

# Explication des 27 Équations

Conforme au document ProjectEstaca Achille.pdf

Projet Industriel 5A

19 janvier 2026

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Notations (Étapes 5-6 du PDF)</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Les 27 Équations</b>	<b>2</b>
2.1	Équilibre Volumique (9 équations) . . . . .	2
2.1.1	Couche 1 – Équations 1, 2, 3 . . . . .	3
2.1.2	Couche 2 – Équations 4, 5, 6 . . . . .	3
2.1.3	Couche 3 – Équations 7, 8, 9 . . . . .	3
2.2	Conditions aux Interfaces (12 équations) . . . . .	3
2.2.1	Interface 1–2 : Continuité des Déplacements (Éq. 10–12) . . . . .	4
2.2.2	Interface 1–2 : Continuité des Tractions (Éq. 13–15) . . . . .	4
2.2.3	Interface 2–3 : Continuité des Déplacements (Éq. 16–18) . . . . .	4
2.2.4	Interface 2–3 : Continuité des Tractions (Éq. 19–21) . . . . .	5
2.3	Conditions aux Bords (6 équations) . . . . .	5
2.3.1	Bord Inférieur $x_3 = 0$ (Éq. 22–24) . . . . .	5
2.3.2	Bord Supérieur $x_3 = H$ (Éq. 25–27) . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Récapitulatif</b>	<b>6</b>

# 1 Notations (Étapes 5-6 du PDF)

## Séparation de Variables – Étape 5

Champs de déplacement :

$$u_\alpha(x_\omega, x_3) = U_\alpha(x_3) \cos(\omega_\alpha x_\omega) \sin(\omega_\beta x_\varepsilon) \quad (1)$$

$$u_3(x_\omega, x_3) = U_3(x_3) \sin(\omega_\alpha x_\omega) \sin(\omega_\beta x_\varepsilon) \quad (2)$$

## Ansatz Exponentiel – Étape 6

$$U_\alpha(x_3) = A_\alpha e^{\tau x_3}, \quad U_3(x_3) = A_3 e^{\tau x_3}$$

Système caractéristique :  $\mathbf{M}(\tau) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$  avec  $\mathbf{A} = [A_\alpha, A_3]^t$

Champ de déplacement par superposition (3 modes décroissants,  $\text{Re}(\tau_r) < 0$ ) :

$$U_\alpha(x_3) = \sum_{r=1}^3 A_\alpha^r e^{\tau_r x_3}, \quad U_3(x_3) = \sum_{r=1}^3 A_3^r e^{\tau_r x_3}$$

## Notation par Couche – Étape 7

Pour chaque couche  $i$  :

$$U_k^i(x_3) = \sum_{r=1}^3 A_k^{i,r} e^{\tau_r^i x_3}$$

**Indices :**

- $i \in \{1, 2, 3\}$  : numéro de couche
- $r \in \{1, 2, 3\}$  : mode propre (racine  $\tau_r$  à partie réelle négative)
- $k \in \{\omega, 3\} = \{1, 2, 3\}$  : composante de déplacement

**Inconnues :**  $3 \times 3 \times 3 = 27$  amplitudes  $A_k^{i,r}$

# 2 Les 27 Équations

## 2.1 Équilibre Volumique (9 équations)

Pour chaque couche  $i$ , l'équilibre  $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  donne 3 équations.

## Forme EDP – Étape 5 du PDF

**Équation  $\alpha = 1$  :**

$$-(C_{\omega\omega\omega\omega}\omega_\omega^2 + C_{\omega\varepsilon\omega\varepsilon}\omega_\varepsilon^2) U_\alpha + C_{\omega 3\omega 3} \frac{d^2 U_\alpha}{dx_3^2} - (C_{\omega\omega\varepsilon\varepsilon} + C_{\omega\varepsilon\omega\varepsilon}) \omega_\alpha \omega_\beta U_\varepsilon + (C_{\omega\omega 33} + C_{\omega 3\omega 3}) \omega_\alpha \frac{dU_3}{dx_3} = F_{\text{th},\omega}$$

**Équation  $\alpha = 3$  :**

$$-(C_{\vartheta\vartheta 33} + C_{\vartheta 3\vartheta 3}) \omega_\vartheta \frac{dU_\vartheta}{dx_3} - C_{\vartheta 3\vartheta 3} \omega_\vartheta^2 U_3 + C_{3333} \frac{d^2 U_3}{dx_3^2} = F_{\text{th},3}$$

