Statistiques inférentielles
1- Estimation

A. BOURHATTAS

CY-Tech ING2-GI

Année universitaire 2021-2022

Introduction

Introduction

Situation :

- Pour valider la qualité d'une pièce industrielle fabriquée à la chaîne par millions d'exemplaires,

Introduction

Situation :

- Pour valider la qualité d'une pièce industrielle fabriquée à la chaîne par millions d'exemplaires, on ne peut pas examiner chaque pièce...

Introduction

Situation :

- Pour valider la qualité d'une pièce industrielle fabriquée à la chaîne par millions d'exemplaires, on ne peut pas examiner chaque pièce...
- Pour étudier la propagation d'une infection dans la population d'un pays ou d'un continent,

Introduction

Situation :

- Pour valider la qualité d'une pièce industrielle fabriquée à la chaîne par millions d'exemplaires, on ne peut pas examiner chaque pièce...
- Pour étudier la propagation d'une infection dans la population d'un pays ou d'un continent, on ne peut pas tester tout le monde...

Introduction

Situation :

- Pour valider la qualité d'une pièce industrielle fabriquée à la chaîne par millions d'exemplaires, on ne peut pas examiner chaque pièce...
- Pour étudier la propagation d'une infection dans la population d'un pays ou d'un continent, on ne peut pas tester tout le monde...
- Dans tous les cas semblables, on limite l'étude à un échantillon.

Introduction

Situation :

- Pour valider la qualité d'une pièce industrielle fabriquée à la chaîne par millions d'exemplaires, on ne peut pas examiner chaque pièce...
- Pour étudier la propagation d'une infection dans la population d'un pays ou d'un continent, on ne peut pas tester tout le monde...
- Dans tous les cas semblables, on limite l'étude à un échantillon.
- Ce cours (statistiques inférentielles) vous donnera les justifications mathématiques permettant, à partir de l'étude d'un échantillon, de tirer (inférer) des conclusions sur la population entière.

Formalisme

Formalisme

Mathématiquement :

- Le caractéristique qui nous intéresse dans la population sera représentée par une variable aléatoire X.

Formalisme

Mathématiquement :

- Le caractéristique qui nous intéresse dans la population sera représentée par une variable aléatoire X.
- L'échantillon étudié sera une réalisation des variables aléatoires $X_1, X_2, .., X_n$.

Formalisme

Mathématiquement :

- Le caractéristique qui nous intéresse dans la population sera représentée par une variable aléatoire X.
- L'échantillon étudié sera une réalisation des variables aléatoires $X_1, X_2, .., X_n.$, variables indépendantes et suivant la même loi que X,

Formalisme

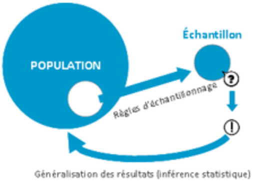
Mathématiquement :

- Le caractéristique qui nous intéresse dans la population sera représentée par une variable aléatoire X.
- L'échantillon étudié sera une réalisation des variables aléatoires $X_1, X_2, .., X_n.$, variables indépendantes et suivant la même loi que X, donc v.a.i.i.d.

Formalisme

Mathématiquement :

- Le caractéristique qui nous intéresse dans la population sera représentée par une variable aléatoire X.
- L'échantillon étudié sera une réalisation des variables aléatoires $X_1, X_2, .., X_n.$, variables indépendantes et suivant la même loi que X, donc v.a.i.i.d.
- Nous verrons comment des opérations effectuées sur cet échantillon nous donneront des informations sur la loi suivie par X.



Estimation d'un paramètre

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

- Nous connaissons la loi suivie par X,

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

- Nous connaissons la loi suivie par X, $\quad X \sim \mathcal{L}$.

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

- Nous connaissons la loi suivie par X, $\quad X \sim \mathcal{L}$.
- Cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu,

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

- Nous connaissons la loi suivie par X, $\quad X \sim \mathcal{L}$.
- Cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu, $X \sim \mathcal{L}(\theta)$.

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

- Nous connaissons la loi suivie par X, $X \sim \mathcal{L}$.
- Cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu, $X \sim \mathcal{L}(\theta)$.
- Nous allons approcher la valeur de θ à partir de calculs effectués sur l'échantillon $X_1, X_2, .., X_n$.

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

- Nous connaissons la loi suivie par X, $\quad X \sim \mathcal{L}$.
- Cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu, $X \sim \mathcal{L}(\theta)$.
- Nous allons approcher la valeur de θ à partir de calculs effectués sur l'échantillon $X_1, X_2, .., X_n$.

Deux types d'estimation :

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

- Nous connaissons la loi suivie par X, $\quad X \sim \mathcal{L}$.
- Cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu, $X \sim \mathcal{L}(\theta)$.
- Nous allons approcher la valeur de θ à partir de calculs effectués sur l'échantillon $X_1, X_2, .., X_n$.

Deux types d'estimation :

- Donner une valeur approchée $\hat{\theta}$ de θ,

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

- Nous connaissons la loi suivie par X, $\quad X \sim \mathcal{L}$.
- Cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu, $X \sim \mathcal{L}(\theta)$.
- Nous allons approcher la valeur de θ à partir de calculs effectués sur l'échantillon $X_1, X_2, .., X_n$.

Deux types d'estimation :

- Donner une valeur approchée $\hat{\theta}$ de θ, $\implies$ ESTIMATION PONCTUELLE.

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

- Nous connaissons la loi suivie par X, $X \sim \mathcal{L}$.
- Cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu, $X \sim \mathcal{L}(\theta)$.
- Nous allons approcher la valeur de θ à partir de calculs effectués sur l'échantillon $X_1, X_2, .., X_n$.

Deux types d'estimation :

- Donner une valeur approchée $\hat{\theta}$ de θ, $\Longrightarrow$ ESTIMATION PONCTUELLE.
- Donner un intervalle qui contient θ avec un certain niveau de confiance,

Estimation d'un paramètre

Premier exemple d'inférence :

- Nous connaissons la loi suivie par X, $\quad X \sim \mathcal{L}$.
- Cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu, $X \sim \mathcal{L}(\theta)$.
- Nous allons approcher la valeur de θ à partir de calculs effectués sur l'échantillon $X_1, X_2, .., X_n$.

Deux types d'estimation :

- Donner une valeur approchée $\hat{\theta}$ de θ, $\implies$ ESTIMATION PONCTUELLE.
- Donner un intervalle qui contient θ avec un certain niveau de confiance, $\implies$ INTERVALLE DE CONFIANCE.

Exemple 1

Exemple 1

- On mesure une grandeur dont la valeur exacte est μ.

Exemple 1

- On mesure une grandeur dont la valeur exacte est μ.
- Les conditions expérimentales font que la mesure X fluctue, elle suit une loi normale :

Exemple 1

- On mesure une grandeur dont la valeur exacte est μ.
- Les conditions expérimentales font que la mesure X fluctue, elle suit une loi normale : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Exemple 1

- On mesure une grandeur dont la valeur exacte est μ.
- Les conditions expérimentales font que la mesure X fluctue, elle suit une loi normale : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- En prenant n mesures indépendantes, on obtient une réalisation d'un échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$.

Exemple 1

- On mesure une grandeur dont la valeur exacte est μ.
- Les conditions expérimentales font que la mesure X fluctue, elle suit une loi normale : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- En prenant n mesures indépendantes, on obtient une réalisation d'un échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$.
- La loi des grands nombres montre que la moyenne de l'échantillon, $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ constitue une bonne approximation de μ.

Exemple 1

- On mesure une grandeur dont la valeur exacte est μ.
- Les conditions expérimentales font que la mesure X fluctue, elle suit une loi normale : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- En prenant n mesures indépendantes, on obtient une réalisation d'un échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$.
- La loi des grands nombres montre que la moyenne de l'échantillon, $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ constitue une bonne approximation de μ. On dit que la moyenne empirique $\overline{x}$ est une estimation de μ.

Exemple 1

- On mesure une grandeur dont la valeur exacte est μ.
- Les conditions expérimentales font que la mesure X fluctue, elle suit une loi normale : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- En prenant n mesures indépendantes, on obtient une réalisation d'un échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$.
- La loi des grands nombres montre que la moyenne de l'échantillon, $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ constitue une bonne approximation de μ. On dit que la moyenne empirique $\overline{x}$ est une estimation de μ.
- $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur du paramètre $\theta = \mu$.

