

# TP Image - Acquisition d'image à partir d'une caméra: *calibrage de l'appareil*

C. Burnier

September 21, 2015

## 1 Introduction

De nombreuses applications requièrent la connaissance précise de l'appareil de mesure. Par exemple, considérons une scène dont on possède quelques images prises avec un appareil photo numérique. On souhaite retrouver la taille, la position... des objets de la scène. Pour cela, il faudra connaître parfaitement le système projectif qui associe à tout point de l'espace un point de l'image.

Le but de ce TP est de présenter une méthode de calibrage classique permettant de déduire les paramètres du système projectif.

## 2 Du référentiel Objet vers le référentiel Caméra: paramètres extrinsèques

Dans ce paragraphe, nous introduisons le référentiel lié à l'objet et celui lié à la caméra.

- **Le référentiel objet** est lié à la scène à photographier. Dans ce repère noté  $\mathcal{R}^o = (e_1^o, e_2^o, e_3^o)$ , un point aura pour coordonnées :  $(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ .
- **Le référentiel caméra** a son origine au centre de projection. Dans ce repère noté  $\mathcal{R}^c = (e_1^c, e_2^c, e_3^c)$ , un point aura pour coordonnées :  $(x_1^c, x_2^c, x_3^c)$ .

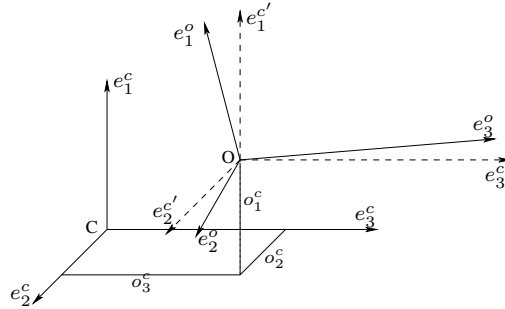


Figure 1: référentiel objet et référentiel caméra.

On passe d'un système à l'autre par translations et rotations :

$$\begin{pmatrix} x_1^c \\ x_2^c \\ x_3^c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & o_1^c \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & o_2^c \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & o_3^c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ x_3^o \\ 1 \end{pmatrix}$$

où  $(o_1^c, o_2^c, o_3^c)$  désignent les composantes du vecteur de translation et  $r_{ij}$  les composantes de la rotation. Nous donnons en annexe la définition de ces derniers. Nous appellerons  $M_{ext}$  la matrice précédente.

### 3 Du référentiel Caméra aux coordonnées image: paramètres intrinsèques

Nous cherchons maintenant comment déduire des coordonnées dans  $\mathcal{R}^c$ , les coordonnées  $(u_1, u_2)$  dans le repère image  $\mathcal{R}^i$ . Celles-ci sont exprimées en pixels.

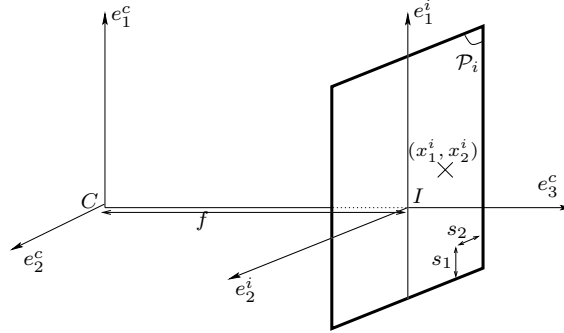


Figure 2: Du référentiel caméra aux coordonnées image.

Soit  $f$  la focale, et  $(s_1, s_2)$  les facteurs d'échelle (en mm/pixel par exemple). Les paramètres recherchés seront les suivants:

- $(i_1, i_2)$  : coordonnées (en pixels) de la projection de C sur l'image,
- $f_1 = f/s_1$  : focale exprimée en “pixel-ligne”,
- $f_2 = f/s_2$  : focale exprimée en “pixel-colonne”.

Le passage des coordonnées caméra aux coordonnées image est donné par la transformation suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & i_1 & 0 \\ 0 & f_2 & i_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^c \\ x_2^c \\ x_3^c \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous appellerons  $M_{int}$  la matrice précédente.