Après substitution de l'ansatz  $U_k = A_k e^{\tau x_3}$  (donc  $\frac{d}{dx_3} \rightarrow \tau$ ,  $\frac{d^2}{dx_3^2} \rightarrow \tau^2$ ) :

### 2.1.1 Couche 1 – Équations 1, 2, 3

Éq. 1 ( $\alpha = 1$ , couche 1) :

$$\sum_{r=1}^3 \left[ (\tau_r^2 C_{1313} - \omega_1^2 C_{1111} - \omega_2^2 C_{1212}) A_1^{1,r} - \omega_1 \omega_2 (C_{1222} + C_{1212}) A_2^{1,r} + \tau_r \omega_1 (C_{1133} + C_{1313}) A_3^{1,r} \right] = F_{th,1}^1 \quad (3)$$

Éq. 2 ( $\alpha = 2$ , couche 1) :

$$\sum_{r=1}^3 \left[ -\omega_1 \omega_2 (C_{2211} + C_{2121}) A_1^{1,r} + (\tau_r^2 C_{2323} - \omega_2^2 C_{2222} - \omega_1^2 C_{2121}) A_2^{1,r} + \tau_r \omega_2 (C_{2233} + C_{2323}) A_3^{1,r} \right] = F_{th,2}^1 \quad (4)$$

Éq. 3 ( $\alpha = 3$ , couche 1) :

$$\sum_{r=1}^3 \left[ -\tau_r \omega_1 C_{1133} A_1^{1,r} - \tau_r \omega_2 C_{2233} A_2^{1,r} + (\tau_r^2 C_{3333} - \omega_1^2 C_{1313} - \omega_2^2 C_{2323}) A_3^{1,r} \right] = F_{th,3}^1 \quad (5)$$

### 2.1.2 Couche 2 – Équations 4, 5, 6

Éq. 4 ( $\alpha = 1$ , couche 2) :

$$\sum_{r=1}^3 \left[ (\tau_r^2 C_{1313} - \omega_1^2 C_{1111} - \omega_2^2 C_{1212}) A_1^{2,r} - \omega_1 \omega_2 (C_{1222} + C_{1212}) A_2^{2,r} + \tau_r \omega_1 (C_{1133} + C_{1313}) A_3^{2,r} \right] = F_{th,1}^2 \quad (6)$$

Éq. 5 ( $\alpha = 2$ , couche 2) :

$$\sum_{r=1}^3 \left[ -\omega_1 \omega_2 (C_{2211} + C_{2121}) A_1^{2,r} + (\tau_r^2 C_{2323} - \omega_2^2 C_{2222} - \omega_1^2 C_{2121}) A_2^{2,r} + \tau_r \omega_2 (C_{2233} + C_{2323}) A_3^{2,r} \right] = F_{th,2}^2 \quad (7)$$

Éq. 6 ( $\alpha = 3$ , couche 2) :

$$\sum_{r=1}^3 \left[ -\tau_r \omega_1 C_{1133} A_1^{2,r} - \tau_r \omega_2 C_{2233} A_2^{2,r} + (\tau_r^2 C_{3333} - \omega_1^2 C_{1313} - \omega_2^2 C_{2323}) A_3^{2,r} \right] = F_{th,3}^2 \quad (8)$$

### 2.1.3 Couche 3 – Équations 7, 8, 9

Éq. 7 ( $\alpha = 1$ , couche 3) :

$$\sum_{r=1}^3 \left[ (\tau_r^2 C_{1313} - \omega_1^2 C_{1111} - \omega_2^2 C_{1212}) A_1^{3,r} - \omega_1 \omega_2 (C_{1222} + C_{1212}) A_2^{3,r} + \tau_r \omega_1 (C_{1133} + C_{1313}) A_3^{3,r} \right] = F_{th,1}^3 \quad (9)$$

Éq. 8 ( $\alpha = 2$ , couche 3) :

$$\sum_{r=1}^3 \left[ -\omega_1 \omega_2 (C_{2211} + C_{2121}) A_1^{3,r} + (\tau_r^2 C_{2323} - \omega_2^2 C_{2222} - \omega_1^2 C_{2121}) A_2^{3,r} + \tau_r \omega_2 (C_{2233} + C_{2323}) A_3^{3,r} \right] = F_{th,2}^3 \quad (10)$$

Éq. 9 ( $\alpha = 3$ , couche 3) :

$$\sum_{r=1}^3 \left[ -\tau_r \omega_1 C_{1133} A_1^{3,r} - \tau_r \omega_2 C_{2233} A_2^{3,r} + (\tau_r^2 C_{3333} - \omega_1^2 C_{1313} - \omega_2^2 C_{2323}) A_3^{3,r} \right] = F_{th,3}^3 \quad (11)$$