Définitions

Définitions

Si X une variable aléatoire, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de X.

- **Une statistique** T est une v.a. fonction de $(X_1, \ldots, X_n)$
  $T = T(X_1, \ldots, X_n)$.

Définitions

Si X une variable aléatoire, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de X.

- **Une statistique** T est une v.a. fonction de $(X_1, \ldots, X_n)$ $T = T(X_1, \ldots, X_n)$.
- **Un estimateur** du paramètre θ est une statistique sensée s'approcher de θ ....

Définitions

Si X une variable aléatoire, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de X.

- **Une statistique** T est une v.a. fonction de $(X_1, \ldots, X_n)$
  $T = T(X_1, \ldots, X_n)$.
- **Un estimateur** du paramètre θ est une statistique sensée s'approcher de θ ....par exemple :
  moyenne empirique, variance empirique,..

Définitions

Si X une variable aléatoire, et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de X.

- **Une statistique** T est une v.a. fonction de $(X_1, \ldots, X_n)$
  $T = T(X_1, \ldots, X_n)$.
- **Un estimateur** du paramètre θ est une statistique sensée s'approcher de θ ....par exemple :
  moyenne empirique, variance empirique,..

Mais un paramètre peut avoir plusieurs estimateurs (plusieurs manières de se laisser approcher).

Un exemple

Un exemple

Exemple

- $X =$ temps d'attente entre deux atterrissages sur un aéroport.

Un exemple

Exemple

- $X =$ temps d'attente entre deux atterrissages sur un aéroport.
- Généralement modélisé par loi exponentielle : $X \sim Exp(\theta)$.

Un exemple

Exemple

- $X =$ temps d'attente entre deux atterrissages sur un aéroport.
- Généralement modélisé par loi exponentielle : $X \sim Exp(\theta)$.
- Reste à estimer le paramètre θ d'après les 9 observations :

Un exemple

Exemple

- $X =$ temps d'attente entre deux atterrissages sur un aéroport.
- Généralement modélisé par loi exponentielle : $X \sim Exp(\theta)$.
- Reste à estimer le paramètre θ d'après les 9 observations :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0.4	1	0.5	0.3	0.1	0.2	1.4	0.2	0.5

Un exemple

Exemple

- X = temps d'attente entre deux atterrissages sur un aéroport.
- Généralement modélisé par loi exponentielle : $X \sim Exp(\theta)$.
- Reste à estimer le paramètre θ d'après les 9 observations :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0.4	1	0.5	0.3	0.1	0.2	1.4	0.2	0.5

- On sait $E(X) = \dfrac{1}{\theta}$ et $Var(X) = \dfrac{1}{\theta^2}$.

Un exemple

Exemple

- $X =$ temps d'attente entre deux atterrissages sur un aéroport.
- Généralement modélisé par loi exponentielle : $X \sim Exp(\theta)$.
- Reste à estimer le paramètre θ d'après les 9 observations :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0.4	1	0.5	0.3	0.1	0.2	1.4	0.2	0.5

- On sait $E(X) = \dfrac{1}{\theta}$ et $Var(X) = \dfrac{1}{\theta^2}$. Donc deux possibilités pour estimer θ.

Un exemple

Exemple

- $X =$ temps d'attente entre deux atterrissages sur un aéroport.
- Généralement modélisé par loi exponentielle : $X \sim Exp(\theta)$.
- Reste à estimer le paramètre θ d'après les 9 observations :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0.4	1	0.5	0.3	0.1	0.2	1.4	0.2	0.5

- On sait $E(X) = \dfrac{1}{\theta}$ et $Var(X) = \dfrac{1}{\theta^2}$. Donc deux possibilités pour estimer θ.
- L'espérance empirique donne $\hat{\theta} = 1.96$

Un exemple

Exemple

- X = temps d'attente entre deux atterrissages sur un aéroport.
- Généralement modélisé par loi exponentielle : $X \sim Exp(\theta)$.
- Reste à estimer le paramètre θ d'après les 9 observations :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0.4	1	0.5	0.3	0.1	0.2	1.4	0.2	0.5

- On sait $E(X) = \dfrac{1}{\theta}$ et $Var(X) = \dfrac{1}{\theta^2}$. Donc deux possibilités pour estimer θ.
- L'espérance empirique donne $\hat{\theta} = 1.96$
  La variance empirique donne $\hat{\theta} = 2.35$

Un exemple

Exemple

- X = temps d'attente entre deux atterrissages sur un aéroport.
- Généralement modélisé par loi exponentielle : $X \sim Exp(\theta)$.
- Reste à estimer le paramètre θ d'après les 9 observations :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0.4	1	0.5	0.3	0.1	0.2	1.4	0.2	0.5

- On sait $E(X) = \dfrac{1}{\theta}$ et $Var(X) = \dfrac{1}{\theta^2}$. Donc deux possibilités pour estimer θ.
- L'espérance empirique donne $\hat{\theta} = 1.96$
  La variance empirique donne $\hat{\theta} = 2.35$
- Quelle valeur retenir ??

Qualités d'un estimateur

Qualités d'un estimateur

Erreur d'estimation $= (T - \theta)$.

Qualités d'un estimateur

Erreur d'estimation $= (T - \theta)$.

1. **Biais :**
   Biais $= b(T) = E(T) - \theta = E(T - \theta) =$moyenne de l'erreur.

Qualités d'un estimateur

Erreur d'estimation $= (T - \theta)$.

1. **Biais :**
   Biais $= b(T) = E(T) - \theta = E(T - \theta) =$moyenne de l'erreur.
   Un estimateur est dit **sans biais** si $b(T) = 0 \implies$erreur nulle en moyenne.

Qualités d'un estimateur

Erreur d'estimation $= (T - \theta)$.

1. **Biais :**
   Biais $= b(T) = E(T) - \theta = E(T - \theta) =$moyenne de l'erreur.
   Un estimateur est dit **sans biais** si $b(T) = 0 \implies$erreur nulle en moyenne.
2. **Convergence :**
   Risque quadratique$= R_\theta(T) = E\left((T - \theta)^2\right) = Var(T) + b(T)^2$.

Qualités d'un estimateur

Erreur d'estimation $= (T - \theta)$.

1. **Biais :**
   Biais $= b(T) = E(T) - \theta = E(T - \theta) =$moyenne de l'erreur.
   Un estimateur est dit **sans biais** si $b(T) = 0 \implies$erreur nulle en moyenne.
2. **Convergence :**
   Risque quadratique$= R_\theta(T) = E\left((T-\theta)^2\right) = Var(T) + b(T)^2$.
   Estimateur **convergent** $\iff \lim\limits_{n\to\infty} R_\theta(T) = 0$.

Qualités d'un estimateur

Erreur d'estimation $= (T - \theta)$.

1. **Biais :**
   Biais $= b(T) = E(T) - \theta = E(T - \theta) =$moyenne de l'erreur.
   Un estimateur est dit **sans biais** si $b(T) = 0 \implies$erreur nulle en moyenne.
2. **Convergence :**
   Risque quadratique$= R_\theta(T) = E\left((T-\theta)^2\right) = Var(T) + b(T)^2$.
   Estimateur **convergent** $\iff \lim\limits_{n\to\infty} R_\theta(T) = 0$.
   Il s'agit de convergence en moyenne quadratique de T vers θ.

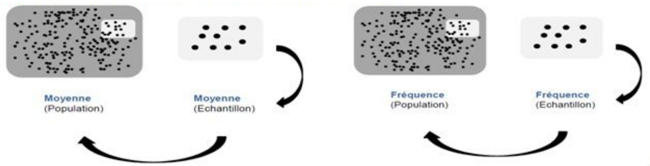
Qualités d'un estimateur

Erreur d'estimation $= (T - \theta)$.