## 4 Méthode de Calibrage

### 4.1 Mire de Calibrage

Afin d'identifier les paramètres du système projectif, nous utilisons une “mire de calibrage”. Celle-ci est constituée d'objets dont la position et la taille dans le repère  $\mathcal{R}^o$  sont connues. Dans notre cas, nous utiliserons 10 billes réparties sur deux plans perpendiculaires, comme le montre la figure 3.

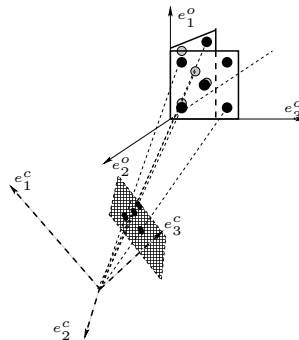


Figure 3: mire de calibrage constituée de 10 billes non coplanaires.

Une image numérique de la mire est prise, permettant ainsi d'associer aux coordonnées de chaque bille dans  $\mathcal{R}^o$ , ses coordonnées  $(u_1, u_2)$  dans l'image. Ces 10 points permettront d'identifier les paramètres intrinsèques et extrinsèques.

## 4.2 Identification des paramètres

### 4.2.1 Appariement points objet-points image

La première étape consiste à appairer une bille<sup>1</sup> et son image, c'est à dire :

1. à isoler, sur l'image, la projection des 10 billes,
2. à les identifier (c'est à dire associer à chaque "ellipse", la bille dont elle est l'image),
3. à trouver les coordonnées  $(u_1, u_2)$  de leur centre.

Cette étape met en jeu, entre autres, des méthodes de seuillage et de labélisation. Elle ne sera pas demandée.

### 4.2.2 Estimation d'un vecteur intermédiaire $L$ , lié aux paramètres

D'après les définitions des matrices  $M_{ext}$  et  $M_{int}$ , il s'ensuit :

$$\begin{aligned} u_1 &= i_1 + f_1 \frac{r_{11}x_1^o + r_{12}x_2^o + r_{13}x_3^o + o_1^c}{r_{31}x_1^o + r_{32}x_2^o + r_{33}x_3^o + o_3^c} \\ u_2 &= i_2 + f_2 \frac{r_{21}x_1^o + r_{22}x_2^o + r_{23}x_3^o + o_2^c}{r_{31}x_1^o + r_{32}x_2^o + r_{33}x_3^o + o_3^c} \end{aligned} \quad (1)$$

En posant

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - i_1 \\ u_2 - i_2 \end{pmatrix}$$

nous déduisons de (1) l'équation :

$$\tilde{u}_1 f_2 (r_{21}x_1^o + r_{22}x_2^o + r_{23}x_3^o + o_2^c) = \tilde{u}_2 f_1 (r_{11}x_1^o + r_{12}x_2^o + r_{13}x_3^o + o_1^c) \quad (2)$$

Posons  $\beta \equiv f_1/f_2 = s_1/s_2$ , (2) devient :

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 \frac{\beta r_{11}}{o_2^c} x_1^o + \tilde{u}_2 \frac{\beta r_{12}}{o_2^c} x_2^o + \tilde{u}_2 \frac{\beta r_{13}}{o_2^c} x_3^o + \tilde{u}_2 \frac{\beta o_1^c}{o_2^c} - \tilde{u}_1 \frac{r_{21}}{o_2^c} x_1^o - \tilde{u}_1 \frac{r_{22}}{o_2^c} x_2^o - \tilde{u}_1 \frac{r_{23}}{o_2^c} x_3^o$$

soit sous forme matricielle :

$$\tilde{u}_1 = (\tilde{u}_2 x_1^o, \tilde{u}_2 x_2^o, \tilde{u}_2 x_3^o, \tilde{u}_2, -\tilde{u}_1 x_1^o, -\tilde{u}_1 x_2^o, -\tilde{u}_1 x_3^o) \cdot L$$

avec, pour  $o_2^c \neq 0$  :

$$L^t = \left( \frac{\beta r_{11}}{o_2^c}, \frac{\beta r_{12}}{o_2^c}, \frac{\beta r_{13}}{o_2^c}, \frac{\beta o_1^c}{o_2^c}, \frac{r_{21}}{o_2^c}, \frac{r_{22}}{o_2^c}, \frac{r_{23}}{o_2^c} \right)$$