## 2.2 Conditions aux Interfaces (12 équations)

À l'interface  $x_3 = x_3^i$  entre couches  $i$  et  $i + 1$  :

**Continuité des déplacements :**  $[U_\alpha] = [U_3] = 0$

**Continuité des tractions :**

$$\begin{aligned} [C_{\omega 3 \omega 3}(\partial_3 U_\alpha + \omega_\alpha U_3)] &= 0 \\ [-C_{\vartheta \vartheta 33} \omega_\vartheta U_\vartheta + C_{3333} \partial_3 U_3] &= [C_{\vartheta \vartheta 33} \alpha_{\vartheta \vartheta} + C_{3333} \alpha_{33}] T(x_3) \end{aligned}$$

### 2.2.1 Interface 1–2 : Continuité des Déplacements (Éq. 10–12)

**Éq. 10** ( $[U_1] = 0$  à  $x_3 = h_1$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 A_1^{1,r} e^{\tau_r^1 h_1} - \sum_{s=1}^3 A_1^{2,s} = 0 \quad (12)$$

**Éq. 11** ( $[U_2] = 0$  à  $x_3 = h_1$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 A_2^{1,r} e^{\tau_r^1 h_1} - \sum_{s=1}^3 A_2^{2,s} = 0 \quad (13)$$

**Éq. 12** ( $[U_3] = 0$  à  $x_3 = h_1$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 A_3^{1,r} e^{\tau_r^1 h_1} - \sum_{s=1}^3 A_3^{2,s} = 0 \quad (14)$$

### 2.2.2 Interface 1–2 : Continuité des Tractions (Éq. 13–15)

**Éq. 13** ( $[\sigma_{13}] = 0$  à  $x_3 = h_1$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 C_{1313}(\tau_r^1 A_1^{1,r} + \omega_1 A_3^{1,r}) e^{\tau_r^1 h_1} - \sum_{s=1}^3 C_{1313}(\tau_s^2 A_1^{2,s} + \omega_1 A_3^{2,s}) = 0 \quad (15)$$

**Éq. 14** ( $[\sigma_{23}] = 0$  à  $x_3 = h_1$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 C_{2323}(\tau_r^1 A_2^{1,r} + \omega_2 A_3^{1,r}) e^{\tau_r^1 h_1} - \sum_{s=1}^3 C_{2323}(\tau_s^2 A_2^{2,s} + \omega_2 A_3^{2,s}) = 0 \quad (16)$$

**Éq. 15** ( $[\sigma_{33}] = \Delta \sigma_{\text{th}}$  à  $x_3 = h_1$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 (-C_{1133} \omega_1 A_1^{1,r} - C_{2233} \omega_2 A_2^{1,r} + C_{3333} \tau_r^1 A_3^{1,r}) e^{\tau_r^1 h_1} - \sum_{s=1}^3 (\dots)^{(2)} = \Delta \sigma_{\text{th},33}^{1 \rightarrow 2} \quad (17)$$

### 2.2.3 Interface 2–3 : Continuité des Déplacements (Éq. 16–18)

**Éq. 16** ( $[U_1] = 0$  à  $x_3 = h_1 + h_2$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 A_1^{2,r} e^{\tau_r^2 h_2} - \sum_{s=1}^3 A_1^{3,s} = 0 \quad (18)$$

**Éq. 17** ( $[U_2] = 0$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 A_2^{2,r} e^{\tau_r^2 h_2} - \sum_{s=1}^3 A_2^{3,s} = 0 \quad (19)$$

**Éq. 18** ( $[U_3] = 0$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 A_3^{2,r} e^{\tau_r^2 h_2} - \sum_{s=1}^3 A_3^{3,s} = 0 \quad (20)$$

### 2.2.4 Interface 2–3 : Continuité des Tractions (Éq. 19–21)

Éq. 19 ( $[\sigma_{13}] = 0$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 C_{1313}(\tau_r^2 A_1^{2,r} + \omega_1 A_3^{2,r})e^{\tau_r^2 h_2} - \sum_{s=1}^3 C_{1313}(\tau_s^3 A_1^{3,s} + \omega_1 A_3^{3,s}) = 0 \quad (21)$$