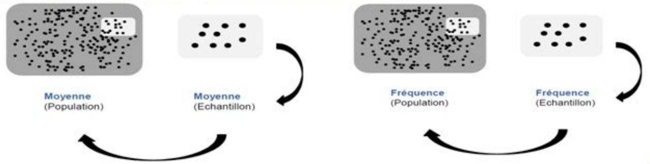
1. **Biais :**
   Biais $= b(T) = E(T) - \theta = E(T - \theta) =$moyenne de l'erreur.
   Un estimateur est dit **sans biais** si $b(T) = 0 \implies$erreur nulle en moyenne.
2. **Convergence :**
   Risque quadratique$= R_\theta(T) = E\left((T-\theta)^2\right) = Var(T) + b(T)^2$.
   Estimateur **convergent** $\iff \lim\limits_{n\to\infty} R_\theta(T) = 0$.
   Il s'agit de convergence en moyenne quadratique de T vers θ.
3. Entre deux estimateurs sans biais du même paramètre θ, **le plus efficace** est celui avec la plus petite variance.

Estimateur usuel d'une proportion

Estimateur usuel d'une proportion

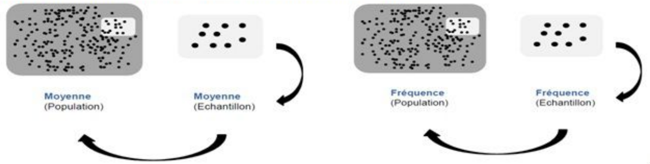


Estimateur usuel d'une proportion



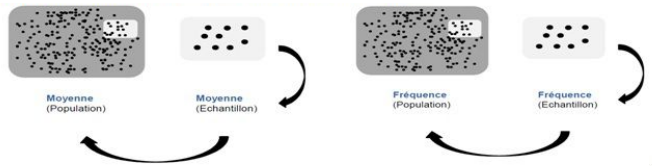
$X \sim \mathcal{B}(p)$ et $\theta = p$,

Estimateur usuel d'une proportion



$X \sim \mathcal{B}(p)$ et $\theta = p$, l'estimateur utilisé est la fréquence empirique

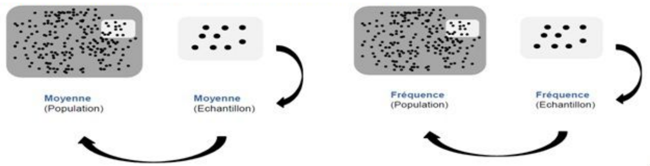
Estimateur usuel d'une proportion



$X \sim \mathcal{B}(p)$ et $\theta = p$, l'estimateur utilisé est la fréquence empirique

$$F_n = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Estimateur usuel d'une proportion

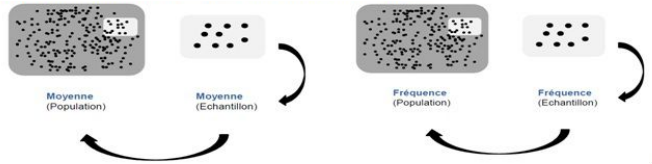


$X \sim \mathcal{B}(p)$ et $\theta = p$, l'estimateur utilisé est la fréquence empirique

$$F_n = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $E(F_n) = E(X_1) = p = \theta$,

Estimateur usuel d'une proportion

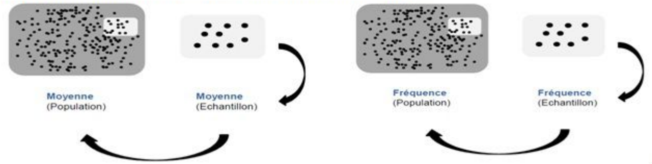


$X \sim \mathcal{B}(p)$ et $\theta = p$, l'estimateur utilisé est la fréquence empirique

$$F_n = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $E(F_n) = E(X_1) = p = \theta$, donc estimateur sans biais.

Estimateur usuel d'une proportion

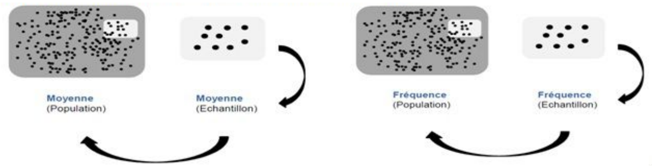


$X \sim \mathcal{B}(p)$ et $\theta = p$, l'estimateur utilisé est la fréquence empirique

$$F_n = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $E(F_n) = E(X_1) = p = \theta$, donc estimateur sans biais.
- $R_\theta(F_n) = V(F_n) = \frac{V(X_1)}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$

Estimateur usuel d'une proportion

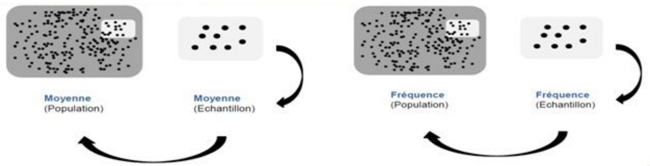


$X \sim \mathcal{B}(p)$ et $\theta = p$, l'estimateur utilisé est la fréquence empirique

$$F_n = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $E(F_n) = E(X_1) = p = \theta$, donc estimateur sans biais.
- $R_\theta(F_n) = V(F_n) = \frac{V(X_1)}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$ tend bien vers 0,

Estimateur usuel d'une proportion



$X \sim \mathcal{B}(p)$ et $\theta = p$, l'estimateur utilisé est la fréquence empirique

$$F_n = \overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $E(F_n) = E(X_1) = p = \theta$, donc estimateur sans biais.
- $R_\theta(F_n) = V(F_n) = \frac{V(X_1)}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$ tend bien vers 0, donc convergent.

Estimateur usuel d'une moyenne

Estimateur usuel d'une moyenne

Lorsque l'on connaît $\sigma^2 = Var(X)$,

Estimateur usuel d'une moyenne

Lorsque l'on connaît $\sigma^2 = Var(X)$, et que $\theta = E(X) = \mu$,

Estimateur usuel d'une moyenne

Lorsque l'on connaît $\sigma^2 = Var(X)$, et que $\theta = E(X) = \mu$, l'estimateur utilisé est la moyenne empirique

Estimateur usuel d'une moyenne

Lorsque l'on connaît $\sigma^2 = Var(X)$, et que $\theta = E(X) = \mu$, l'estimateur utilisé est la moyenne empirique

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Estimateur usuel d'une moyenne

Lorsque l'on connaît $\sigma^2 = Var(X)$, et que $\theta = E(X) = \mu$, l'estimateur utilisé est la moyenne empirique

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $E(\overline{X_n}) = \mu = \theta,$

Estimateur usuel d'une moyenne

Lorsque l'on connaît $\sigma^2 = Var(X)$, et que $\theta = E(X) = \mu$, l'estimateur utilisé est la moyenne empirique

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $E(\overline{X_n}) = \mu = \theta$, donc estimateur sans biais.

Estimateur usuel d'une moyenne

Lorsque l'on connaît $\sigma^2 = Var(X)$, et que $\theta = E(X) = \mu$, l'estimateur utilisé est la moyenne empirique

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $E(\overline{X_n}) = \mu = \theta$, donc estimateur sans biais.
- $R_\theta(\overline{X_n}) = V(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Estimateur usuel d'une moyenne

Lorsque l'on connaît $\sigma^2 = Var(X)$, et que $\theta = E(X) = \mu$, l'estimateur utilisé est la moyenne empirique

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $E(\overline{X_n}) = \mu = \theta$, donc estimateur sans biais.
- $R_\theta(\overline{X_n}) = V(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$ tend bien vers 0,

Estimateur usuel d'une moyenne

Lorsque l'on connaît $\sigma^2 = Var(X)$, et que $\theta = E(X) = \mu$, l'estimateur utilisé est la moyenne empirique

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- $E(\overline{X_n}) = \mu = \theta$, donc estimateur sans biais.
- $R_\theta(\overline{X_n}) = V(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$ tend bien vers 0, donc convergent.

