus de ce pivot. □

5 Itérer pour obtenir l'identité

8 Écrire une procédure `identite` qui prend comme argument une matrice A carrée ou rectangulaire "horizontale", triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On effectue la méthode du pivot de Gauss "inverse", de manière à obtenir la matrice identité. Pour cela, on itère la procédure `zerosSurPivot` de la section 4. □

6 Calculer l'inverse

9 Écrire une procédure `inverse` qui prend comme argument une matrice A carrée. La procédure commence par vérifier que la matrice est bien carrée. Puis, la méthode de calcul de l'inverse d'une matrice est effectuée. Premièrement, on concactène la matrice A et la matrice identité I. Deuxièmement, on effectue la méthode du pivot de Gauss pour obtenir une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Troisièmement, on effectue la méthode du pivot de Gauss "inverse", de manière à obtenir la matrice identité. Enfin, on retourne la moitié droite de la matrice obtenue, qui contient l'inverse de la matrice A initiale (la moitié gauche, quant à elle, contient la matrice identité I). □

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$