Finalisation de l'Assemblage Matriciel

Développement Intégral des 27 Équations

Objectif : Ce document détaille le passage des équations aux dérivées partielles (EDP) au système algébrique $K \cdot A = F$. Le système complet pour 3 couches comporte **27 équations** :

- 9 Équations d'équilibre volumique (3 directions $\times$ 3 couches).
- 12 Équations de continuité (2 interfaces $\times$ 6 conditions).
- 6 Conditions aux limites (2 surfaces $\times$ 3 conditions).

I. Équations d'Équilibre Volumique (9 Équations)

Pour chaque couche $k \in \{1, 2, 3\}$, l'équilibre statique impose $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$. Nous utilisons l'Ansatz spectral pour les déplacements :

$$U_j^{(k)}(x_3) = \sum_{r=1}^{6} A_r^{(k)} V_j^{(k,r)} e^{\tau_r^{(k)} x_3}$$

Règles de substitution :

- Dérivée seconde en x_3 : $\frac{d^2}{dx_3^2} \to \tau_r^2$
- Dérivée première en x_3 : $\frac{d}{dx_3} \to \tau_r$
- Dérivées latérales (x_1, x_2) : $\frac{\partial}{\partial x_1} \to i\delta_1$, $\frac{\partial}{\partial x_2} \to i\delta_2$ (d'où $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \to -\delta_1^2$)

1. Équation 1 : Projection sur x_1 ($\alpha = 1$)

Physique : Équilibre en traction/cisaillement longitudinal.

Forme EDP (Tensorielle) :

$$C_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + C_{66}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + C_{55}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + (C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (C_{13}+C_{55})\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_3} = F_{th,1}$$

Substitution détaillée : On injecte l'Ansatz mode par mode.

$$\begin{aligned}
&\text{Terme } U_1 : \left[C_{55}(\tau_r^2) + C_{11}(-\delta_1^2) + C_{66}(-\delta_2^2)\right] V_1^{(r)} \\
&\text{Terme } U_2 : \left[(C_{12}+C_{66})(i\delta_1)(i\delta_2)\right] V_2^{(r)} = -(C_{12}+C_{66})\delta_1\delta_2 V_2^{(r)} \\
&\text{Terme } U_3 : \left[(C_{13}+C_{55})(i\delta_1)(\tau_r)\right] V_3^{(r)} \quad \text{(Attention : ici } \partial_1 \to \delta_1 \text{ réel dans les notes)}
\end{aligned}$$

Forme Algébrique Finale (Lignes 1, 4, 7 de la matrice) :

$$\boxed{\underbrace{(C_{55}\tau_r^2 - [C_{11}\delta_1^2 + C_{66}\delta_2^2])}_{\text{Diag } U_1} V_1^{(r)} - \underbrace{(C_{12}+C_{66})\delta_1\delta_2}_{\text{Couplage } U_2} V_2^{(r)} + \underbrace{(C_{13}+C_{55})\delta_1\tau_r}_{\text{Couplage } U_3} V_3^{(r)} = F_{th,1}} \qquad (1)$$

2. Équation 2 : Projection sur x_2 $(\alpha = 2)$

Physique : Équilibre en cisaillement transversal.

Forme EDP :

$$(C_{66}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2 + C_{44}\partial_3^2)U_2 + (C_{12} + C_{66})\partial_1\partial_2 U_1 + (C_{23} + C_{44})\partial_2\partial_3 U_3 = F_{th,2}$$

Substitution détaillée :

$$\begin{aligned}
&\text{Terme } U_2 : \left[C_{44}\tau_r^2 - (C_{66}\delta_1^2 + C_{22}\delta_2^2)\right] V_2^{(r)} \\
&\text{Terme } U_1 : -(C_{12} + C_{66})\delta_1\delta_2 V_1^{(r)} \\
&\text{Terme } U_3 : (C_{23} + C_{44})\delta_2\tau_r V_3^{(r)}
\end{aligned}$$

Forme Algébrique Finale (Lignes 2, 5, 8 de la matrice) :

$$\boxed{-\underbrace{(C_{12} + C_{66})\delta_1\delta_2}_{\text{Couplage } U_1} V_1^{(r)} + \underbrace{(C_{44}\tau_r^2 - [C_{66}\delta_1^2 + C_{22}\delta_2^2])}_{\text{Diag } U_2} V_2^{(r)} + \underbrace{(C_{23} + C_{44})\delta_2\tau_r}_{\text{Couplage } U_3} V_3^{(r)} = F_{th,2}} \tag{2}$$

3. Équation 3 : Projection sur x_3 $(\alpha = 3)$

Physique : Équilibre normal (Arrachement).

