

Modélisation thermo-mécanique de plaques multicouches : application aux barrières thermiques pour les moteurs aéronautiques

Aurélien Vattré

Résumé du projet

Ce travail vise à modéliser analytiquement le comportement thermoélastique d'une plaque multicouche soumise à des gradients thermiques. L'approche est semi-analytique, basée sur la séparation des variables et le développement en séries de Fourier. Cette étude s'inscrit dans le contexte des barrières thermiques utilisées pour protéger les pièces critiques des moteurs d'avion, les aubes de turbine.

Étape 1 – Définition géométrique et thermique

- **Géométrie** : plaque multicouche, composée de N couches empilées selon la direction normale x_3 , chacune d'épaisseur h_i , telles que $\sum_{i=1}^N h_i = H$.
- **Variables** : on considère le domaine tridimensionnel $(x_1, x_2, x_3) \in [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, H]$, où x_3 est la direction normale aux interfaces.
- **Conductivité thermique anisotrope par couche** :

$$\mathbf{k}^i = \begin{pmatrix} k_{11}^i & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^i & 0 \\ 0 & 0 & k_{33}^i \end{pmatrix}, \quad \text{où } k_{11}^i = k_{22}^i \neq k_{33}^i$$

- **Conditions aux limites thermiques** :

$$T(x_3 = 0) = T_{\text{bottom}}, \quad T(x_3 = H) = T_{\text{top}}$$

Étape 2 – Représentation spectrale de la température

On exprime la température en développant une série double de Fourier, en séparant les variables dans le plan transverse :

$$T(x_\alpha, x_3) = \sum_{m_\alpha, m_\beta=1}^{\infty} T_{m_\alpha m_\beta}(x_3) \sin(\delta_\alpha x_\alpha) \sin(\delta_\beta x_\beta)$$

avec $\delta_\alpha = \frac{m_\alpha \pi}{L_\alpha}$, $\alpha = \{1, 2\}$. On choisit $L_1 = L_2 > H$ et on se restreint à une coupe en $x_2 = L_2/2$, ce qui permet de simplifier le second sinus. Ainsi, chaque coefficient $T_{m_\alpha m_\beta}(x_3)$ vérifie une équation différentielle ordinaire dans chaque couche. Cette méthode permet de réduire un problème tridimensionnel à une collection de problèmes unidimensionnels.

Étape 3 – Résolution de la conduction thermique dans chaque couche

- Équation de conduction 1D pour chaque coefficient de Fourier :

$$-\frac{d}{dx_3} \left(k_{33}^i \frac{dT_{m_\alpha m_\beta}}{dx_3} \right) + k_{\eta\eta}^i \delta_\eta^2 T_{m_\alpha m_\beta} = 0$$

- Solution générale dans la couche i (exponentielle) :

$$T_{m_\alpha m_\beta}^i(x_3) = A^i e^{\lambda^i x_3} + B^i e^{-\lambda^i x_3}, \quad \lambda^i = \delta_\eta \sqrt{\frac{k_{\eta\eta}^i}{k_{33}^i}}$$

- Conditions de raccord aux interfaces :

- Continuité de la température : $[T] = 0$
- Continuité du flux thermique : $[k_{33} \partial_3 T] = 0$
- Conditions de Dirichlet aux extrémités

- Méthode : résolution algébrique du système obtenu pour les $2N$ constantes A^i, B^i

Étape 4 – Loi de comportement thermo-élastique anisotrope

- Chaque couche i du matériau est décrite par un comportement élastique linéaire orthotrope, représenté par un tenseur de rigidité C_{ijkl}^i défini localement. Les principales composantes utiles à la modélisation sont :

$$\{C_{1111}^i, C_{1122}^i, C_{1212}^i, C_{3333}^i, \dots\}$$

Ces composantes traduisent les rigidités directionnelles dans les plans et à travers l'épaisseur.

- Le comportement mécanique intègre les effets thermo-élastiques : le tenseur des contraintes est donné par :

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}(x_3) (\varepsilon_{kl}(x) - \alpha_{kl}(x_3) T(x))$$

où $T(x)$ est la température locale, α_{kl} représente le tenseur des coefficients de dilatation thermique (anisotropes), et $C_{ijkl}(x_3)$ dépend de la couche traversée.

- La déformation infinitésimale est définie classiquement par :

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

Ce tenseur mesure les variations symétriques du champ de déplacement $u_k(x)$.