Estimateur usuel d'une variance

Estimateur usuel d'une variance

Pour $\theta = Var(X) = \sigma^2$,

Estimateur usuel d'une variance

Pour $\theta = Var(X) = \sigma^2$, l'estimateur est la variance empirique

Estimateur usuel d'une variance

Pour $\theta = Var(X) = \sigma^2$, l'estimateur est la variance empirique

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - (\overline{X_n})^2$$

Estimateur usuel d'une variance

Pour $\theta = Var(X) = \sigma^2$, l'estimateur est la variance empirique

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X_n})^2$$

- $E(S^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \theta,$

Estimateur usuel d'une variance

Pour $\theta = Var(X) = \sigma^2$, l'estimateur est la variance empirique

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X_n})^2$$

- $E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \theta$, donc c'est un estimateur biaisé.

Estimateur usuel d'une variance

Pour $\theta = Var(X) = \sigma^2$, l'estimateur est la variance empirique

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X_n})^2$$

- $E(S^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \theta$, donc c'est un estimateur biaisé. on introduit la **variance empirique corrigée**, qui est sans biais :

Estimateur usuel d'une variance

Pour $\theta = Var(X) = \sigma^2$, l'estimateur est la variance empirique

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - (\overline{X_n})^2$$

- $E(S^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \theta$, donc c'est un estimateur biaisé. on introduit la **variance empirique corrigée**, qui est sans biais :

$$S^{*2} = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$$

Estimateur usuel d'une variance

Pour $\theta = Var(X) = \sigma^2$, l'estimateur est la variance empirique

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X_n})^2$$

- $E(S^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \theta$, donc c'est un estimateur biaisé. on introduit la **variance empirique corrigée**, qui est sans biais :

$$S^{*2} = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$$

- Il y a convergence presque sûre des deux,

Estimateur usuel d'une variance

Pour $\theta = Var(X) = \sigma^2$, l'estimateur est la variance empirique

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X_n})^2$$

- $E(S^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \theta$, donc c'est un estimateur biaisé. on introduit la **variance empirique corrigée**, qui est sans biais :

$$S^{*2} = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$$

- Il y a convergence presque sûre des deux, mais en moyenne quadratique seulement dans le cas gaussien.

Principe des intervalles de confiance

Principe des intervalles de confiance

- Au lieu de prendre une statistique T pour estimer la valeur de θ,

Principe des intervalles de confiance

- Au lieu de prendre une statistique T pour estimer la valeur de θ, on va chercher deux statistiques a et b, qui vont encadrer θ,

Principe des intervalles de confiance

- Au lieu de prendre une statistique T pour estimer la valeur de θ, on va chercher deux statistiques a et b, qui vont encadrer θ, avec une assez grande probabilité

Principe des intervalles de confiance

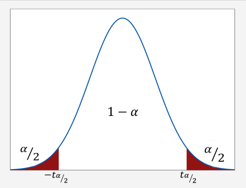
- Au lieu de prendre une statistique T pour estimer la valeur de θ, on va chercher deux statistiques a et b, qui vont encadrer θ, avec une assez grande probabilité (niveau de confiance).

Principe des intervalles de confiance

- Au lieu de prendre une statistique T pour estimer la valeur de θ, on va chercher deux statistiques a et b, qui vont encadrer θ, avec une assez grande probabilité (niveau de confiance).
- On se fixe un niveau de risque (d'erreur) α, et donc un niveau de confiance $1 - \alpha$.

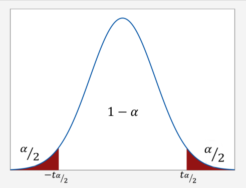
Principe des intervalles de confiance

- Au lieu de prendre une statistique T pour estimer la valeur de θ, on va chercher deux statistiques a et b, qui vont encadrer θ, avec une assez grande probabilité (niveau de confiance).
- On se fixe un niveau de risque (d'erreur) α, et donc un niveau de confiance $1-\alpha$.



Principe des intervalles de confiance

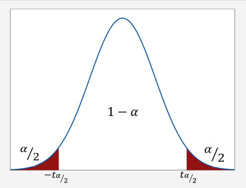
- Au lieu de prendre une statistique T pour estimer la valeur de θ, on va chercher deux statistiques a et b, qui vont encadrer θ, avec une assez grande probabilité (niveau de confiance).
- On se fixe un niveau de risque (d'erreur) α, et donc un niveau de confiance $1-\alpha$.



- On cherche a et b t.q. $P(a \leq \theta \leq b) = 1-\alpha$.

Principe des intervalles de confiance

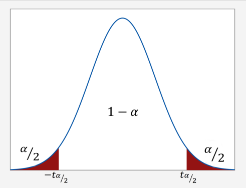
- Au lieu de prendre une statistique T pour estimer la valeur de θ, on va chercher deux statistiques a et b, qui vont encadrer θ, avec une assez grande probabilité (niveau de confiance).
- On se fixe un niveau de risque (d'erreur) α, et donc un niveau de confiance $1 - \alpha$.



- On cherche a et b t.q. $P(a \leq \theta \leq b) = 1 - \alpha$.
- θ se trouve dans l'intervalle $[a, b]$ avec un niveau de confiance de $(1 - \alpha)$,

Principe des intervalles de confiance

- Au lieu de prendre une statistique T pour estimer la valeur de θ, on va chercher deux statistiques a et b, qui vont encadrer θ, avec une assez grande probabilité (niveau de confiance).
- On se fixe un niveau de risque (d'erreur) α, et donc un niveau de confiance $1-\alpha$.



- On cherche a et b t.q. $P(a \leq \theta \leq b) = 1-\alpha$.
- θ se trouve dans l'intervalle $[a, b]$ avec un niveau de confiance de $(1-\alpha)$, ou avec un risque α.
-

IDC en pratique

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur),

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique.

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.
- On commence par fixer le niveau de risque α

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.
- On commence par fixer le niveau de risque α (5 % par défaut).

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.
- On commence par fixer le niveau de risque α (5 % par défaut).
- La connaissance de la loi de T

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.
- On commence par fixer le niveau de risque α (5 % par défaut).
- La connaissance de la loi de T (ou loi asymptotique)

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.
- On commence par fixer le niveau de risque α (5 % par défaut).
- La connaissance de la loi de T (ou loi asymptotique) est indispensable.

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.
- On commence par fixer le niveau de risque α (5 % par défaut).
- La connaissance de la loi de T (ou loi asymptotique) est indispensable.
- On transforme l'écriture de la probabilité désirée

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.
- On commence par fixer le niveau de risque α (5 % par défaut).
- La connaissance de la loi de T (ou loi asymptotique) est indispensable.
- On transforme l'écriture de la probabilité désirée $P(T - \ell \leq \theta \leq T + \ell) =$

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.
- On commence par fixer le niveau de risque α (5 % par défaut).
- La connaissance de la loi de T (ou loi asymptotique) est indispensable.
- On transforme l'écriture de la probabilité désirée $P(T - \ell \leq \theta \leq T + \ell) = P(\theta - \ell \leq T \leq \theta + \ell) = 1 - \alpha$.

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.
- On commence par fixer le niveau de risque α (5 % par défaut).
- La connaissance de la loi de T (ou loi asymptotique) est indispensable.
- On transforme l'écriture de la probabilité désirée $P(T - \ell \leq \theta \leq T + \ell) = P(\theta - \ell \leq T \leq \theta + \ell) = 1 - \alpha$.
- La table de la loi de T permet alors de déterminer ℓ,

IDC en pratique

- On choisit de chercher un intervalle centré en T (bon estimateur), généralement symétrique. $a = T - \ell$ et $b = T + \ell$.
- On commence par fixer le niveau de risque α (5 % par défaut).
- La connaissance de la loi de T (ou loi asymptotique) est indispensable.
- On transforme l'écriture de la probabilité désirée $P(T - \ell \leq \theta \leq T + \ell) = P(\theta - \ell \leq T \leq \theta + \ell) = 1 - \alpha$.
- La table de la loi de T permet alors de déterminer ℓ, et donc a et b.

Un exemple de calcul d'IDC

Un exemple de calcul d'IDC

La taille des étudiants de grandes écoles suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$ cm.

Un exemple de calcul d'IDC

La taille des étudiants de grandes écoles suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$ cm.
Sur un échantillon de 100 étudiants, on a calculé une moyenne empirique de $\overline{x} = 176.8$ cm.