Forme EDP :

$$(C_{55}\partial_1^2 + C_{44}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2)U_3 + (C_{13} + C_{55})\partial_1\partial_3 U_1 + (C_{23} + C_{44})\partial_2\partial_3 U_2 = F_{th,3}$$

Substitution détaillée :

$$\begin{aligned}
&\text{Terme } U_3 : \left[C_{33}\tau_r^2 - (C_{55}\delta_1^2 + C_{44}\delta_2^2)\right] V_3^{(r)} \\
&\text{Terme } U_1 : (C_{13} + C_{55})\delta_1\tau_r V_1^{(r)} \quad \text{(Devient négatif selon convention de signe choisie)} \\
&\text{Terme } U_2 : (C_{23} + C_{44})\delta_2\tau_r V_2^{(r)}
\end{aligned}$$

Forme Algébrique Finale (Lignes 3, 6, 9 de la matrice) :

$$\boxed{-\underbrace{(C_{13} + C_{55})\delta_1\tau_r}_{\text{Couplage } U_1} V_1^{(r)} - \underbrace{(C_{23} + C_{44})\delta_2\tau_r}_{\text{Couplage } U_2} V_2^{(r)} + \underbrace{(C_{33}\tau_r^2 - [C_{55}\delta_1^2 + C_{44}\delta_2^2])}_{\text{Diag } U_3} V_3^{(r)} = F_{th,3}} \tag{3}$$

II. Équations de Continuité (12 Équations)

Nous avons 2 interfaces internes : Interface 1 (Couche 1/2) et Interface 2 (Couche 2/3). Pour chaque interface, 6 conditions doivent être respectées.

Continuité des Déplacements (6 Équations)

$$U_j^{(k)}(h_k) - U_j^{(k+1)}(0) = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, 3$$

En forme modale :

$$\sum_{r=1}^{6} A_r^{(k)} V_j^{(k,r)} e^{\tau_r^{(k)} h_k} - \sum_{s=1}^{6} A_s^{(k+1)} V_j^{(k+1,s)} = 0$$

Continuité des Tractions (6 Équations)

$$\sigma_{j3}^{(k)}(h_k) - \sigma_{j3}^{(k+1)}(0) = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, 3$$

La contrainte totale est la somme de la partie modale et de la partie thermique :

$$\left(\sum_r A_r^{(k)} W_j^{(k,r)} e^{\tau_r^{(k)} h_k} + \sigma_{th,j3}^{(k)} \right) - \left(\sum_s A_s^{(k+1)} W_j^{(k+1,s)} + \sigma_{th,j3}^{(k+1)} \right) = 0$$

Ce qui donne l'équation matricielle (Inconnues à gauche, Connu à droite) :

$$\sum_r A_r^{(k)} W_j^{(k,r)} e^{\tau_r^{(k)} h_k} - \sum_s A_s^{(k+1)} W_j^{(k+1,s)} = \underbrace{\sigma_{th,j3}^{(k+1)}(0) - \sigma_{th,j3}^{(k)}(h_k)}_{\Delta\Sigma_{th}}$$

III. Synthèse : Matrice Globale 27x27

Le système final $[K_{glob}]\{A\} = \{F\}$ s'organise ainsi :

1. **Équilibre Couche 1** (3 éq) : Appliqué à $z = h_1/2$.
2. **Équilibre Couche 2** (3 éq) : Appliqué à $z = h_2/2$.
3. **Équilibre Couche 3** (3 éq) : Appliqué à $z = h_3/2$.
4. **Interface 1-2** (6 éq) : Continuité U et σ.
5. **Interface 2-3** (6 éq) : Continuité U et σ.
6. **Bord Bas ($z = 0$)** (3 éq) : Encastrement $U = 0$.
7. **Bord Haut ($z = H$)** (3 éq) : Traction imposée $\sigma \cdot n = F_{ext}$.