Résolution Matricielle du Système Multicouche

Détermination des Amplitudes par Méthode Spectrale

Documentation Technique - Projet Industriel 5A

12 janvier 2026

Table des matières

Conventions et Correspondance des Notations

Ce document suit les notations du document de référence **ProjectEstaca.pdf**. Le tableau ci-dessous établit la correspondance entre les notations utilisées.

Notation Référence	Notation Voigt (Code)	Signification
C_{1111}	C_{11}	Rigidité direction 1
C_{2222}	C_{22}	Rigidité direction 2
C_{3333}	C_{33}	Rigidité direction 3 (normale)
C_{1122}	C_{12}	Couplage 1-2
C_{1133}	C_{13}	Couplage 1-3
C_{2233}	C_{23}	Couplage 2-3
C_{1313}	C_{55}	Cisaillement plan 1-3
C_{2323}	C_{44}	Cisaillement plan 2-3
C_{1212}	C_{66}	Cisaillement plan 1-2
$U_\alpha(x_3)$	$V_\alpha(x_3)$	Amplitude déplacement plan ($\alpha = 1, 2$)
$U_3(x_3)$	$V_3(x_3)$	Amplitude déplacement normal
$A_k^{i,r}$	$C_r^{(i)} \cdot V_k^{(r)}$	Amplitude couche i, mode r, composante k
δ_α	δ_1, δ_2	Nombres d'onde : $\delta_\alpha = m_\alpha \pi / L_\alpha$
τ	τ	Valeur propre (modes propres)

TABLE 1 – Correspondance entre notations du PDF de référence et notation Voigt du code

Structure des Amplitudes (Référence vs Code)

Dans le PDF de référence (Étape 8) :

$$A_{\text{global}} \in \mathbb{R}^{3\times 3\times N} = \{A_\alpha^{i,r}, A_3^{i,r}\}$$

Soit $9 \times N$ amplitudes (27 pour 3 couches).
Dans le code : Les 3 composantes de déplacement sont **liées** par les vecteurs propres $\mathbf{V}^{(r)}$. On a donc seulement $6 \times N$ coefficients d'intégration $C_r^{(i)}$ (18 pour 3 couches), où chaque C_r multiplie le vecteur propre complet :

$$\mathbf{U}(x_3) = \sum_{r=1}^{6} C_r \cdot \mathbf{V}^{(r)} \cdot e^{\tau_r x_3}$$

1 Introduction et Objectif

Objectif Principal

Déterminer le vecteur des amplitudes inconnues $\mathbf{A}$ pour reconstruire la solution complète du champ de déplacement :

$$\boxed{\mathbf{U}(x_3) = \mathbf{A} \cdot e^{\tau x_3}}$$

Le problème se ramène à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\boxed{[\mathbf{M}_{\text{global}}] \cdot [\mathbf{A}] = [\mathbf{F}_{\text{thermique}}]}$$

1.1 Structure des Inconnues

Vecteur d'Amplitudes Global

Pour un système à N couches, avec 6 modes propres par couche :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{(1)} \\ \mathbf{C}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{(N)} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{C}^{(k)} = \begin{pmatrix} C_1^{(k)} \\ C_2^{(k)} \\ C_3^{(k)} \\ C_4^{(k)} \\ C_5^{(k)} \\ C_6^{(k)} \end{pmatrix}$$

Nombre total d'inconnues : $6 \times N$ amplitudes.
Pour $N = 3$ couches : **18 inconnues**.

Note sur les 27 vs 18 inconnues

Clarification importante :

- **27 inconnues = Amplitudes** A : Dans la formulation théorique générale, on a 9 amplitudes par couche $(A_1, \ldots, A_9)$ pour les 3 composantes de déplacement (u_1, u_2, u_3) avec 3 modes chacune. Pour 3 couches : $9 \times 3 = 27$ amplitudes.
- **18 inconnues = Coefficients** C : Le code implémente 6 coefficients d'intégration par couche car l'équation caractéristique $\det(\mathbf{M}(\tau)) = 0$ donne seulement 6 racines τ_r (polynôme de degré 6). Pour 3 couches : $6 \times 3 = 18$ coefficients.

Pourquoi cette différence ?