Un exemple de calcul d'IDC

La taille des étudiants de grandes écoles suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$ cm.
Sur un échantillon de 100 étudiants, on a calculé une moyenne empirique de $\overline{x} = 176.8$ cm.
Calculons un IDC à 95 % pour μ :

Un exemple de calcul d'IDC

La taille des étudiants de grandes écoles suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$ cm.
Sur un échantillon de 100 étudiants, on a calculé une moyenne empirique de $\overline{x} = 176.8$ cm.
Calculons un IDC à 95 % pour μ :

- On sait que $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,

Un exemple de calcul d'IDC

La taille des étudiants de grandes écoles suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$ cm.
Sur un échantillon de 100 étudiants, on a calculé une moyenne empirique de $\overline{x} = 176.8$ cm.
Calculons un IDC à 95 % pour μ :

- On sait que $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, donc $Z = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Un exemple de calcul d'IDC

La taille des étudiants de grandes écoles suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$ cm.
Sur un échantillon de 100 étudiants, on a calculé une moyenne empirique de $\overline{x} = 176.8$ cm.
Calculons un IDC à 95 % pour μ :

- On sait que $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, donc $Z = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(T - \ell \leq \theta \leq T + \ell) =$

Un exemple de calcul d'IDC

La taille des étudiants de grandes écoles suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$ cm.
Sur un échantillon de 100 étudiants, on a calculé une moyenne empirique de $\overline{x} = 176.8$ cm.
Calculons un IDC à 95 % pour μ :

- On sait que $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, donc $Z = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(T - \ell \leq \theta \leq T + \ell) = P(\overline{X_n} - \ell \leq \mu \leq \overline{X_n} + \ell)$

$=$

Un exemple de calcul d'IDC

La taille des étudiants de grandes écoles suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$ cm.
Sur un échantillon de 100 étudiants, on a calculé une moyenne empirique de $\overline{x} = 176.8$ cm.
Calculons un IDC à 95 % pour μ :

- On sait que $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, donc $Z = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(T - \ell \leq \theta \leq T + \ell) = P(\overline{X_n} - \ell \leq \mu \leq \overline{X_n} + \ell)$

$=\mathrm{P}\left(\mu - \ell \leq \overline{X_n} \leq \mu + \ell\right) =$

Un exemple de calcul d'IDC

La taille des étudiants de grandes écoles suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$ cm.
Sur un échantillon de 100 étudiants, on a calculé une moyenne empirique de $\overline{x} = 176.8$ cm.
Calculons un IDC à 95 % pour μ :

- On sait que $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, donc $Z = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $P(T - \ell \leq \theta \leq T + \ell) = P(\overline{X_n} - \ell \leq \mu \leq \overline{X_n} + \ell)$

$=\mathrm{P}\left(\mu - \ell \leq \overline{X_n} \leq \mu + \ell\right) = P\left(-\ell \leq \overline{X_n} - \mu \leq +\ell\right)$

$=$

Un exemple de calcul d'IDC

La taille des étudiants de grandes écoles suit une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 4$ cm.
Sur un échantillon de 100 étudiants, on a calculé une moyenne empirique de $\overline{x} = 176.8$ cm.
Calculons un IDC à 95 % pour μ :

- On sait que $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, donc $Z = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- $P(T - \ell \leq \theta \leq T + \ell) = P(\overline{X_n} - \ell \leq \mu \leq \overline{X_n} + \ell)$

$=\mathrm{P}\left(\mu - \ell \leq \overline{X_n} \leq \mu + \ell\right) = P\left(-\ell \leq \overline{X_n} - \mu \leq +\ell\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\ell\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq +\ell\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)$

Un exemple de calcul d'IDC (suite1)

- $P(\overline{X_n} - \ell \leq \mu \leq \overline{X_n} + \ell) = 0.95$

Un exemple de calcul d'IDC (suite1)

- $P(\overline{X_n} - \ell \leq \mu \leq \overline{X_n} + \ell) = 0.95$

$$\Longleftrightarrow P\left(-\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq +\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95$$

Un exemple de calcul d'IDC (suite1)

- $P(\overline{X_n} - \ell \leq \mu \leq \overline{X_n} + \ell) = 0.95$

$$\iff P\left(-\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq +\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95$$

$$\iff$$

Un exemple de calcul d'IDC (suite1)

- $P(\overline{X_n} - \ell \leq \mu \leq \overline{X_n} + \ell) = 0.95$

$$\Longleftrightarrow P\left(-\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq +\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95$$

$$\Longleftrightarrow P\left(-\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq Z \leq +\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95$$

- Or La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne $t_{1-\alpha/2} = 1.96$,

Un exemple de calcul d'IDC (suite1)

- $P(\overline{X_n} - \ell \leq \mu \leq \overline{X_n} + \ell) = 0.95$

$$\Longleftrightarrow P\left(-\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq +\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95$$

$$\Longleftrightarrow P\left(-\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq Z \leq +\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95$$

- Or La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne $t_{1-\alpha/2} = 1.96$, pour avoir $P(-t_{1-\alpha/2} \leq Z \leq +t_{1-\alpha/2}) = 0.95$
- On en déduit : $\ell\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma} = t_{1-\alpha/2}$,

Un exemple de calcul d'IDC (suite1)

- $P(\overline{X_n} - \ell \leq \mu \leq \overline{X_n} + \ell) = 0.95$

$$\Longleftrightarrow P\left(-\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq +\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95$$

$$\Longleftrightarrow P\left(-\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \leq Z \leq +\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95$$

- Or La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne $t_{1-\alpha/2} = 1.96$, pour avoir $P(-t_{1-\alpha/2} \leq Z \leq +t_{1-\alpha/2}) = 0.95$
- On en déduit : $\ell\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = t_{1-\alpha/2}$, et par conséquent : $\ell = t_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Un exemple de calcul d'IDC (suite2)

- Les extrémités de l'IDC sont :

Un exemple de calcul d'IDC (suite2)

- Les extrémités de l'IDC sont :
  $a = \overline{x_n} - \ell = 176.8 - 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 176.02$

Un exemple de calcul d'IDC (suite2)

- Les extrémités de l'IDC sont :
  $a = \overline{x_n} - \ell = 176.8 - 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 176.02$ et
  $b = \overline{x_n} + \ell = 176.8 + 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 177.58$

Un exemple de calcul d'IDC (suite2)

- Les extrémités de l'IDC sont :
  $a = \overline{x_n} - \ell = 176.8 - 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 176.02$ et
  $b = \overline{x_n} + \ell = 176.8 + 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 177.58$
- On peut donc affirmer que :

Un exemple de calcul d'IDC (suite2)

- Les extrémités de l'IDC sont :
  $a = \overline{x_n} - \ell = 176.8 - 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 176.02$ et
  $b = \overline{x_n} + \ell = 176.8 + 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 177.58$
- On peut donc affirmer que : avec un niveau de confiance de 95 %, la taille moyenne μ de tous les étudiants de grandes écoles est comprise entre 176.02 et 177.58.
- Le niveau de confiance 95 % signifie que :

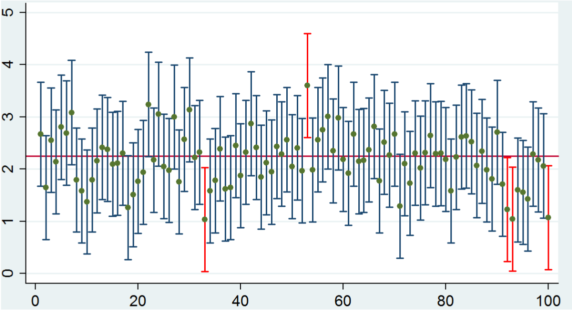
Un exemple de calcul d'IDC (suite2)

- Les extrémités de l'IDC sont :
  $a = \overline{x_n} - \ell = 176.8 - 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 176.02$ et
  $b = \overline{x_n} + \ell = 176.8 + 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 177.58$
- On peut donc affirmer que : avec un niveau de confiance de 95 %, la taille moyenne μ de tous les étudiants de grandes écoles est comprise entre 176.02 et 177.58.
- Le niveau de confiance 95 % signifie que : si on répète l'expérience précédente 100 fois, on obtiendra 100 intervalles différents,

Un exemple de calcul d'IDC (suite2)

- Les extrémités de l'IDC sont :
  $a = \overline{x_n} - \ell = 176.8 - 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 176.02$ et
  $b = \overline{x_n} + \ell = 176.8 + 1.96\frac{4}{\sqrt{100}} = 177.58$
- On peut donc affirmer que : avec un niveau de confiance de 95 %, la taille moyenne μ de tous les étudiants de grandes écoles est comprise entre 176.02 et 177.58.
- Le niveau de confiance 95 % signifie que : si on répète l'expérience précédente 100 fois, on obtiendra 100 intervalles différents, dont environ 5 ne contiendront pas la vraie valeur de μ.

