RESUME DE PROBABILITES

COMBINATOIRE

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé

$P(\emptyset)=0$ et $P(\Omega)=1$

$P(\overline{A})=1-P(A)$

$P(A)\leq P(B)$ si $A\subset B$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Si P mesure de probabilité uniforme, alors

$$\forall \mathcal{A}\in A,\ P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}.$$

Tirage	Avec ordre	Sans ordre
Sans remise	$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$
Avec remise	n^p	C_{n+p-1}^p

VARIABLES ALEATOIRES

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire de loi de probabilité P_X.

FONCTION DE REPARTITION

On appelle fonction de répartition la fonction F_X définie par

$$\boxed{\begin{array}{llll} F_X : & \mathbb{R} & \rightarrow & [0,1] \\ & t & \mapsto & F_X(t)=P(X\leq t) \end{array}}$$

En pratique, la fonction de répartition permet de calculer la probabilité suivante,

$$\boxed{P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)}$$

<u>Cas continu</u>

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue se définit à partir de sa fonction de densité f de la façon suivante :

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ F(t)=P(X\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx}$$

ESPERANCE

Cas discret

Si X est une variable aléatoire discrète de fonction de masse p_X alors

$$\boxed{\mu = E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x p_X(x)}$$

Cas continu

Si X est une variable aléatoire discrète de fonction de densité f_X alors

$$\boxed{\mu = E[X] = \int_{X(\Omega)} x f_X(x) dx}$$

Et quelle que soit la variable, on a les relations suivantes :

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

$$E[XY]=E[X]E[Y] \text{ si X et Y indépendantes}$$

VARIANCE-COVARIANCE

La *variance* de la variable X est le moment centré d'ordre 2,

$$\boxed{\sigma^2=Var(X)=E[(X-\mu)^2]= E[X^2]-(E[X])^2}$$

On appelle *écart-type* de X la racine de la variance.

Remarque

L'espérance est une mesure de localisation de la variable aléatoire X et la variance une mesure de dispersion.

Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérances respectives μ_X et μ_Y. La covariance du couple (X,Y) est définie par

$$\boxed{cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[XY] - \mu_X \mu_Y}$$

$$cov(X,Y) = 0 \text{ si X et Y indépendantes}$$

$$var(aX+bY) = a^2 \, var(X) + b^2 \, var(Y) + 2ab \, cov(X,Y)$$

LOIS DISCRETES

LOI DE BERNOULLI

Un expérience de Bernoulli a deux issues possibles, un succès noté s ou un échec noté e, donc l'espace fondamental est $\Omega=\{s,e\}$. On suppose que $P(\{s\})=p$ où $0<p<1$, et on introduit l'application

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^+ \text{ avec } X(s)=1 \text{ et } X(e)=0.$$

La variable ainsi définie est une variable aléatoire discrète de loi de Bernoulli de paramètre p, notée b(p), de support $D_X=\{0,1\}$ et de fonction de masse

$$p_X(x)=\begin{cases} p & \text{si } x=1 \\ 1\text{-}p & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- L'espérance et la variance sont données par

$$E(X)=p \text{ et } \sigma^2=\text{var}(X)=p(1-p).$$

- La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1\text{-}p & \text{si } 0\leq t<1 \\ 1 & \text{si } t\geq 1 \end{cases}.$$

LOI BINOMIALE

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois et de façon indépendante une expérience admettant deux résultats : un succès avec un probabilité p ou un échec avec une probabilité 1-p (Bernoulli). Soit X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de succès, alors X suit une binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}$ et $p\in]0,1[$, notée b(n,p). Cette variable admet comme support $D_X=\{0,1,\dots,n\}$ et comme fonction de masse

$$p_X(x)=\begin{cases} C_n^x p^x(1-p)^{n-x} & \text{si } x\in\{0,1,\dots,n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- L'espérance et la variance sont données par

$$E(X)=np \text{ et } \sigma^2=\text{var}(X)=np(1-p).$$

- La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\leq 0 \\ p_X(0) & \text{si } 0<t\leq 1 \\ p_X(0)+p_X(1) & \text{si } 1<t\leq 2 \\ \dots & \\ 1 & \text{si } t>n \end{cases}.$$

<u>Remarque</u> : Soient X_i, i=1,…,n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli B(p), alors : $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

LOI DE POISSON

Une variable aléatoire discrète X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ si elle admet $\mathbb{N}$ comme support, $D_X=\{0,1,...\}$, et comme fonction de masse

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{si } x\in D_X\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

<u>Interprétation</u>

La variable aléatoire discrète qui donne le nombre d'apparitions d'un phénomène aléatoire dans un intervalle de temps T donné suit une loi de Poisson de paramètre θT, $P(\theta T)$.

- L'espérance et la variance sont données par

$$E(X)=\lambda \text{ et } \sigma^2=\text{var}(X)=\lambda.$$

- La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leq 0\\ p_X(0) & \text{si } 0<t\leq 1\\ p_X(0)+p_X(1) & \text{si } 1<t\leq 2\\ \dots\end{cases}.$$

<u>Remarque</u> : On utilise des tables pour connaître la valeur de la fonction de répartition car calculs très longs.

LOIS CONTINUES

LOI UNIFORME

Une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}$, notée U([a,b]), si elle admet l'intervalle [a,b] comme support, $D_X=[a,b]$ et si sa fonction de densité est :

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

<u>Interprétation</u> : X décrit l'expérience aléatoire de choisir un point x au hasard dans l'intervalle [a,b].