- Les 6 racines τ_r forment 3 paires conjuguées : $\pm\tau_1, \pm\tau_2, \pm\tau_3$
- Chaque mode τ_r définit un vecteur propre $\mathbf{V}^{(r)} = (V_1^{(r)}, V_2^{(r)}, V_3^{(r)})^T$
- Les 3 composantes de déplacement sont donc **liées** par les vecteurs propres
- Le coefficient C_r multiplie tout le vecteur $\mathbf{V}^{(r)}$, pas chaque composante séparément

2 Méthodologie d'Écriture des Équations

2.1 Étape 1 : Substitution de l'Ansatz

Ansatz de Déplacement (Étape 5 du PDF)

Le champ de déplacement est supposé de la forme :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = V_1(x_3)\cos(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2) \quad (1)$$
$$u_2(x_1, x_2, x_3) = V_2(x_3)\sin(\delta_1 x_1)\cos(\delta_2 x_2) \quad (2)$$
$$u_3(x_1, x_2, x_3) = V_3(x_3)\sin(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2) \quad (3)$$

Avec la dépendance en x_3 :

$$V_i(x_3) = \sum_{r=1}^{6} C_r \cdot V_i^{(r)} \cdot e^{\tau_r x_3}$$

2.2 Étape 2 : Dérivation et Équation d'Équilibre

L'équation d'équilibre mécanique $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ conduit à :

Matrice $\mathbf{M}(\tau)$

$$\mathbf{M}(\tau) = \begin{pmatrix} C_{55}\tau^2 - K_{11} & -K_{12} & K_{13}^*\tau \\ -K_{12} & C_{44}\tau^2 - K_{22} & K_{23}^*\tau \\ K_{13}^*\tau & K_{23}^*\tau & C_{33}\tau^2 - K_{33} \end{pmatrix}$$

Avec les coefficients :

$$K_{11} = C_{11}\delta_1^2 + C_{66}\delta_2^2 \tag{4}$$
$$K_{22} = C_{66}\delta_1^2 + C_{22}\delta_2^2 \tag{5}$$
$$K_{33} = C_{55}\delta_1^2 + C_{44}\delta_2^2 \tag{6}$$
$$K_{12} = (C_{12} + C_{66})\delta_1\delta_2 \tag{7}$$
$$K_{13}^* = (C_{13} + C_{55})\delta_1 \tag{8}$$
$$K_{23}^* = (C_{23} + C_{44})\delta_2 \tag{9}$$

2.3 Étape 3 : Isolation des Termes

Séparation Mécanique / Thermique

L'équation complète est :

$$\underbrace{\mathbf{M}(\tau) \cdot \mathbf{V}}_{\text{Termes mécaniques (matrice)}} = \underbrace{\mathbf{F}_{\text{th}}}_{\text{Termes thermiques (vecteur)}}$$

Le vecteur de forçage thermique :

$$\mathbf{F}_{\text{th}} = \hat{T} \begin{pmatrix} \beta_1\delta_1 \\ \beta_2\delta_2 \\ \beta_3\lambda_{\text{th}} \end{pmatrix}$$

Où $\beta_i = \sum_j C_{ij}\alpha_j$ sont les coefficients de contrainte thermique.

3 Calculs Détaillés des Amplitudes

Cette section présente les calculs **explicites** permettant d'identifier les amplitudes A_r devant chaque mode propre.

3.1 Étape 1 : Substitution - Écriture de l'Ansatz

Ansatz Complet avec Amplitudes Explicites

On pose le champ de déplacement comme superposition de 6 modes propres :

$$u_1(x_1,x_2,x_3) = \left[\sum_{r=1}^{6} A_r \cdot V_1^{(r)} \cdot e^{\tau_r x_3}\right] \cos(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2) \tag{10}$$

$$u_2(x_1,x_2,x_3) = \left[\sum_{r=1}^{6} A_r \cdot V_2^{(r)} \cdot e^{\tau_r x_3}\right] \sin(\delta_1 x_1)\cos(\delta_2 x_2) \tag{11}$$

$$u_3(x_1,x_2,x_3) = \left[\sum_{r=1}^{6} A_r \cdot V_3^{(r)} \cdot e^{\tau_r x_3}\right] \sin(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2) \tag{12}$$

Notation condensée :

$$\boxed{u_i(x_1,x_2,x_3) = \sum_{r=1}^{6} A_r \cdot V_i^{(r)} \cdot e^{\tau_r x_3} \cdot \phi_i(x_1,x_2)}$$

où ϕ_i sont les fonctions harmoniques latérales.