Un exemple de calcul d'IDC (figure)



Loi du khi deux

Loi du khi deux

- Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de $\mathcal{N}(0,1)$,

Loi du khi deux

- Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de $\mathcal{N}(0,1)$, alors
  $$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Loi du khi deux

- Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de $\mathcal{N}(0,1)$, alors $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ suit la loi du khi deux à n degrés de liberté.

Loi du khi deux

- Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de $\mathcal{N}(0,1)$, alors $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ suit la loi du khi deux à n degrés de liberté.
- On note :

Loi du khi deux

- Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de $\mathcal{N}(0,1)$, alors $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ suit la loi du khi deux à n degrés de liberté.
- On note : $Y \sim \chi_n^2$.

Loi du khi deux

- Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de $\mathcal{N}(0,1)$, alors $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ suit la loi du khi deux à n degrés de liberté.
- On note : $Y \sim \chi_n^2$.
- La table de cette loi qui vous sera fournie ressemblera à :

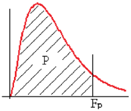
Loi du khi deux

- Si $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon de $\mathcal{N}(0,1)$, alors $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ suit la loi du khi deux à n degrés de liberté.
- On note : $Y \sim \chi^2_n$.
- La table de cette loi qui vous sera fournie ressemblera à :

1 : Fractiles de la loi du χ^2_ν

Cette table donne les fractiles F_P de la loi de khi-deux

à ν degrés de liberté : $P = P(\chi^2_\nu \leq F_P)$



ν \ P	0.010	0.020	0.025	0.050	0.100	0.150	0.200	0.800	0.900	0.950	0.975	0.980	0.990
1	0.000	0.001	0.001	0.004	0.016	0.036	0.064	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.64
2	0.020	0.040	0.051	0.103	0.211	0.325	0.446	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21
3	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	0.798	1.005	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.35

Loi de Student

Loi de Student

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$,

Loi de Student

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, si $Y \sim \chi^2_n$

Loi de Student

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, si $Y \sim \chi_n^2$ et si X et Y sont indépendantes,

Loi de Student

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, si $Y \sim \chi^2_n$ et si X et Y sont indépendantes, alors $T = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$

Loi de Student

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, si $Y \sim \chi^2_n$ et si X et Y sont indépendantes, alors $T = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit la loi de Student à n degrés de liberté.

Loi de Student

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, si $Y \sim \chi_n^2$ et si X et Y sont indépendantes, alors $T = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit la loi de Student à n degrés de liberté.
- On note :

Loi de Student

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, si $Y \sim \chi^2_n$ et si X et Y sont indépendantes, alors $T = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit la loi de Student à n degrés de liberté.
- On note : $T \sim T_n$.

Loi de Student

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, si $Y \sim \chi_n^2$ et si X et Y sont indépendantes, alors $T = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit la loi de Student à n degrés de liberté.
- On note : $T \sim T_n$.
- La table de cette loi qui vous sera fournie ressemblera à :

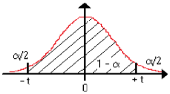
Loi de Student

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, si $Y \sim \chi^2_n$ et si X et Y sont indépendantes, alors $T = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$ suit la loi de Student à n degrés de liberté.
- On note : $T \sim T_n$.
- La table de cette loi qui vous sera fournie ressemblera à :

Table de la Loi de Student

Cette table donne les fractiles de la loi de Student à ν degrés de liberté : valeur t ayant la probabilité α d'être dépassée en valeur absolue :

$$P(|T_\nu| \leq t) = P(-t \leq T_\nu \leq t) = 1 - \alpha.$$
$$P(|T_\nu| > t) = 1 - P(|T_\nu| \leq t) = \alpha$$



ν \ α	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.706	31.821	63.656	127.32	636.58
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.92	4.3027	6.9645	9.925	14.089	31.6
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408	7.4532	12.924
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.941	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041	5.5975	8.6101

IDC pour une proportion

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$,

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$.

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique $F_n =$ bon estimateur de $\theta = p$.

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique $F_n =$ bon estimateur de $\theta = p$.

- Pour n assez grand, le TCL garantit que $F_n \sim \mathcal{N}(p, \sigma^2)$,

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique $F_n =$ bon estimateur de $\theta = p$.

- Pour n assez grand, le TCL garantit que $F_n \sim \mathcal{N}(p, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} \simeq \frac{f_n(1-f_n)}{n}$.

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique F_n = bon estimateur de $\theta = p$.

- Pour n assez grand, le TCL garantit que $F_n \sim \mathcal{N}(p, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} \simeq \frac{f_n(1-f_n)}{n}$.
- On en déduit que $Z = \dfrac{F_n - p}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique F_n = bon estimateur de $\theta = p$.

- Pour n assez grand, le TCL garantit que $F_n \sim \mathcal{N}(p, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} \simeq \frac{f_n(1-f_n)}{n}$.
- On en déduit que $Z = \dfrac{F_n - p}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0, 1)$ donne t tel que : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique F_n = bon estimateur de $\theta = p$.

- Pour n assez grand, le TCL garantit que $F_n \sim \mathcal{N}(p, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} \simeq \frac{f_n(1-f_n)}{n}$.
- On en déduit que $Z = \dfrac{F_n - p}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tel que :
  $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$. ($t = 1.96$ pour $\alpha = 5$ % par exple).

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique F_n = bon estimateur de $\theta = p$.

- Pour n assez grand, le TCL garantit que $F_n \sim \mathcal{N}(p, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} \simeq \frac{f_n(1-f_n)}{n}$.
- On en déduit que $Z = \dfrac{F_n - p}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tel que : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$. ($t = 1.96$ pour $\alpha = 5$ % par exple).
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right)$

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique F_n = bon estimateur de $\theta = p$.

- Pour n assez grand, le TCL garantit que $F_n \sim \mathcal{N}(p, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} \simeq \frac{f_n(1-f_n)}{n}$.
- On en déduit que $Z = \dfrac{F_n - p}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0, 1)$ donne t tel que : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$. ($t = 1.96$ pour $\alpha = 5$ % par exple).
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{f_n - p}{\sigma} \leq t\right)$

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique $F_n =$ bon estimateur de $\theta = p$.

- Pour n assez grand, le TCL garantit que $F_n \sim \mathcal{N}(p, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} \simeq \frac{f_n(1-f_n)}{n}$.
- On en déduit que $Z = \dfrac{F_n - p}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0, 1)$ donne t tel que : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$. ($t = 1.96$ pour $\alpha = 5$ % par exple).
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{f_n - p}{\sigma} \leq t\right)$

$= \mathrm{P}\ \left(f_n - t\sigma \leq p \leq f_n + t\sigma\right)$

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique $F_n =$ bon estimateur de $\theta = p$.

- Pour n assez grand, le TCL garantit que $F_n \sim \mathcal{N}(p, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} \simeq \frac{f_n(1-f_n)}{n}$.
- On en déduit que $Z = \dfrac{F_n - p}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0, 1)$ donne t tel que : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$. ($t = 1.96$ pour $\alpha = 5$ % par exple).
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{f_n - p}{\sigma} \leq t\right)$

$= \mathrm{P}\ \left(f_n - t\sigma \leq p \leq f_n + t\sigma\right)$

- L'intervalle de confiance recherché est donc :

IDC pour une proportion

$X \sim \mathcal{B}(p)$, et $n > 30$. La fréquence empirique F_n = bon estimateur de $\theta = p$.