- Les coefficients de dilatation thermique α_{kl} sont eux aussi anisotropes et varient d'une couche à l'autre, reflétant la nature composite ou multi-matériaux de la plaque.

Étape 5 – Séparation de variables sur les déplacements et équilibre mécanique

- On suppose une séparation de variables sur les champs de déplacement :

$$u_\alpha(x_\alpha, x_3) = U_\alpha(x_3) \cos(\delta_\alpha x_\alpha) \sin(\delta_\beta x_\beta)$$

$$u_3(x_\alpha, x_3) = U_3(x_3) \sin(\delta_\alpha x_\alpha) \sin(\delta_\beta x_\beta)$$

- Les dérivées spatiales s'écrivent alors :

$$\partial_{x_1} u_\alpha \rightarrow -\delta_1 \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) U_\alpha(x_3)$$

$$\partial_{x_2} u_\alpha \rightarrow \delta_2 \cos(\delta_1 x_1) \cos(\delta_2 x_2) U_\alpha(x_3)$$

$$\partial_{x_3} u_{\{\alpha,3\}} \rightarrow \text{dérivées normales : } \partial_3 U_{\{\alpha,3\}}(x_3)$$

- En injectant dans l'équilibre local $\partial_j \sigma_{ij} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} & - (C_{\alpha\alpha\alpha\alpha} \delta_\alpha^2 + C_{\alpha\beta\alpha\beta} \delta_\beta^2) U_\alpha + C_{\alpha 3 \alpha 3} \frac{d^2 U_\alpha}{dx_3^2} - (C_{\alpha\alpha\beta\beta} + C_{\alpha\beta\alpha\beta}) \delta_\alpha \delta_\beta U_\beta + (C_{\alpha\alpha 33} + C_{\alpha 3 \alpha 3}) \delta_\alpha \frac{d U_3}{d x_3} \\ & = (C_{\alpha\alpha\alpha\alpha} \alpha_{\alpha\alpha} + C_{\alpha\beta\beta\beta} \alpha_{\beta\beta}) \delta_\alpha T \\ & - (C_{\gamma\gamma 33} + C_{\gamma 3 \gamma 3}) \delta_\gamma U_{\gamma,3} - C_{\gamma 3 \gamma 3} \delta_\gamma^2 U_3 + C_{3333} \frac{d^2 U_3}{d x_3^2} = (C_{\gamma\gamma 33} \alpha_{\gamma\gamma} + C_{3333} \alpha_{33}) \frac{dT}{d x_3} \end{aligned}$$

Étape 6 – Ansatz exponentiel pour les champs de déplacement

$$U_\alpha(x_3) = A_\alpha e^{\tau x_3}, \quad U_3(x_3) = A_3 e^{\tau x_3}$$

avec τ l'ensemble des valeurs propres extraites du système différentiel. Cela aboutit à un système quadratique homogène en τ , dont les solutions sont les valeurs propres τ (croissantes ou décroissantes). Le problème aux valeurs propres quadratique, sans la solution particulière due à la température $T(x_3)$, s'écrit

$$\begin{aligned} & (C_{\alpha\alpha\alpha\alpha} \delta_\alpha^2 + C_{\alpha\beta\alpha\beta} \delta_\beta^2 - C_{\alpha 3 \alpha 3} \tau^2) A_\alpha + (C_{\alpha\beta\beta\beta} + C_{\alpha\beta\alpha\beta}) \delta_\alpha \delta_\beta A_\beta - (C_{\alpha\alpha 33} + C_{\alpha 3 \alpha 3}) \delta_\alpha \tau A_3 = 0_\alpha \\ & - (C_{\gamma\gamma 33} + C_{\gamma 3 \gamma 3}) \delta_\gamma \tau A_\gamma + (C_{3333} \tau^2 - C_{\gamma 3 \gamma 3} \delta_\gamma^2) A_3 = 0 \end{aligned}$$