3.2 Étape 2 : Dérivation - Calcul des Déformations

Règle de Dérivation Fondamentale

La dérivation par rapport à x_3 fait apparaître τ :

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A_r \cdot e^{\tau_r x_3}\right) = \tau_r \cdot A_r \cdot e^{\tau_r x_3}$$

Donc : $\boxed{\partial_{x_3} \to \tau_r}$ dans l'espace modal.

3.2.1 Calcul Explicite des Déformations

Les composantes du tenseur de déformation $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$:

Déformations en Fonction des Amplitudes

Déformations normales :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sum_{r=1}^{6} A_r \cdot V_1^{(r)} \cdot e^{\tau_r x_3} \cdot \underbrace{(-\delta_1)}_{\partial_{x_1}\cos} \sin(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2) \tag{13}$$

$$= \boxed{-\delta_1 \sum_{r=1}^{6} A_r V_1^{(r)} e^{\tau_r x_3}} \cdot \sin(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2) \tag{14}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \boxed{-\delta_2 \sum_{r=1}^{6} A_r V_2^{(r)} e^{\tau_r x_3}} \cdot \sin(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2) \tag{15}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \boxed{\tau_r \sum_{r=1}^{6} A_r V_3^{(r)} e^{\tau_r x_3}} \cdot \sin(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2) \tag{16}$$

Déformations de cisaillement :

$$2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \tag{17}$$

$$= \sum_r A_r \left(\tau_r V_1^{(r)} + \delta_1 V_3^{(r)}\right) e^{\tau_r x_3} \cdot \cos(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2) \tag{18}$$

$$2\varepsilon_{23} = \sum_r A_r \left(\tau_r V_2^{(r)} + \delta_2 V_3^{(r)}\right) e^{\tau_r x_3} \cdot \sin(\delta_1 x_1)\cos(\delta_2 x_2) \tag{19}$$

$$2\varepsilon_{12} = \sum_r A_r \left(-\delta_2 V_1^{(r)} - \delta_1 V_2^{(r)}\right) e^{\tau_r x_3} \cdot \cos(\delta_1 x_1)\cos(\delta_2 x_2) \tag{20}$$

3.3 Étape 3 : Calcul des Contraintes via Loi de Hooke

Loi de Comportement Orthotrope

Pour un matériau orthotrope :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\Theta$$

Définition du champ de température Θ :

— $\Theta(x_1, x_2, x_3)$: Écart de température par rapport à la référence ($\Theta = T - T_{\text{ref}}$)
— $\beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{kl}$: Coefficients de contrainte thermique (Pa/K)
— α_{kl} : Coefficients de dilatation thermique (K^{-1})

Pour notre problème multicouche, le champ thermique a la forme :

$$\Theta(x_1, x_2, x_3) = \hat{T}(x_3) \cdot \sin(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2)$$

où $\hat{T}(x_3) = Ae^{\lambda x_3} + Be^{-\lambda x_3}$ est le profil thermique dans l'épaisseur.

3.3.1 Contrainte Normale σ_{33} (Arrachement)

Calcul Détaillé de σ_{33}

$$\sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} - \beta_3\Theta \tag{21}$$

$$= C_{13}\left(-\delta_1 \sum_r A_r V_1^{(r)} e^{\tau_r z}\right) + C_{23}\left(-\delta_2 \sum_r A_r V_2^{(r)} e^{\tau_r z}\right) \tag{22}$$

$$+ C_{33}\left(\sum_r \tau_r A_r V_3^{(r)} e^{\tau_r z}\right) - \beta_3\Theta \tag{23}$$

Factorisation par amplitude :

$$\boxed{\sigma_{33} = \sum_{r=1}^{6} A_r \cdot \underbrace{\left(-C_{13}\delta_1 V_1^{(r)} - C_{23}\delta_2 V_2^{(r)} + C_{33}\tau_r V_3^{(r)}\right)}_{W_3^{(r)}} \cdot e^{\tau_r z} - \beta_3\Theta}$$

On identifie les coefficients de la matrice $\mathbf{R}(\tau)$ ligne 3 :

$$R_{31} = -C_{13}\delta_1, \quad R_{32} = -C_{23}\delta_2, \quad R_{33} = C_{33}\tau$$

