Exercice de contrôle optimal

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Expliciter $\|X\|_{\mathbb{R}^n}$.
2. Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Expliciter un coefficient C tel que $\|MX\|_{\mathbb{R}^n} \leq C\|X\|_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.
3. Montrer que $X^T MX = o(\|X\|_{\mathbb{R}^n})$ lorsque $\|X\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(X) = X^T MX$. Calculer $Df(X)(H)$ puis $\nabla_X f$.
5. On suppose dans cette question que M est symétrique définie positive. Montrer que f est convexe.

On admet le théorème suivant (théorème d'existence d'une solution pour un problème de contrôle optimal) :

[Début du théorème]

Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, $U \subseteq \mathbb{R}^p$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $K > 0$ telles que $\|f(t, 0, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq K(1 + \|u\|_{\mathbb{R}^p})$ pour tous $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T > 0$ et $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Si $\left\{\begin{pmatrix} f(t, y, u) \\ k(t, y, u) + \xi \end{pmatrix} | u \in U, \xi \geq 0\right\}$ est convexe pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in [0, T]$, et si $\{(u, x) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^p) \times W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) | x'(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), h\big(T, x(T)\big) \leq 0\} \neq \emptyset$, alors le problème suivant admet une solution :

$$\min_{\substack{u\in L^\infty([0,T],U) \\ h(T,x(T))\leq 0 \\ x'(t)=f(t,x(t),u(t))}} \quad g\big(T, x(T)\big) + \int_0^T k\big(t, x(t), u(t)\big)dt$$

[Fin du théorème]

On considère le problème suivant, où Q est symétrique définie positive :

$$\min_{\substack{u\in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^p) \\ -x(T)\leq 0 \\ x'(t)=Ax(t)+Bu(t)}} \quad \int_0^T x(t)^T Mx(t) + u(t)^T Qu(t)dt$$

6. Montrer que ce problème admet une solution.
7. Enoncer le principe du maximum de Pontryagin dans le cas de ce problème.

Solutions.

1. $\|X\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$
Attention : $\|X\|_{\mathbb{R}^n} \neq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}|X_i|^n}$ (c'est une confusion fréquente avec la norme $\|.\|_{L^p}$)
2. $\|MX\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \sum_{i=1}^{n}[MX]_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} M_{ij}X_j\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} M_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2\right)$ par inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc une constante possible est $C = \sqrt{\sum_{i,j} M_{ij}^2}$
3. $|X^T MX| = |\langle X, MX\rangle_{\mathbb{R}^n}| \leq \|X\|_{\mathbb{R}^n}\|MX\|_{\mathbb{R}^n}$ par inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $|X^T MX| \leq C\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2$. Par conséquent, $\frac{|X^T MX|}{\|X\|_{\mathbb{R}^n}} \leq C\|X\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$. Par théorème d'encadrement, $\frac{|X^T MX|}{\|X\|_{\mathbb{R}^n}} \to 0$ ce qui nous permet de conclure que $X^T MX = o(\|X\|_{\mathbb{R}^n})$.
Attention : pour utiliser le théorème d'encadrement, il faut avoir un encadrement. Donc travailler sur $X^T MX$ au lieu de $|X^T MX|$ rendrait le raisonnement erroné.
Remarque : en fait, $|X^T MX| \leq C\|X\|_{\mathbb{R}^n}^2$ implique que $X^T MX = o\left(\|X\|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha}\right)$ pour tout $\alpha \in [1,2[$
4. $f(X+H) = (X+H)^T M(X+H) = X^T MX + X^T MH + H^T MX + H^T MH$
Or $H^T MX \in \mathbb{R}$ donc est égal à sa transposée, donc $H^T MX = (H^T MX)^T = X^T M^T H$
De plus on reconnaît $X^T MX = f(X)$
Enfin, $H^T MH = o(\|H\|_{\mathbb{R}^n})$ d'après la 3)
Tous ces arguments permettent d'écrire $f(X+H) = f(X) + X^T(M+M^T)H + o(\|H\|_{\mathbb{R}^n})$
Donc f est différentiable en X et $Df(X)(H) = X^T(M+M^T)H$
Enfin, le gradient est relié à la différentielle par la formule $\langle \nabla_X f, H\rangle = Df(X)(H)$
Donc $\nabla_X f = (M^T + M)X$
5. M est symétrique définie positive donc par théorème spectral, M est diagonalisable en base orthonormée. De plus, ses valeurs propres sont > 0 ce qui permet d'écrire M sous la forme $N^T N$. Par conséquent $f(X) = \|NX\|_{\mathbb{R}^n}^2$ est la composée d'une fonction convexe (la norme au carrée) et d'une fonction affine, donc f est convexe.
6. Il faut vérifier toutes les hypothèses. Pour tous $(t,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$, $\|f(t,0,u)\|_{\mathbb{R}^n} = \|Bu\|_{\mathbb{R}^n} \leq C_B\|u\|_{\mathbb{R}^n} \leq C_B(1+\|u\|_{\mathbb{R}^n})$ où $C_B = \sqrt{\sum_{i,j} B_{ij}^2}$ (en se référant à la question 2)). Pour tout $t \in [0,T]$, $k\big(t, x(t), u(t)\big) = x(t)^T Mx(t) + u(t)^T Qu(t)$ donc $k(t,x,u) = x^T Mx + u^T Qu$. Nous savons déjà que k est différentiable (d'après la question 4)) et de différentielle $Dk(x,u)(h) = x^T(M+M^T)h + u^T(Q+Q^T)h$. De plus, pour tous $x,y \in \mathbb{R}^n$, $|Dk(x,u)(h,h') - Dk(y,v)(h,h')| = |(x-y)^T(M+M^T)h + (u-v)^T(Q+Q^T)h'| = |\langle x-y, (M+M^T)h\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle u-v, (Q+Q^T)h\rangle_{\mathbb{R}^p}| \leq \|x-y\|_{\mathbb{R}^n}\|(M+M^T)h\|_{\mathbb{R}^n} + \|u-v\|_{\mathbb{R}^p}\|(Q+Q^T)h'\|_{\mathbb{R}^p} \leq C_{M+M^T}\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}\|h\|_{\mathbb{R}^n} + C_{Q+Q^T}\|u-v\|_{\mathbb{R}^p}\|h'\|_{\mathbb{R}^p}$ en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant la question 2). Donc nous avons l'inégalité suivante sur la norme d'opérateur : $|||Dk(x,u) - Dk(y,v)||| \leq C'\left\|\begin{pmatrix} x-y \\ u-v\end{pmatrix}\right\|$. Donc Dk est continue. Ceci montre que $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Enfin, nous devons montrer que l'ensemble $\left\{\begin{pmatrix} f(t,y,u) \\ k(t,y,u)+\xi\end{pmatrix} | u \in U, \xi \geq 0\right\}$ est convexe pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in [0,T]$. D'abord, fixons $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,T]$. Soient $\lambda \in [0,1]$, $u_1, u_2 \in U\ et\ \xi_1, \xi_2 \geq 0$. $\lambda\begin{pmatrix} f(t,y,u_1) \\ k(t,y,u_1)+\xi_1\end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} f(t,y,u_2) \\ k(t,y,u_2)+\xi_2\end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \lambda Ay + \lambda Bu_1 + (1-\lambda)Ay + (1-\lambda)Bu_2 \\ \lambda(y^T My + u_1^T Qu_1 + \xi_1) + (1-\lambda)(y^T My + u_2^T Qu_2 + \xi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay + B(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \\ \xi' + y^T My + (\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)^T Q(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \end{pmatrix}$$

