Maxime Corlay

TP1 Computational Statistics

Exercice 1

Dans tout l'exercice, les intégrales de Lebesgue sont sur des ouverts pour pouvoir utiliser les difféomorphismes sur des ouverts. Dans tout l'exercice, les bords sont de mesure nulle, donc cela ne change rien de travailler sur des ouverts ou des fermés.

Aux questions 1, 3c et 3d, j'utilise la **formule de transfert** (pour éviter de le redire à chaque fois).

1)

- Soit h une fonction bornée et mesurable.
- $\mathbb{E}\big(h(X,Y)\big) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y) f_X(x) f_Y(y) dxdy$
- $\mathbb{E}\Big(h\big(Rcos(\Theta), Rsin(\Theta)\big)\Big) = \int_{\mathbb{R}_*^+ \times]0,2\pi[} \frac{1}{2\pi} h(rcos(\theta), rsin(\theta)) re^{-\frac{r^2}{2}}\ drd\theta$
- On pose $J_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -rsin(\theta) \\ sin(\theta) & rcos(\theta) \end{pmatrix}$ la jacobienne de la fonction $(r,\theta) \longmapsto (rcos(\theta), rsin(\theta))$ (qui est un difféomorphisme)
- On a $|\det J_\theta|^{-1} = 1/r$
- On applique la formule de changement de variable, ce qui donne :

$$\mathbb{E}\Big(h\big(Rcos(\Theta), Rsin(\Theta)\big)\Big) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} h(x,y) \exp(-\frac{x^2+y^2}{2})\ dxdy$$

- D'où l'indépendance de X et Y et le fait que X et Y suivent N(0,1)

2)

- Notons F la fonction de répartition de R
- $F(r) = \mathbb{P}(R \leq r) = \int_0^r te^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Big[-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_0^r = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}$
- Soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. $\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}\big(U \leq F(x)\big) = F(x) = \mathbb{P}(R \leq x)$ donc $F^{-1}(U)$ simule la loi de R
- <u>Algorithme :</u>

- **Tirer $\boldsymbol{U_r \sim \mathcal{U}([0,1])}$ et $\boldsymbol{U_\theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi])}$**
- **Affecter $\boldsymbol{R = F^{-1}(U_r)}$**
- **Retourner $\boldsymbol{Rcos(U_\theta), Rsin(U_\theta)}$**

3) a)

- A la fin de la boucle while, $(V_1, V_2) \sim \mathcal{U}(D)$ où D est le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

b)

- Soit T la variable aléatoire désignant la première itération telle que $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$
- On suppose que la première itération est $k = 1$
- Soit $k \geq 1$. Travaillons d'abord avec des événements :

$$\{T = k\} = \bigcap_{1\le l\le k-1} \{V_1^2(l) + V_2^2(l) > 1\} \cap \{V_1^2(k) + V_2^2(k) \le 1\}$$

- **Il y a indépendance des tirages**, donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{T = k\}) &= \prod_{1\le l\le k-1} \mathbb{P}(\{V_1^2(l) + V_2^2(l) > 1\})\, \mathbb{P}(\{V_1^2(k) + V_2^2(k) \le 1\}) \\ &= \left(\frac{\mathcal{A}_{carré\ de\ côté\ 2} - \mathcal{A}_{cercle\ rayon\ 1}}{\mathcal{A}_{carré\ de\ côté\ 2}}\right)^{k-1} \frac{\mathcal{A}_{cercle\ rayon\ 1}}{\mathcal{A}_{carré\ de\ côté\ 2}} \\ &= \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

- Donc T suit la loi géométrique de paramètre $\pi/4$
- Donc $\mathbb{E}(T) = \frac{4}{\pi}$ est l'espérance du nombre de pas dans la boucle while

c)

