Algorithme de Box-Muller

L'algorithme de Box-Muller sert à générer des variables aléatoires de loi normale à partir de variables aléatoires de loi uniforme.

Nous allons prouver que l'algorithme ci-dessous atteint cet objectif en utilisant une méthode très connue en probabilités : le théorème de transfert.

Algorithme :

- Générer $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(]0,1])$ indépendantes
- Alors $X_1 = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$ et $X_2 = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$

Preuve que l'algorithme fonctionne :

- Soit h une fonction bornée et mesurable. Utilisons le théorème de transfert.
- $\mathbb{E}\big(h(X_1,X_2)\big) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x_1,x_2) f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)dx_1dx_2$
- $\mathbb{E}(h(F(U_1,U_2))) = \int_{]0,1]^2} h\big(F(u_1,u_2)\big)du_1du_2$ où $F :]0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifie $F(u_1,u_2) = \left(\sqrt{-2\ln u_1}\cos(2\pi u_2), \sqrt{-2\ln u_1}\sin(2\pi u_2)\right)$
- F a pour jacobienne $J = \begin{pmatrix} \frac{-\cos(2\pi u_2)}{u_1\sqrt{-2\ln u_1}} & -2\pi\sqrt{-2\ln u_1}\sin(2\pi u_2) \\ \frac{-\sin(2\pi u_2)}{u_1\sqrt{-2\ln u_1}} & 2\pi\sqrt{-2\ln u_1}\cos(2\pi u_2) \end{pmatrix}$
- $|\det J|^{-1} = \frac{|u_1|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$
- F est un difféomorphisme (F est C^1 et bijective) donc on peut appliquer le théorème de changement de variable :

$$\mathbb{E}(h(F(U_1,U_2))) = \int_{]0,1]^2} h\big(F(u_1,u_2)\big)du_1du_2 = \int_{\mathbb{R}^2} h(x_1,x_2)\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)dx_1dx_2$$

- Donc $f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$, qui est à variables séparables donc X_1 et X_2 sont indépendantes et de loi N(0,1).