Où $\xi' = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 + \lambda u_1^T Qu_1 + (1-\lambda)u_2^T Qu_2 - (\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)^T Q(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)$

Il reste à prouver que $\xi' \geq 0$

Attention : ne surtout pas développer le terme $(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)^T Q(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)$!

En fait, $\lambda u_1^T Qu_1 + (1-\lambda)u_2^T Qu_2 - (\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)^T Q(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \geq 0$ en utilisant la question 5) (car Q est symétrique définie positive)

Enfin, $\begin{matrix} u \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^p) \\ -x(T) \leq 0 \\ x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \end{matrix}$ est réalisable en prenant $u = 0$ (l'ensemble des solutions à ce système est non vide)

Donc on applique le théorème.

7. Le Hamiltonien s'écrit $H(t,x,u,p,p_0) = \langle p, Ax + Bu\rangle_{\mathbb{R}^n} + p_0(x(t)^T Mx(t) + u(t)^T Qu(t))$
   Soit (x,u) une solution optimale au problème de contrôle optimal considéré. On sait qu'une solution existe d'après la question 6). D'après le PMP, il existe $(\boldsymbol{p}, p_0) \in \mathbb{R}_-^m \times \{0,-1\}$ tel que la solution $p(t)$ au système
   $\begin{cases} -\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}(t,x,u,p,p_0) \\ p_i(T) = p_0 \frac{\partial g}{\partial x_i}\big(T, x(T)\big) + \langle \boldsymbol{p}, \frac{\partial h}{\partial x_i}\big(T,x(T)\big)\rangle_{\mathbb{R}^m} \; pour\ tout\ i \in [\![1;n]\!] \end{cases}$ vérifie :
   A) $(\boldsymbol{p}, p_0) \neq (0,0)$
   B) $\langle \boldsymbol{p}, h\big(T, x(T)\big)\rangle_{\mathbb{R}^m} = 0$
   C) $H(t, x(t), u(t), p(t), p_0) = \max_{u \in U} H(t, x(t), u, p(t), p_0)$

L'équation adjointe se réécrit : $-\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}(t,x,u,p,p_0) = A^T p(t) + p_0 M^T x(t)$

Par formule de Duhamel, on a donc $p(t) = e^{-tA^T}p(0) + \int_0^t e^{(t-s)A^T}\, p_0 M^T x(s)ds$

$p_i(T) = p_0 \frac{\partial g}{\partial x_i}\big(T, x(T)\big) + \langle \boldsymbol{p}, \frac{\partial h}{\partial x_i}\big(T,x(T)\big)\rangle_{\mathbb{R}^m} \; pour\ tout\ i \in [\![1;n]\!]$ s'écrit $p_i(T) = \langle \boldsymbol{p}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1\ [en\ i] \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\rangle_{\mathbb{R}^m} = \boldsymbol{p_i}\ pour\ tout\ i \in [\![1;n]\!]$ donc $p(T) = -\boldsymbol{p}$

A l'aide des équations ci-dessus, on peut caractériser les contrôles optimaux de ce problème.

Dans le cas quadratique (comme ci-dessus), on peut résoudre le problème en passant par l'équation de Riccati, qui vise à découpler x et p.

Souvent, les équations sont difficiles à résoudre : c'est notamment le cas parce qu'on connaît $p(T)$ et $x(0)$. Les deux conditions de bord sont sur des bords différents. On utilise une méthode classique appelée « Shooting method ».