- Soit h une fonction bornée et mesurable.
- $\mathbb{E}\big(h(T_1, V)\big) = \int_{\mathbb{R}^2} h(t,v) f_{T_1}(t) f_V(v)\, dt dv$
- $\mathbb{E}\left(h\left(\frac{V_1}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}, V_1^2 + V_2^2\right)\right) = \int_D \frac{1}{\pi} h\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, v_1^2 + v_2^2\right) dv_1 dv_2$
- La transformation $(v_1, v_2) \mapsto \left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, v_1^2 + v_2^2\right)$ n'est <u>pas</u> un difféomorphisme de $D \to]-1,1[\times]0,1[$ où D est le disque unité ouvert, elle n'est même pas injective. En revanche, si nous travaillons sur $D^- = \{(v_1, v_2) \in D | v_2 < 0\}$ et sur $D^+ = \{(v_1, v_2) \in D | v_2 > 0\}$ séparément, la transformation est un difféomorphisme.

$$\begin{aligned}&\int_D \frac{1}{\pi} h\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, v_1^2 + v_2^2\right) dv_1 dv_2 \\ &\qquad = \int_{D^-} \frac{1}{\pi} h\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, v_1^2 + v_2^2\right) dv_1 dv_2 \\ &\qquad + \int_{D^+} \frac{1}{\pi} h\left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, v_1^2 + v_2^2\right) dv_1 dv_2\end{aligned}$$

- On pose $J = \begin{pmatrix} \frac{v_2^2}{(v_1^2+v_2^2)^{3/2}} & -\frac{v_1 v_2}{(v_1^2+v_2^2)^{3/2}} \\ 2v_1 & 2v_2 \end{pmatrix}$ la jacobienne de la transformation
- On a $\det J = \frac{2v_2^3}{(v_1^2+v_2^2)^{3/2}} + \frac{2v_1^2 v_2}{(v_1^2+v_2^2)^{3/2}} = \frac{2v_2(v_1^2+v_2^2)}{(v_1^2+v_2^2)^{3/2}} = \frac{2v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$
- Donc $|\det J|^{-1} = \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{2|v_2|} = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}$
- On applique la formule du changement de variable pour D^- et D^+, ce qui donne :

$$\mathbb{E}\left(h\left(\frac{V_1}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}, V_1^2+V_2^2\right)\right)$$
$$= \int_{]-1,1[\times]0,1[} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-t^2}} h(t,v)dtdv + \int_{]-1,1[\times]0,1[} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-t^2}} h(t,v)dtdv$$
$$= \int_{]-1,1[\times]0,1[} \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}} h(t,v)dtdv$$

- Ceci montre que T_1 et V sont indépendantes, que V suit une loi uniforme sur $[0,1]$ et que T_1 a pour densité $f_{T_1}(t) = \frac{\chi_{[-1,1]}(t)}{\pi\sqrt{1-t^2}}$
- Soit $\Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi])$ et $\tilde{T} = \cos(\Theta)$. Bien sûr, $\tilde{T}(\Omega) = [-1,1]$. Montrons que $\tilde{T}$ suit la même loi que T_1.
- $\mathbb{E}\big(h(\cos\Theta)\big) = \int_{]0,2\pi[} \frac{1}{2\pi} h(\cos\theta)d\theta = \int_{]0,\pi[} \frac{1}{2\pi} h(\cos\theta)d\theta + \int_{]\pi,2\pi[} \frac{1}{2\pi} h(\cos\theta)d\theta$
- $\cos()$ est un difféomorphisme sur chacun des intervalles $]0,\pi[$ et $]\pi,2\pi[$ (mais PAS sur $]0,2\pi[$), vérifiant $|\det J|^{-1} = \frac{1}{|\sin(\theta)|} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, donc la formule de changement de variable donne :

$$\mathbb{E}\big(h(\cos\Theta)\big) = \int_{]-1,1[} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-t^2}} h(t)dt + \int_{]-1,1[} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-t^2}} h(t)dt$$
$$= \int_{]-1,1[} \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}} h(t)dt$$

- Remarque : il n'y a pas d'interversions de « bornes » car nous avons utilisé le théorème directement avec la valeur absolue du jacobien
- Donc $f_{\tilde{T}}(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}$
- Ceci conclut que T_1 suit la même distribution que $\cos(\Theta)$ avec $\Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi])$

d)