Soit  $n$  le nombre de billes de la mire ( $n = 10$  dans notre exemple). Notons :

$$\begin{aligned} U_1 &= (\tilde{u}_1^1, \tilde{u}_1^2, \dots, \tilde{u}_1^n) \text{ et,} \\ A &= \begin{pmatrix} \tilde{u}_2^1 x_1^{o^1} & \tilde{u}_2^1 x_2^{o^1} & \tilde{u}_2^1 x_3^{o^1} & \tilde{u}_2^1 & -\tilde{u}_1^1 x_1^{o^1} & -\tilde{u}_1^1 x_2^{o^1} & -\tilde{u}_1^1 x_3^{o^1} \\ \tilde{u}_2^2 x_1^{o^2} & \tilde{u}_2^2 x_2^{o^2} & \tilde{u}_2^2 x_3^{o^2} & \tilde{u}_2^2 & -\tilde{u}_1^2 x_1^{o^2} & -\tilde{u}_1^2 x_2^{o^2} & -\tilde{u}_1^2 x_3^{o^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{u}_2^n x_1^{o^n} & \tilde{u}_2^n x_2^{o^n} & \tilde{u}_2^n x_3^{o^n} & \tilde{u}_2^n & -\tilde{u}_1^n x_1^{o^n} & -\tilde{u}_1^n x_2^{o^n} & -\tilde{u}_1^n x_3^{o^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Le repère objet est choisi arbitrairement. Pour faciliter les calculs, nous le choisissons de sorte que les billes appartiennent aux plans  $e_1^o = 0$  et  $e_3^o = 0$ , voir figure 3.

Identifier les paramètres revient à chercher les composantes du vecteur  $L$  tel que :

$$AL = U_1$$

La solution de ce système, au sens des moindres carrés (c'est à dire en cherchant à minimiser  $\|AL - U_1\|^2$ ), est donnée par les équations normales :

$$(A^t A)L = A^t U_1,$$

système que nous résoudrons par des méthodes classiques de résolution de systèmes linéaires: décomposition LU, décomposition de Choleski...

#### 4.2.3 Estimation des paramètres

Une fois les composantes  $l_j$ ,  $j \in 1, \dots, 7$  du vecteur  $L$  estimées, les paramètres du système projectif sont déduits. De la définition de ces sept composantes :  $l_1 = \frac{\beta r_{11}}{o_2^c}$ ,  $l_2 = \frac{\beta r_{12}}{o_2^c}$ ,  $l_3 = \frac{\beta r_{13}}{o_2^c}$ ,  $l_4 =$

$$\frac{\beta o_1^c}{o_2^c}, l_5 = \frac{r_{21}}{o_2^c}, l_6 = \frac{r_{22}}{o_2^c}, l_7 = \frac{r_{23}}{o_2^c}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} |o_2^c| &= \frac{1}{\sqrt{l_5^2 + l_6^2 + l_7^2}}, \\ \beta &= |o_2^c| \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}, \\ o_1^c &= \frac{l_4 o_2^c}{\beta}, \\ r_{11} &= l_1 \frac{o_2^c}{\beta}, \quad r_{12} = l_2 \frac{o_2^c}{\beta}, \quad r_{13} = l_3 \frac{o_2^c}{\beta}, \\ r_{21} &= l_5 o_2^c, \quad r_{22} = l_6 o_2^c, \quad r_{23} = l_7 o_2^c. \end{aligned}$$