- L'espérance et la variance sont données par

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \text{ et } \sigma^2=\mathrm{var}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

- La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\le a\\ \dfrac{t-a}{b-a} & \text{si } a\le t\le b\\ 1 & \text{si } t\ge b\end{cases}.$$

<u>Propriété</u>

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de répartition F, alors la variable aléatoire transformée, Y=F(X), suit une loi uniforme U([0,1]).

LOI NORMALE (GAUSSIENNE)

Une variable aléatoire continue X suit une loi normale (variable gaussienne), notée $N(\mu,\sigma^2)$, si elle admet $\mathbb{R}$ comme support et si sa fonction de densité est :

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Si $\mu=0$ et $\sigma^2=1$, on parle de loi normale centrée réduite, N(0,1).

- L'espérance et la variance sont données par

$$E(X)=\mu \text{ et } \mathrm{var}(X)=\sigma^2.$$

<u>Propriété 1</u> : Si X est une variable aléatoire de loi normale $N(\mu,\sigma^2)$ alors la variable $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite, N(0,1).

<u>Propriété 2</u> : Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ et $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ alors X_1+X_2 suit une loi normale $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

- La fonction de répartition d'une loi normale n'a pas d'expression analytique. Nous verrons dans le paragraphe 2.4. qu'on utilise alors des tables dans lesquelles on peut trouver des valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite N(0,1). On peut cependant noter quelques propriétés de la fonction de répartition F_X, venant du fait que la fonction de densité est symétrique par rapport à μ :

$$F_X(\mu)=0,5$$

$$\text{et si } \mu=0,\ F_X(-t)=1-F_X(t),\ \forall t\in R$$

La fonction de répartition de la loi normale est tabulée uniquement pour la loi normale centrée réduite, N(0,1). Donc si X suit une loi normale quelconque $N(\mu,\sigma^2)$, on sait que la variable $Y=(X-\mu)/\sigma$ suit une loi normale N(0,1). On va donc utiliser cette transformation pour calculer les probabilités souhaitées de la façon suivante :

$$F_X(t)=P(X<t)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{t-\mu}{\sigma})=P(Y<\frac{t-\mu}{\sigma})=F_Y(\frac{t-\mu}{\sigma}),$$

or Y suit une loi normale centrée réduite donc F_Y est connue grâce aux tables.
Par exemple si X suit une loi normale N(9,25) alors

$$P(X<10)=P(\frac{X-9}{5}<\frac{10-9}{5})=P(Y<\frac{1}{5})=F_Y(0.2)=0.579.$$

<u>Valeurs remarquables</u>

$$P(\mu-1.64\sigma<X<\mu+1.64\sigma)=0.90$$

$$P(\mu-1.96\sigma<X<\mu+1.96\sigma)=0.95$$

$$P(\mu-3.09\sigma<X<\mu+3.09\sigma)=0.998$$

LOI EXPONENTIELLE

Une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètres θ et ν, $Exp(\theta,\nu)$, si elle admet l'intervalle $]\nu,+\infty[$ comme support, $D_X=]\nu,+\infty[$, et si sa fonction de densité est

$$f_X(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta(x-\nu)} & \text{si } x\in]\nu,+\infty] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

<u>Interprétation</u> : Si $\nu=0$, X représente le temps d'attente avant une première apparition d'un phénomène aléatoire. X peut aussi représenter le temps entre deux apparitions d'un phénomène aléatoire.

- L'espérance et la variance sont données par

$$E(X)=\nu+\frac{1}{\theta} \text{ et } \sigma^2=var(X)=\frac{1}{\theta^2}.$$

- La fonction de répartition d'une loi exponentielle $\nu=0$ est donnée par

$$F_X(t)=\begin{cases}1-e^{-\theta t} & \text{si } t\geq 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

CONVERGENCES

THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE

Soit $X_1,\ldots,X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telle que $E(X_i)=\mu$ et $var(X_i)=\sigma^2$. Alors la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma},$$

converge en loi vers une variable aléatoire Y de la normale centrée réduite,

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Ce théorème joue un rôle capital en statistique car l'étude de somme de variables aléatoires indépendantes est primordial.

Cas particuliers :

Convergence de la loi binomiale vers la loi normale

Soit $X_1,\ldots,X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi binomiale $b(n,p)$, alors

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1).$$

En pratique, on utilise cette approximation lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Convergence de la loi de Poisson vers la loi normale

Soit $X_1,\ldots,X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $P(\lambda)$, alors

$$\frac{X_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1).$$

En pratique, on utilise cette approximation lorsque $\lambda \geq 20$.

Dans les deux cas, on approche une loi discrète par une loi continue. Le calcul de la probabilité $P(X=k)$ ne peut donc se faire que par encadrement et en général on utilise l'approximation,

$$P(X=k) \approx P(k - \tfrac{1}{2} < X < k + \tfrac{1}{2}).$$

C'est ce qu'on appelle la correction de continuité.

LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Si $X_1,\ldots,X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telle que $E(X_i)=\mu$, alors la suite obéit à la loi faible des grand nombres, *i.e*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu.$$

CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE

Soit l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et une suite de variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sur $(\Omega,\mathcal{A})$ telles que $E(X_i)$ et $E(X_i^2)$ existent. On dit que la suite converge *en moyenne quadratique* vers une variable aléatoire X si

$$\lim_{n\to+\infty} E\left[(X_n - X)^2\right] = 0\,.$$

Ce type de convergence est noté

$$X_n \xrightarrow{m.q} X$$