- Pour n assez grand, le TCL garantit que $F_n \sim \mathcal{N}(p, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} \simeq \frac{f_n(1-f_n)}{n}$.
- On en déduit que $Z = \dfrac{F_n - p}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0, 1)$ donne t tel que : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$. ($t = 1.96$ pour $\alpha = 5$ % par exple).
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{f_n - p}{\sigma} \leq t\right)$

  $= \mathrm{P}\ \left(f_n - t\sigma \leq p \leq f_n + t\sigma\right)$
- L'intervalle de confiance recherché est donc :

$$I = [f_n - t\sigma\ ;\ f_n + t\sigma]$$

IDC pour une moyenne, variance connue

IDC pour une moyenne, variance connue

X gaussien ou n assez grand ($n > 30$),

IDC pour une moyenne, variance connue

X gaussien ou n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de = $\mu = E(X)$

IDC pour une moyenne, variance connue

X gaussien ou n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ connue.

IDC pour une moyenne, variance connue

X gaussien ou n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ connue.

- $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ou encore que

IDC pour une moyenne, variance connue

X gaussien ou n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ connue.

- $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ou encore que $\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

IDC pour une moyenne, variance connue

X gaussien ou n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de = $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ connue.

- $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ou encore que $\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- La table de $\mathcal{N}(0, 1)$ donne t tq : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.

IDC pour une moyenne, variance connue

X gaussien ou n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ connue.

- $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ou encore que $\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tq : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right)$

IDC pour une moyenne, variance connue

X gaussien ou n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ connue.

- $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ou encore que $\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tq : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq t\right)$

IDC pour une moyenne, variance connue

X gaussien ou n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ connue.

- $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ou encore que $\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tq : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq t\right)$

$= \mathrm{P}\left(\bar{x}_n - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

IDC pour une moyenne, variance connue

X gaussien ou n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de = $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ connue.

- $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ou encore que $\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tq : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{\overline{x_n} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq t\right)$
  $= \mathrm{P}\left(\bar{x}_n - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

- on obtient comme intervalle de confiance :

$$I = \left[\bar{x}_n - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x}_n + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par S^{*2},

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par S^{*2}, estimateur non biaisé.

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de = $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par S^{*2}, estimateur non biaisé.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{S^*}\sqrt{n} \sim T_{n-1}$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de = $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par S^{*2}, estimateur non biaisé.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{S^*}\sqrt{n} \sim T_{n-1}$ loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté (d.d.l.)

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de = $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par S^{*2}, estimateur non biaisé.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{S^*}\sqrt{n} \sim T_{n-1}$ loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté (d.d.l.)
- La table de T_{n-1} donne t tq : $P(-t \leq T_{n-1} \leq t) = 1 - \alpha$.

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par S^{*2}, estimateur non biaisé.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{S^*}\sqrt{n} \sim T_{n-1}$ loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté (d.d.l.)
- La table de T_{n-1} donne t tq : $P(-t \leq T_{n-1} \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Y \leq t\right)$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par S^{*2}, estimateur non biaisé.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{S^*}\sqrt{n} \sim T_{n-1}$ loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté (d.d.l.)
- La table de T_{n-1} donne t tq : $P(-t \leq T_{n-1} \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P(-t \leq Y \leq t) = P\left(-t \leq \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \leq t\right)$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de = $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par S^{*2}, estimateur non biaisé.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{S^*}\sqrt{n} \sim T_{n-1}$ loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté (d.d.l.)
- La table de T_{n-1} donne t tq : $P(-t \leq T_{n-1} \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Y \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{\overline{x_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \leq t\right)$

$= \mathrm{P}\left(\bar{x}_n - t\frac{s^*}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + t\frac{s^*}{\sqrt{n}}\right)$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 1

On se limite à X gaussien et n petit ($n \leq 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par S^{*2}, estimateur non biaisé.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{S^*}\sqrt{n} \sim T_{n-1}$ loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté (d.d.l.)
- La table de T_{n-1} donne t tq : $P(-t \leq T_{n-1} \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P(-t \leq Y \leq t) = P\left(-t \leq \dfrac{\overline{x_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \leq t\right)$

$= \mathrm{P}\left(\bar{x}_n - t\frac{s^*}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + t\frac{s^*}{\sqrt{n}}\right)$

- on obtient comme intervalle de confiance :

$$I = \left[\bar{x}_n - t\frac{s^*}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x}_n + t\frac{s^*}{\sqrt{n}}\right]$$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$),

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par s^{*2},

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par s^{*2}, estimation non biaisée.

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par s^{*2}, estimation non biaisée.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par s^{*2}, estimation non biaisée.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tq : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par s^{*2}, estimation non biaisée.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tq : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right)$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$), $\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par s^{*2}, estimation non biaisée.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tq : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \leq t\right)$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par s^{*2}, estimation non biaisée.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tq : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \leq t\right)$

$$= \mathrm{P}\left(\bar{x}_n - t\frac{s^*}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + t\frac{s^*}{\sqrt{n}}\right)$$

IDC pour une moyenne, variance inconnue 2

Dans le cas X non gaussien et pour n assez grand ($n > 30$),
$\overline{X_n}$ = estimateur de $= \mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$ inconnue.

- On remplace σ^2 par s^{*2}, estimation non biaisée.
- $Y = \dfrac{\overline{X_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
- La table de $\mathcal{N}(0,1)$ donne t tq : $P(-t \leq Z \leq t) = 1 - \alpha$.
- $1 - \alpha = P\left(-t \leq Z \leq t\right) = P\left(-t \leq \dfrac{\overline{x_n} - \mu}{s^*}\sqrt{n} \leq t\right)$

  $= \mathrm{P}\left(\bar{x}_n - t\frac{s^*}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}_n + t\frac{s^*}{\sqrt{n}}\right)$

- on obtient comme intervalle de confiance :

$$I = \left[\bar{x}_n - t\frac{s^*}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x}_n + t\frac{s^*}{\sqrt{n}}\right]$$

IDC pour une variance

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien.

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue :

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue : Estimateur utilisé : $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue : Estimateur utilisé : $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ et la loi utile est :

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue : Estimateur utilisé : $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ et la loi utile est : $n\dfrac{V_1}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue : Estimateur utilisé :
  $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ et la loi utile est :
  $n\dfrac{V_1}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ loi du khi-2 à n degrés de liberté

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue : Estimateur utilisé :
  $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ et la loi utile est :
  $n\dfrac{V_1}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ loi du khi-2 à n degrés de liberté
- 2^{eme} cas : moyenne μ inconnue :

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue : Estimateur utilisé :
  $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ et la loi utile est :
  $n\frac{V_1}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ loi du khi-2 à n degrés de liberté
- 2^{eme} cas : moyenne μ inconnue : Estimateur utilisé :
  $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$ ou $S^{*2} = \frac{n}{n-1}S^2$,

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue : Estimateur utilisé :
  $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ et la loi utile est :
  $n\dfrac{V_1}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ loi du khi-2 à n degrés de liberté
- 2^{eme} cas : moyenne μ inconnue : Estimateur utilisé :
  $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$ ou $S^{*2} = \dfrac{n}{n-1}S^2$, et la loi utile est :

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue : Estimateur utilisé :
  $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ et la loi utile est :
  $n\dfrac{V_1}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ loi du khi-2 à n degrés de liberté
- 2^{eme} cas : moyenne μ inconnue : Estimateur utilisé :
  $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$ ou $S^{*2} = \dfrac{n}{n-1}S^2$, et la loi utile est :
  $n\dfrac{S^2}{\sigma^2} = (n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ loi du khi-2 à $(n-1)$ d.d.l.