Enfin, la translation selon l'axe  $e_3^o$  et la focale  $f = f_2 s_2$  se déterminent en résolvant le système d'équations normales :

$$(B^t B) \begin{pmatrix} o_3^c \\ f_2 \end{pmatrix} = B^t R$$

avec,

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{u}_2^1 & -(r_{21}x_1^{o_1^1} + r_{22}x_2^{o_1^1} + r_{23}x_3^{o_1^1} + o_2^c) \\ \tilde{u}_2^2 & -(r_{21}x_1^{o_2^2} + r_{22}x_2^{o_2^2} + r_{23}x_3^{o_2^2} + o_2^c) \\ \dots & \dots \\ \tilde{u}_2^n & -(r_{21}x_1^{o_n^n} + r_{22}x_2^{o_n^n} + r_{23}x_3^{o_n^n} + o_2^c) \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$R = \begin{pmatrix} -\tilde{u}_2^1(r_{31}x_1^{o_1^1} + r_{32}x_2^{o_1^1} + r_{33}x_3^{o_1^1}) \\ -\tilde{u}_2^2(r_{31}x_1^{o_2^2} + r_{32}x_2^{o_2^2} + r_{33}x_3^{o_2^2}) \\ \dots \\ -\tilde{u}_2^n(r_{31}x_1^{o_n^n} + r_{32}x_2^{o_n^n} + r_{33}x_3^{o_n^n}) \end{pmatrix}$$

## 5 Travail à faire

### 5.1 Objectif

En reprenant la méthode décrite ci-dessus, vous devez identifier:

- les paramètres extrinsèques : composantes de la translation, angles des rotations autour des axes  $e_1^o, e_2^o, e_3^o$ ,
- les paramètres intrinsèques : la focale.

### 5.2 Données du problème

- La première étape de mise en correspondance des points de la mire et des ellipses obtenues sur l'image, n'est pas demandée. Vous trouverez un fichier contenant, pour chacune des dix billes, ses coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}^o$  et sur l'image dont la taille est fixée à 512\*512.
- Vous considérerez que le centre optique de la caméra se projette au centre de l'image, soit  $(i_1, i_2) = (256, 256)$ . Les facteurs d'échelle sont :  $s_1 = s_2 = 10\mu m/pixel$ .
- Vous trouverez les classes "matrice" et "vecteur". En outre, la méthode de résolution d'un système linéaire, à partir de la décomposition LU, est implémentée.

### 5.3 Marche à suivre

1. Lire le fichier contenant les coordonnées des billes,
2. Constituer la matrice  $A$ ,
3. En déduire la matrice  $G = A^t A$  et le vecteur  $V = A^t U_1$ ,
4. Résoudre le système  $GL = V$ ,
5. En déduire les paramètres :  $o_2^o$  (attention au signe),  $\beta, r_{ij}$ . Expliquer comment obtenir  $r_{31}, r_{32}, r_{33}$ . En déduire les trois angles de rotation. Identifier  $o_1^o$ ,
6. Constituer la matrice  $B$  et le vecteur  $R$ . En déduire  $G = B^t B$  et  $V = B^t R$ ,
7. Résoudre le système  $GL = V$ , pour l'identification de  $o_3^o$  et  $f_2$ .

Vous commenterez l'emploi de **10** billes pour l'identification des paramètres.

## A Matrice de Rotation

Nous donnons ci-après le sens des coefficients  $r_{ij}$  de la matrice  $M_{ext}$ .

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= \cos \omega \cos \gamma \\
 r_{12} &= -\cos \omega \sin \gamma \\
 r_{13} &= \sin \omega \\
 r_{21} &= \sin \phi \sin \omega \cos \gamma + \cos \phi \sin \gamma \\
 r_{22} &= -\sin \phi \sin \omega \sin \gamma + \cos \phi \cos \gamma \\
 r_{23} &= -\sin \phi \cos \omega \\
 r_{31} &= -\cos \phi \sin \omega \cos \gamma + \sin \phi \sin \gamma \\
 r_{32} &= \cos \phi \sin \omega \sin \gamma + \sin \phi \cos \gamma \\
 r_{33} &= \cos \phi \cos \omega
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \phi &= -\arctan\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right) \\
 \gamma &= -\arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right) \\
 \omega &= \arctan\left(\frac{r_{13}}{-r_{23} \sin \phi + r_{33} \cos \phi}\right)
 \end{aligned}$$