- De manière « analogue » à la question c) mais avec des ensembles $D^- = \{(v_1,v_2) \in D | v_1 < 0\}$ et sur $D^+ = \{(v_1,v_2) \in D | v_1 > 0\}$, on peut montrer que $T_2 = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}$ suit la même loi que $\sin(\Theta)$ où $\Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi])$.
- Cette fois-ci, la transformation est $(v,\theta) \longmapsto (\sqrt{-2\log(v)}\cos(\theta), \sqrt{-2\log(v)}\sin(\theta))$ et va de $]0,1[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$
- Cette transformation est un difféomorphisme de $]0,1[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$
- Sa jacobienne est $J = \begin{pmatrix} \frac{-\cos\theta}{v\sqrt{-2\log(v)}} & -\sqrt{-2\log(v)}\sin\theta \\ \frac{-\sin\theta}{v\sqrt{-2\log(v)}} & \sqrt{-2\log(v)}\cos\theta \end{pmatrix}$
- $|\det J|^{-1} = v = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$

- On procède comme précédemment.
- Soit h une fonction bornée et mesurable.
- $\mathbb{E}\big(h(X,Y)\big) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y) f_X(x) f_Y(y)\, dxdy$

$$\mathbb{E}\left(h\left(\sqrt{-2\log(V)}\cos(\Theta), \sqrt{-2\log(V)}\sin(\Theta)\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy$$

- Donc $(X,Y) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ (loi normale bivariée)

Exercice 2

1)

- Par définition, $P(x,A) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in A | X_n = x)$
- Si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = 1/k$, alors $\mathbb{P}\big(X_{n+1} \in A, Y_n = 1 \big| (X_n = x)\big) = \int_{A\cap[0,1]} dt$ (car la densité de $\mathcal{U}([0,1])$ est $\chi_{[0,1]}$) et $\mathbb{P}\big(X_{n+1} \in A, Y_n = 0 \big| (X_n = x)\big) = \delta_{\frac{1}{k+1}}(A)$, où $Y_n | X_n$ suit une loi de Bernoulli de paramètre X_n^2. La formule des probabilités totales appliquée au système exhaustif $(Y_n = 0 | X_n = x)$, $(Y_n = 1 | X_n = x)$ permet de conclure
- S'il n'existe pas de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = 1/k$, alors on a immédiatement $\mathbb{P}(X_{n+1} \in A | X_n = x) = \int_{A\cap[0,1]} dt$

2)

- Dans le cadre des chaînes de Markov, on calcule les mesures de probabilités successives par une formule de récurrence du type $\pi_{n+1} = \pi_n P$ où P est le noyau de transition. Dans le cas discret et fini, P est une matrice et l'expression devient $\pi_{n+1}(x) = \sum_{y\in\varepsilon} \pi_n(y) P(y,x)$ pour tout $x \in \varepsilon$ (espace des états).
- On s'intéresse aux mesures « invariantes » car ce sont de bons candidats pour être des mesures stationnaires des chaînes de Markov (décrivant ainsi le comportement sur le long terme). Montrer que π est invariante pour P c'est montrer que $\pi(A) = \int_{[0,1]} \pi(x) P(x,A)\, dx$ pour tout A.
- On étudie l'invariance de la loi uniforme, donc $\pi = \chi_{[0,1]}$
- $\int_{[0,1]} \pi(x) P(x,A)\, dx = \int_{[0,1]} P(x,A)\, dx$
- Or l'ensemble $\left\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$ est clairement en bijection avec $\mathbb{N}$, donc dénombrable, donc sa mesure de Lebesgue est nulle, donc $P(x,A) = \int_{A\cap[0,1]} ds$ presque pour tout $x \in [0,1]$ (en se servant de la question 1)
- Donc $\int_{[0,1]} \pi(x) P(x,A)\, dx = \int_{[0,1]} P(x,A)\, dx = \int_{[0,1]} \int_{A\cap[0,1]} ds\, dx = \int_{A\cap[0,1]} ds = \pi(A)$
- Ceci prouve que la distribution uniforme est invariante pour P