3.3.2 Contraintes de Cisaillement σ_{13} et σ_{23}

Calcul Détaillé de σ_{13}

$$\sigma_{13} = C_{55} \cdot 2\varepsilon_{13} = C_{55}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \tag{24}$$

$$= C_{55} \sum_r A_r \left(\tau_r V_1^{(r)} + \delta_1 V_3^{(r)}\right) e^{\tau_r z} \cdot \cos(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2) \tag{25}$$

Factorisation :

$$\boxed{\sigma_{13} = \sum_{r=1}^{6} A_r \cdot \underbrace{\left(C_{55}\tau_r V_1^{(r)} + C_{55}\delta_1 V_3^{(r)}\right)}_{W_1^{(r)}} \cdot e^{\tau_r z}}$$

Coefficients de $\mathbf{R}(\tau)$ ligne 1 :

$$R_{11} = C_{55}\tau, \quad R_{12} = 0, \quad R_{13} = C_{55}\delta_1$$

Calcul Détaillé de σ_{23}

$$\sigma_{23} = C_{44} \cdot 2\varepsilon_{23} = C_{44}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \tag{26}$$

$$= C_{44} \sum_r A_r \left(\tau_r V_2^{(r)} + \delta_2 V_3^{(r)}\right) e^{\tau_r z} \tag{27}$$

Factorisation :

$$\boxed{\sigma_{23} = \sum_{r=1}^{6} A_r \cdot \underbrace{\left(C_{44}\tau_r V_2^{(r)} + C_{44}\delta_2 V_3^{(r)}\right)}_{W_2^{(r)}} \cdot e^{\tau_r z}}$$

Coefficients de $\mathbf{R}(\tau)$ ligne 2 :

$$R_{21} = 0, \quad R_{22} = C_{44}\tau, \quad R_{23} = C_{44}\delta_2$$

3.4 Étape 4 : Équation d'Équilibre et Identification

Équation d'Équilibre $\mathrm{div}(\sigma) = 0$

Les trois composantes :

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \tag{29}$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \tag{30}$$

Identification des Facteurs devant A_r

Après substitution et simplification par les harmoniques, chaque équation donne :

$$\sum_{r=1}^{6} A_r \cdot \underbrace{M_{ij}(\tau_r) \cdot V_j^{(r)}}_{=0 \text{ si } \tau_r \text{ est racine}} \cdot e^{\tau_r z} = F_{\mathrm{th},i}$$

Condition pour que la solution existe :

$$\boxed{\det(\mathbf{M}(\tau_r)) = 0} \quad \Rightarrow \quad \tau_r \text{ est mode propre}$$

Le vecteur propre $\mathbf{V}^{(r)}$ appartient au noyau de $\mathbf{M}(\tau_r)$.

3.5 Résumé : Matrice R Complète

Qu'est-ce que la matrice $\mathbf{R}(\tau)$?

Rôle physique : La matrice $\mathbf{R}(\tau)$ est l'**opérateur constitutif** qui relie le vecteur propre de déplacement $\mathbf{V}^{(r)}$ au vecteur propre de contrainte $\mathbf{W}^{(r)}$.

Interprétation :

— Elle encode la loi de Hooke ($\sigma = C : \varepsilon$) dans l'espace des modes propres

— Elle dépend de τ car la dérivation $\partial/\partial x_3 \to \tau$ apparaît dans le calcul des déformations

— Elle dépend de δ_1, δ_2 qui sont les nombres d'onde latéraux

Construction : La matrice $\mathbf{R}(\tau)$ est construite en calculant les contraintes de cisaillement $(\sigma_{13}, \sigma_{23})$ et d'arrachement (σ_{33}) à partir des déplacements via la loi de comportement.

Matrice R(τ) - Passage Déplacement $\to$ Contrainte

$$\mathbf{R}(\tau) = \begin{pmatrix} C_{55}\tau & 0 & C_{55}\delta_1 \\ 0 & C_{44}\tau & C_{44}\delta_2 \\ -C_{13}\delta_1 & -C_{23}\delta_2 & C_{33}\tau \end{pmatrix}$$

Signification des termes :

- **Diagonale :** Termes proportionnels à τ (dérivée en x_3)
- **Dernière colonne :** Termes proportionnels à δ_i (dérivées latérales)
- **Dernière ligne :** Contribution des déformations planes à σ_{33}