Ce système représente trois équations couplées. En réécriture matricielle, il s'exprime sous la forme d'un système linéaire homogène :

$$\mathbf{M}(\tau) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

avec $\mathbf{A} = [A_\alpha, A_3]^t$ et une matrice caractéristique $\mathbf{M}(\tau)$ définie dans chaque couche comme :

$$\mathbf{M}(\tau) = \begin{pmatrix} \tau^2 C_{1313} - \delta_1^2 C_{1111} - \delta_2^2 C_{1212} & -\delta_1 \delta_2 (C_{1222} + C_{1212}) & \tau \delta_1 (C_{1133} + C_{1313}) \\ -\delta_1 \delta_2 (C_{2211} + C_{2121}) & \tau^2 C_{2323} - \delta_2^2 C_{2222} - \delta_1^2 C_{2121} & \tau \delta_2 (C_{2233} + C_{2323}) \\ -\tau \delta_1 C_{1133} & -\tau \delta_2 C_{2233} & \tau^2 C_{3333} - \delta_1^2 C_{1313} - \delta_2^2 C_{2323} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres τ_r sont les racines non-triviales du polynôme caractéristique défini par :

$$\det(\mathbf{M}(\tau)) = 0$$

Les τ_r définissent les modes d'atténuation ou de croissance des champs dans la direction transverse x_3 . Le champ de déplacement est alors obtenu par superposition des solutions élémentaires décroissantes :

$$U_\alpha(x_3) = \sum_{r=1}^3 A_\alpha^r e^{\tau_r x_3}, \quad U_3(x_3) = \sum_{r=1}^3 A_3^r e^{\tau_r x_3}$$

Les coefficients d'amplitude $\{A_\alpha^r, A_3^r\}$ sont ensuite déterminés à partir des conditions aux interfaces entre les couches, ainsi que des conditions aux limites imposées à la structure.

Étape 7 – Conditions aux interfaces et aux bords

Les expressions analytiques des champs de déplacement dans chaque couche i , obtenues sous forme de combinaisons exponentielles

$$U_k^i(x_3) = \sum_{r=1}^3 A_k^{i,r} e^{\tau_r^i x_3}$$

doivent satisfaire les conditions de compatibilité mécanique aux interfaces et les conditions aux limites externes.

Conditions aux interfaces internes ($x_3 = x_3^i$ entre les couches i et $i + 1$) :

$$\begin{aligned} [U_\alpha] &= [U_3] = 0 \\ [C_{\alpha 3 \alpha 3} (\partial_3 U_\alpha + \delta_\alpha U_3)] &= 0_\alpha \\ [-C_{\gamma \gamma 33} \delta_\gamma U_\gamma + C_{3333} \partial_3 U_3] &= [C_{\gamma \gamma 33} \alpha_{\gamma \gamma} + C_{3333} \alpha_{33}] T(x_3 = x_3^i) \end{aligned}$$

Conditions aux extrémités ($x_3 = 0$ et $x_3 = H$) :

$$\begin{aligned} C_{\alpha 3 \alpha 3} (\partial_3 U_\alpha + \delta_\alpha U_3) &= 0_\alpha \\ -C_{\gamma \gamma 33} \delta_\gamma U_\gamma + C_{3333} \partial_3 U_3 &= t_{\text{bottom/top}} + (C_{\gamma \gamma 33} \alpha_{\gamma \gamma} + C_{3333} \alpha_{33}) T(x_3 = \{0, H\}) \end{aligned}$$

avec

$$\sigma_{33}(x_3 = 0) = t_{\text{bottom}}, \quad \sigma_{33}(x_3 = H) = t_{\text{top}}$$

Étape 8 – Assemblage et résolution

L'ensemble des équations (équilibre dans chaque couche, conditions d'interface, conditions aux bords) conduit à un système global d'équations :

- $3 \times N$ équations d'équilibre interne (par couche),
- $6 \times (N - 1)$ conditions aux interfaces (continuité des déplacements et tractions),
- 6 conditions aux extrémités (haut et bas de la plaque),
- $3 \times 3 \times N$ amplitudes inconnues $\{A_\alpha^{i,r}, A_3^{i,r}\}$.

Le système peut être assemblé sous la forme :

$$\mathbf{M}_{\text{global}} \cdot \mathbf{A}_{\text{global}} = \mathbf{F}_{\text{thermique}}$$

où :

- $\mathbf{A}_{\text{global}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times N}$ contient toutes les amplitudes inconnues,
- $\mathbf{M}_{\text{global}}$ est la matrice d'assemblage (bloc par couche et interface),
- $\mathbf{F}_{\text{thermique}}$ représente le chargement dû à la température $T(x_3)$.

Procédure de résolution :

1. Calcul des racines caractéristiques τ_r^i pour chaque couche,
2. Assemblage des expressions de déplacement et contraintes dans chaque couche,
3. Application des conditions d'interface et de bord,
4. Résolution du système linéaire pour les amplitudes $A_k^{i,r}$,
5. Reconstruction des champs $u_i(x)$ et $\sigma_{ij}(x)$ dans tout le domaine.