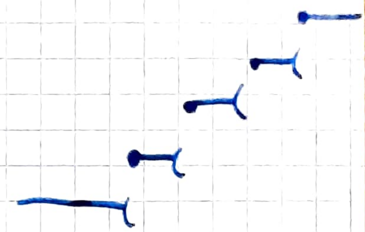
Intégrale de Stieltjès

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sum_{l=0}^{4} l \mathbb{1}_{[l, l+1[}(x) + 5\mathbb{1}_{[5,+\infty[}(x)$



g est croissante, continue à droite, bornée et vérifie $g(-\infty) = 0$

Il existe donc une unique mesure finie μ de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $g(x) = \mu(]-\infty, x])$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

L'intégrale $\int f \, d\mu$ est appelée « intégrale de Stieltjès » lorsqu'elle existe, et elle existe si pour toute subdivision x_i,

$$\sum f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \xrightarrow[\max_i |x_i - x_{i-1}| \to 0]{} \overset{\text{valeur limite}}{L \in \mathbb{R}}$$

$\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$

et si c'est le cas alors :

$$L = \int f \, d\mu = \overbrace{\int f \, dg}^{\text{notation usuelle}}$$

Calculons l'intégrale de Stieltjès de $f(x) = e^x$ sur $[0,1]$ avec $g(x) = \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$

g vérifie les 4 hypothèses et f est continue donc sans même calculer la somme avec subdivisions, on sait déjà que $\int_0^1 f \, dg$ existe.

→ Subdivision de $[0,1]$ en $\frac{k}{n}$ $k \in [\![0, n]\!]$ ($(n+1)$ points)

→ $\sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{2k-1}{n}\right)\left(\arctan\left(\frac{k}{n}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$

→ Valeur en fonction de n en python.

On obtient $\int_0^1 \exp \, d(\arctan) \approx 2{,}2267$