Éq. 20 ( $[\sigma_{23}] = 0$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 C_{2323}(\tau_r^2 A_2^{2,r} + \omega_2 A_3^{2,r})e^{\tau_r^2 h_2} - \sum_{s=1}^3 C_{2323}(\tau_s^3 A_2^{3,s} + \omega_2 A_3^{3,s}) = 0 \quad (22)$$

Éq. 21 ( $[\sigma_{33}] = \Delta\sigma_{th}$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 (-C_{1133}\omega_1 A_1^{2,r} - C_{2233}\omega_2 A_2^{2,r} + C_{3333}\tau_r^2 A_3^{2,r})e^{\tau_r^2 h_2} - (\dots)^{(3)} = \Delta\sigma_{th,33}^{2 \rightarrow 3} \quad (23)$$

## 2.3 Conditions aux Bords (6 équations)

### Conditions aux Extrémités – Étape 7 du PDF

En  $x_3 = 0$  et  $x_3 = H$  :

$$C_{\omega 3 \omega 3}(\partial_3 U_\alpha + \omega_\alpha U_3) = 0$$

$$-C_{\vartheta \vartheta 33}\omega_\vartheta U_\vartheta + C_{3333}\partial_3 U_3 = t_{\text{bottom/top}} + (C_{\vartheta \vartheta 33}\alpha_{\vartheta \vartheta} + C_{3333}\alpha_{33})T$$

### 2.3.1 Bord Inférieur $x_3 = 0$ (Éq. 22–24)

Éq. 22 ( $\sigma_{13}(0) = 0$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 C_{1313}(\tau_r^1 A_1^{1,r} + \omega_1 A_3^{1,r}) = -\sigma_{th,13}^1(0) \quad (24)$$

Éq. 23 ( $\sigma_{23}(0) = 0$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 C_{2323}(\tau_r^1 A_2^{1,r} + \omega_2 A_3^{1,r}) = -\sigma_{th,23}^1(0) \quad (25)$$

Éq. 24 ( $\sigma_{33}(0) = t_{\text{bottom}}$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 (-C_{1133}\omega_1 A_1^{1,r} - C_{2233}\omega_2 A_2^{1,r} + C_{3333}\tau_r^1 A_3^{1,r}) = t_{\text{bottom}} - \sigma_{th,33}^1(0) \quad (26)$$

### 2.3.2 Bord Supérieur $x_3 = H$ (Éq. 25–27)

Éq. 25 ( $\sigma_{13}(H) = 0$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 C_{1313}(\tau_r^3 A_1^{3,r} + \omega_1 A_3^{3,r})e^{\tau_r^3 h_3} = -\sigma_{th,13}^3(H) \quad (27)$$

Éq. 26 ( $\sigma_{23}(H) = 0$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 C_{2323}(\tau_r^3 A_2^{3,r} + \omega_2 A_3^{3,r})e^{\tau_r^3 h_3} = -\sigma_{th,23}^3(H) \quad (28)$$

Éq. 27 ( $\sigma_{33}(H) = t_{\text{top}}$ ) :

$$\sum_{r=1}^3 (-C_{1133}\omega_1 A_1^{3,r} - C_{2233}\omega_2 A_2^{3,r} + C_{3333}\tau_r^3 A_3^{3,r})e^{\tau_r^3 h_3} = t_{\text{top}} - \sigma_{th,33}^3(H) \quad (29)$$

### 3 Récapitulatif

N°	Description	Type
1-3	Équilibre couche 1	$\text{div}(\sigma) = 0$
4-6	Équilibre couche 2	$\text{div}(\sigma) = 0$
7-9	Équilibre couche 3	$\text{div}(\sigma) = 0$
10-12	Interface 1-2 : $[U_k] = 0$	Continuité déplacements
13-15	Interface 1-2 : $[\sigma_{k3}] = \Delta\sigma_{\text{th}}$	Continuité tractions
16-18	Interface 2-3 : $[U_k] = 0$	Continuité déplacements
19-21	Interface 2-3 : $[\sigma_{k3}] = \Delta\sigma_{\text{th}}$	Continuité tractions
22-24	Bord $x_3 = 0$ : $\sigma_{k3} = t_{\text{bottom}}$	Condition limite
25-27	Bord $x_3 = H$ : $\sigma_{k3} = t_{\text{top}}$	Condition limite

#### Système Final – Étape 8

$$\mathbf{M}_{\text{global}} \cdot \mathbf{A}_{\text{global}} = \mathbf{F}_{\text{thermique}}$$

avec  $\mathbf{A}_{\text{global}} \in \mathbb{R}^{27}$  contenant les amplitudes  $\{A_k^{i,r}\}$ .