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue : Estimateur utilisé :
  $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ et la loi utile est :
  $n\dfrac{V_1}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ loi du khi-2 à n degrés de liberté
- 2^{eme} cas : moyenne μ inconnue : Estimateur utilisé :
  $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$ ou $S^{*2} = \dfrac{n}{n-1}S^2$, et la loi utile est :
  $n\dfrac{S^2}{\sigma^2} = (n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ loi du khi-2 à $(n-1)$ d.d.l.
- Voici un exemple de calcul :

IDC pour une variance

On ne peut traiter que le cas gaussien. Les lois utilisées différent selon deux cas :

- 1^{er} cas : moyenne μ connue : Estimateur utilisé :
  $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ et la loi utile est :
  $n\dfrac{V_1}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ loi du khi-2 à n degrés de liberté
- 2^{eme} cas : moyenne μ inconnue : Estimateur utilisé :
  $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$ ou $S^{*2} = \dfrac{n}{n-1}S^2$, et la loi utile est :
  $n\dfrac{S^2}{\sigma^2} = (n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ loi du khi-2 à $(n-1)$ d.d.l.
- Voici un exemple de calcul :

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles. Cette fois μ et σ sont inconnus.

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.
Cette fois μ et σ sont inconnus.
Un échantillon de 25 étudiants a donné $\overline{x} = 177.1$ cm,

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.
Cette fois μ et σ sont inconnus.
Un échantillon de 25 étudiants a donné $\overline{x} = 177.1$ cm, et $s^* = 3.8$.

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.
Cette fois μ et σ sont inconnus.
Un échantillon de 25 étudiants a donné $\overline{x} = 177.1$ cm, et $s^* = 3.8$.
Calculons un IDC à 95 % pour la variance σ^2 :

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.
Cette fois μ et σ sont inconnus.
Un échantillon de 25 étudiants a donné $\overline{x} = 177.1$ cm, et $s^* = 3.8$.
Calculons un IDC à 95 % pour la variance σ^2 :

- On sait que $(n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$,

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.
Cette fois μ et σ sont inconnus.
Un échantillon de 25 étudiants a donné $\overline{x} = 177.1$ cm, et $s^* = 3.8$.
Calculons un IDC à 95 % pour la variance σ^2 :

- On sait que $(n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, donc $Y = 24\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{24}$.

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.
Cette fois μ et σ sont inconnus.
Un échantillon de 25 étudiants a donné $\overline{x} = 177.1$ cm, et $s^* = 3.8$.
Calculons un IDC à 95 % pour la variance σ^2 :

- On sait que $(n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, donc $Y = 24\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{24}$.
- La table de χ^2_{24} permet de trouver $t_1 = 12.4$

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.
Cette fois μ et σ sont inconnus.
Un échantillon de 25 étudiants a donné $\overline{x} = 177.1$ cm, et $s^* = 3.8$.
Calculons un IDC à 95 % pour la variance σ^2 :

- On sait que $(n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, donc $Y = 24\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{24}$.
- La table de χ^2_{24} permet de trouver $t_1 = 12.4$ t.q. $0.025 = P(Y \leq t_1)$.

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.
Cette fois μ et σ sont inconnus.
Un échantillon de 25 étudiants a donné $\overline{x} = 177.1$ cm, et $s^* = 3.8$.
Calculons un IDC à 95 % pour la variance σ^2 :

- On sait que $(n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, donc $Y = 24\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{24}$.
- La table de χ^2_{24} permet de trouver $t_1 = 12.4$ t.q. $0.025 = P(Y \leq t_1)$.
- La table de χ^2_{24} permet de trouver $t_2 = 39.36$

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.
Cette fois μ et σ sont inconnus.
Un échantillon de 25 étudiants a donné $\overline{x} = 177.1$ cm, et $s^* = 3.8$.
Calculons un IDC à 95 % pour la variance σ^2 :

- On sait que $(n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, donc $Y = 24\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{24}$.
- La table de χ^2_{24} permet de trouver $t_1 = 12.4$ t.q. $0.025 = P(Y \leq t_1)$.
- La table de χ^2_{24} permet de trouver $t_2 = 39.36$ t.q. $0.975 = P(Y \leq t_2)$.

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance

On reprend l'exemple de la taille des étudiants de grandes écoles.
Cette fois μ et σ sont inconnus.
Un échantillon de 25 étudiants a donné $\overline{x} = 177.1$ cm, et $s^* = 3.8$.
Calculons un IDC à 95 % pour la variance σ^2 :

- On sait que $(n-1)\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, donc $Y = 24\dfrac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{24}$.
- La table de χ^2_{24} permet de trouver $t_1 = 12.4$ t.q. $0.025 = P(Y \leq t_1)$.
- La table de χ^2_{24} permet de trouver $t_2 = 39.36$ t.q. $0.975 = P(Y \leq t_2)$.

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance (suite)

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance (suite)

- On déduit :

  $0.95 = P(12.4 \leq Y \leq 39.36) =$

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance (suite)

- On déduit :
  $0.95 = P(12.4 \leq Y \leq 39.36) = P(12.4 \leq 24\frac{s^{*2}}{\sigma^2} \leq 39.36)$.

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance (suite)

- On déduit :
  $$0.95 = P(12.4 \leq Y \leq 39.36) = P(12.4 \leq 24\frac{s^{*2}}{\sigma^2} \leq 39.36).$$
- On inverse l'encadrement :

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance (suite)

- On déduit :
  $$0.95 = P(12.4 \leq Y \leq 39.36) = P(12.4 \leq 24\frac{s^{*2}}{\sigma^2} \leq 39.36).$$
- On inverse l'encadrement :
  $$0.95 = P\left(\frac{1}{39.36} \leq \frac{\sigma^2}{24s^{*2}} \leq \frac{1}{12.4}\right).$$

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance (suite)

- On déduit :
  $$0.95 = P(12.4 \leq Y \leq 39.36) = P(12.4 \leq 24\frac{s^{*2}}{\sigma^2} \leq 39.36).$$
- On inverse l'encadrement :
  $$0.95 = P\left(\frac{1}{39.36} \leq \frac{\sigma^2}{24s^{*2}} \leq \frac{1}{12.4}\right).$$
- Finalement $0.95 = P\left(\frac{24(3.8)^2}{39.36} \leq \sigma^2 \leq \frac{24(3.8)^2}{12.4}\right).$

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance (suite)

- On déduit :
  $0.95 = P(12.4 \leq Y \leq 39.36) = P(12.4 \leq 24\dfrac{s^{*2}}{\sigma^2} \leq 39.36)$.
- On inverse l'encadrement :
  $0.95 = P\left(\dfrac{1}{39.36} \leq \dfrac{\sigma^2}{24s^{*2}} \leq \dfrac{1}{12.4}\right)$.
- Finalement $0.95 = P\left(\dfrac{24(3.8)^2}{39.36} \leq \sigma^2 \leq \dfrac{24(3.8)^2}{12.4}\right)$.
- $0.95 = P(8.8 \ \leq \sigma^2 \leq \ 27.9)$.

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance (suite)

- On déduit :
  $0.95 = P(12.4 \leq Y \leq 39.36) = P(12.4 \leq 24\dfrac{s^{*2}}{\sigma^2} \leq 39.36)$.
- On inverse l'encadrement :
  $0.95 = P\left(\dfrac{1}{39.36} \leq \dfrac{\sigma^2}{24s^{*2}} \leq \dfrac{1}{12.4}\right)$.
- Finalement $0.95 = P\left(\dfrac{24(3.8)^2}{39.36} \leq \sigma^2 \leq \dfrac{24(3.8)^2}{12.4}\right)$.
- $0.95 = P(8.8 \leq \sigma^2 \leq 27.9)$.
- L'IDC recherché est $[8.8\ ;\ 27.9]$.

Un exemple de calcul d'IDC pour une variance (suite)

- On déduit :
  $0.95 = P(12.4 \leq Y \leq 39.36) = P(12.4 \leq 24\dfrac{s^{*2}}{\sigma^2} \leq 39.36)$.
- On inverse l'encadrement :
  $0.95 = P\left(\dfrac{1}{39.36} \leq \dfrac{\sigma^2}{24s^{*2}} \leq \dfrac{1}{12.4}\right)$.
- Finalement $0.95 = P\left(\dfrac{24(3.8)^2}{39.36} \leq \sigma^2 \leq \dfrac{24(3.8)^2}{12.4}\right)$.
- $0.95 = P(8.8 \ \leq \sigma^2 \leq \ 27.9)$.
- L'IDC recherché est $[8.8\ ;\ 27.9]$.
- En prenant la racine, on peut aussi donner un IDC pour σ.