Exercice 1. -

Une machine produit des billes de roulement de diamètre fixe. Si elle fonctionne normalement, il y a une proportion de 5% de billes défectueuses. Si elle est déréglée, la proportion de billes défectueuses passe à 10%.
Avant d'envoyer une commande à son client, le fabricant teste un lot de $n = 500$ billes. Soit X la variable aléatoire valant 1 si la bille est défectueuse et 0 sinon. On sait que X suit une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$ où $p = 0.05$ si la machine fonctionne correctement et $p = 0.1$ si la machine est déréglée.

1. Il décide de ne pas livrer son client si la machine est déréglée, c'est-à-dire si le nombre de billes défectueuses est supérieur ou égal à 50 ($= 500 \times 10\%$).
   (a) Exprimer les hypothèses (H_0) et (H_1) ainsi que les risques de première et de deuxième espèce.
   (b) Préciser la variable de décision et la valeur du seuil.
   (c) Calculer le risque de première espèce (α).
   (d) Calculer la puissance du test et en déduire si un client doit acheter ou non un lot ayant subi un tel test.
2. Devant les protestations du client, le fabricant re-définit son test en imposant un risque de première espèce de $\alpha = 1\%$.
   (a) Déterminer la région critique du test.
   (b) Calculer sa puissance.
   (c) Enoncer les règles de décision avec les erreurs associées.
   (d) Le client sera-t-il enclin à accepter ce nouveau test.

Exercice 2. -

Les habitants d'une région aéroportuaire se plaignent que le bruit des avions dépasse la limite autorisée de 80 décibels en moyenne imposée par la législation. On admet que l'intensité du bruit causé par les avions est une variable aléatoire X de loi gaussienne d'espérance μ et de variance $\sigma^2 = 64$.
On mesure un échantillon journalier de $n = 16$ variables aléatoires indépendantes $(X_1\ ,\ \ldots, X_n)$ de l'intensité du bruit, et on effectue le test statistique suivant :

$$\begin{cases} (H_0) & \mu = \mu_0 = 80 \text{ décibels} \\ (H_1) & \mu = \mu_1 = 85 \text{ décibels} \end{cases}$$

1. Expliciter les risques de première et deuxième espèces. De quel point de vue est fait ce test ? Celui des habitants ou celui des responsables de l'aéroport ?
2. Quelle statistique (variable de décision) faut-il choisir et quelle est sa loi ?
3. Déterminer graphiquement l'allure de la région critique et représenter sur le graphique les erreurs de première et deuxième espèces.
4. Calculer le seuil de la région critique pour un risque $\alpha = 5\%$.
5. Calculer la puissance du test.
6. Enoncer les règles de décision avec les probabilités d'erreur.
7. La moyenne calculée sur l'échantillon est $\overline{x} = 83$ décibels. Les habitants ont-ils raison de se plaindre ? Le test d'hypothèses ainsi établi leur est-il favorable ou défavorable ?
8. Combien faudrait-il faire de relevés journaliers, pour que le risque de deuxième espèce soit de 5% ?
9. Quelle serait alors le seuil de décision ?

Exercice 3. -

Un fabricant de conserves de petits pois produit des boîtes où l'étiquette annonce un poids net égoutté de 560 gr. Il souhaite construire un test pour s'assurer, d'une part qu'il n'aura pas d'ennui à l'issu d'un contrôle éventuel, et d'autre part, que le poids moyen des boîtes n'est pas excédentaire. Pour ce faire, il compte prélever un lot de $n = 25$ boites et relever le poids moyen ainsi que l'écart-type.

1. Déterminer les hypothèses et expliciter les risques de première et deuxième espèces.
2. Quelle est la statistique (variable de décision) ? Préciser sa loi.
3. Déterminer graphiquement l'allure de la région critique.
4. Calculer les seuils de la région critique sachant que le risque de première espèce est de 10%.
5. Peut-on calculer la puissance du test ?
6. Il prélève un lot de 25 boites et il pèse un poids moyen de $\overline{x} = 556$ gr avec un écart-type empirique $s^* = 10$ gr . Quelle décision doit-il prendre ?

Exercice 4. -

Sur un échantillon de 900 naissances, on constate qu'il y a 470 garçons. Un généticien décide d'utiliser ces données pour tester si la proportion de garçons est significativement plus importante que la proportion de filles dans cette population.
Quelle sera sa conclusion avec un risque de 5% ?

Exercice 5. -

Un fabricant produit des piles dont la durée de vie suit une loi normale d'espérance 80 h et d'écart-type 6.44 h.
Suite à des réclamations, il veut vérifier si la qualité a baissé ou non. Dans le cas où la moyenne de la durée de vie tombe à 75 h, il sera obligé de baisser le prix de vente.
Construire un test lui permettant de prendre une décision sachant qu'il veut que le risque de déclasser des piles de bonne qualité soit de $2,5\%$ et le risque de vendre des piles non conformes soit de 5%.

Exercice 6. -

L'objectif de cet exercice est d'apprendre à utiliser un test d'hypothèses avec le logiciel R et à interpréter le résultat. Pour cela, il suffit de :

- Connaitre les hypothèses (H_0) et (H_1)
- Vérifier les conditions d'applications du test
- Savoir lire une p-valeur

On rappelle que la p-valeur indique le niveau α minimum du risque de première espèce à partir duquel l'hypothèse (H_0) est rejetée, connaissant la valeur prise par la variable de décision sur l'échantillon,

Si la p-valeur est inférieure à la valeur du seuil préalablement défini (traditionnellement 5 % ou 1 %), on rejette (H_0).

Nous utiliserons ici le test de Student.
S'il est utilisé pour comparer une moyenne μ à une valeur théorique : (H_0) : $\mu = \mu_0$, alors il s'écrit de la façon suivante, ***t.test(data ,mu=μ_0,...).***
Il faut préciser si le test est unilatéral avec l'argument ***alternative = "less"*** ou *"**greater**"* ou bilatéral avec l'argument ***alternative = "two.sided"***.
Le test n'est valable que pour les échantillons gaussiens. Si les échantillons ne sont pas gaussiens, il est peut être possible d'appliquer le test s'ils sont suffisamment grands pour que le théorème de la limite centrale s'applique.
Dans le fichier **Echantillons.zip**, vous trouverez des échantillons de valeurs entre 0 et 1.

1. Calculez la moyenne et l'écart-type des échantillons.
2. Pensez-vous que les conditions d'applications du test de Student soient vérifiées sur ces échantillons ?

3. Pour les échantillons 1, 2, 3 testez : $(H_0) : \mu = 0.5$ contre $(H_1) : \mu > 0.5$
   Comparez l'évolution de la p-valeur en fonction de la moyenne des échantillons.
4. Effectuez le même test pour l'échantillon 4. Que constatez-vous ? Quel test faut-il faire ?
5. Effectuez le même test pour l'échantillon 5. Comment expliquez-vous que la conclusion soit différente de celle de l'échantillon 1 ?