3)

- Soit f une fonction bornée et mesurable. On va utiliser le théorème de transfert.
- $x \notin \left\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$ donc $X_1 | (X_0 = x)$ suit une loi uniforme sur [0,1], de densité π

- $Pf(x) = \mathbb{E}(f(X_1)|X_0 = x) = \pi_1 f = \int_{\mathbb{R}} \pi_1(x_1)f(x_1)\,dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \pi(x_1)f(x_1)\,dx_1 = \pi f$
- Ceci est vrai pour toute fonction bornée et mesurable, donc $\pi_1 = \pi$
- Il en résulte que $\pi_2 = \pi_1 P = \pi P = \pi$ (car π est invariante ; voir question 2)
- Par récurrence immédiate, $\pi_n = \pi$ pour tout $n \geq 1$
- Donc $P^n f(x) = \mathbb{E}(f(X_n)|X_0 = x) = \pi_n f = \pi f$ pour tout $n \geq 1$
- Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P^n f(x) = \pi f = \int_{\mathbb{R}} \pi(t)f(t)dt$

4)

a) En utilisant la question 1 :

- $P^1\left(\frac{1}{k}, \left\{\frac{1}{k+1}\right\}\right) = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\delta_{\frac{1}{k+1}}\left(\left\{\frac{1}{k+1}\right\}\right) = 1 - \frac{1}{k^2}$
- Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^n\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{n+k}\right) = \prod_{l=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{(k+l)^2}\right)$
- <u>Initialisation :</u> faite ci-dessus
- <u>Hérédité :</u> on suppose que $P^n\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{n+k}\right) = \prod_{l=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{(k+l)^2}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ pour un certain $n \geq 1$
- $P^{n+1}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{n+1+k}\right) = \int_{\mathbb{R}} P\left(\frac{1}{k}, y\right)P^n(y, \frac{1}{n+1+k})dy = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\int_{\mathbb{R}} \delta_{\frac{1}{k+1}}(y)P^n(y, \frac{1}{n+1+k})dy =$ $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)P^n\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{n+1+k}\right) = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\prod_{l=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{(k+1+l)^2}\right) = \prod_{l=0}^{n}\left(1 - \frac{1}{(k+l)^2}\right)$
- Ce qui conclut la récurrence et prouve que $P^n\left(x, \frac{1}{n+k}\right) = \prod_{l=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{(k+l)^2}\right)$
- En fait, cette dernière expression se simplifie en utilisant une identité remarquable :

$$\prod_{l=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{(k+l)^2}\right) = \prod_{l=0}^{n-1}\frac{(k+l)^2 - 1}{(k+l)^2} = \prod_{l=0}^{n-1}\frac{(k+l-1)(k+l+1)}{(k+l)^2} = \prod_{l=0}^{n-1}\frac{k+l-1}{k+l}\prod_{l=0}^{n-1}\frac{k+l+1}{k+l}$$

- Ces deux derniers produits se « télescopent » ce qui donne :

$$P^n\left(x, \frac{1}{n+k}\right) = \frac{(k-1)(k+n)}{k(k+n-1)}$$

b) On n'a <u>pas</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} P^n(x, A) = \pi(A)$.

- Preuve : $P^n(x, A) \geq P^n\left(x, \frac{1}{n+k}\right) = \frac{(k-1)(k+n)}{k(k+n-1)}$
- Or $\frac{(k-1)(k+n)}{k(k+n-1)} \to_{n\to+\infty} \frac{k-1}{k}$
- Si $P^n(x, A)$ convergeait vers $\pi(A)$ on aurait par passage à la limite : $\pi(A) \geq \frac{k-1}{k}$
- Or A est dénombrable et π est la mesure de la loi uniforme, donc $\pi(A) = 0$, ce qui contredit l'inégalité ci-dessus.

Exercice 3

Voir le ipynb