Le vecteur propre de contrainte est :

$$\mathbf{W}^{(r)} = \mathbf{R}(\tau_r) \cdot \mathbf{V}^{(r)} = \begin{pmatrix} \sigma_{13}^{(r)}/A_r \\ \sigma_{23}^{(r)}/A_r \\ \sigma_{33}^{(r)}/A_r \end{pmatrix}$$

3.6 Écriture Finale : Amplitudes dans le Système Global

Système Final à Résoudre

Pour une couche k, le vecteur d'état à la position z :

$$\begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ u_3(z) \\ \sigma_{13}(z) \\ \sigma_{23}(z) \\ \sigma_{33}(z) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_1^{(1)}e^{\tau_1 z} & \cdots & V_1^{(6)}e^{\tau_6 z} \\ V_2^{(1)}e^{\tau_1 z} & \cdots & V_2^{(6)}e^{\tau_6 z} \\ V_3^{(1)}e^{\tau_1 z} & \cdots & V_3^{(6)}e^{\tau_6 z} \\ W_1^{(1)}e^{\tau_1 z} & \cdots & W_1^{(6)}e^{\tau_6 z} \\ W_2^{(1)}e^{\tau_1 z} & \cdots & W_2^{(6)}e^{\tau_6 z} \\ W_3^{(1)}e^{\tau_1 z} & \cdots & W_3^{(6)}e^{\tau_6 z} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\Phi}(z)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{pmatrix}}_{\text{Amplitudes}} + \mathbf{SV}_{\text{part}}$$

Les 6 amplitudes A_r sont les inconnues à déterminer par les conditions aux limites.

4 Construction du Système Global

4.1 Vecteur d'État

Vecteur d'État à la Position z

Pour chaque couche k, le vecteur d'état contient déplacements et contraintes :

$$\mathbf{SV}^{(k)}(z) = \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ u_3(z) \\ \sigma_{13}(z) \\ \sigma_{23}(z) \\ \sigma_{33}(z) \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}^{(k)}(z) \cdot \mathbf{C}^{(k)} + \mathbf{SV}^{(k)}_{\text{part}}(z)$$

4.2 Matrice Modale $\Phi(z)$

Construction de $\Phi(z)$

La matrice $\mathbf{\Phi}(z)$ est de dimension 6×6 :

$$\mathbf{\Phi}(z) = \begin{pmatrix} V_1^{(1)} e^{\tau_1 z} & V_1^{(2)} e^{\tau_2 z} & \cdots & V_1^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ V_2^{(1)} e^{\tau_1 z} & V_2^{(2)} e^{\tau_2 z} & \cdots & V_2^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ V_3^{(1)} e^{\tau_1 z} & V_3^{(2)} e^{\tau_2 z} & \cdots & V_3^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ W_1^{(1)} e^{\tau_1 z} & W_1^{(2)} e^{\tau_2 z} & \cdots & W_1^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ W_2^{(1)} e^{\tau_1 z} & W_2^{(2)} e^{\tau_2 z} & \cdots & W_2^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ W_3^{(1)} e^{\tau_1 z} & W_3^{(2)} e^{\tau_2 z} & \cdots & W_3^{(6)} e^{\tau_6 z} \end{pmatrix}$$

Où $\mathbf{W}^{(r)} = \mathbf{R}(\tau_r) \cdot \mathbf{V}^{(r)}$ est le vecteur propre de contrainte.

4.3 Écriture Explicite des Amplitudes

Vecteur d'Amplitudes pour 3 Couches

Le vecteur global d'amplitudes est :

$$\mathbf{A}_{\text{global}} = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} & C_3^{(1)} & C_4^{(1)} & C_5^{(1)} & C_6^{(1)} & C_1^{(2)} & C_2^{(2)} & \cdots & C_6^{(3)} \end{pmatrix}^T$$

Signification physique des amplitudes :

- $C_r^{(k)}$: Amplitude du mode r dans la couche k
- Mode $r = 1, 2$: associé à $\pm\tau_1$ (décroissance/croissance rapide)
- Mode $r = 3, 4$: associé à $\pm\tau_2$ (décroissance/croissance intermédiaire)
- Mode $r = 5, 6$: associé à $\pm\tau_3$ (décroissance/croissance lente)

5 Assemblage de la Matrice Globale

5.1 Structure par Blocs

Pour un système à 3 couches, la matrice globale $\mathbf{K}_{\text{glob}}$ est de dimension 18×18 :

Structure de $\mathbf{K}_{\text{glob}}$

$$\mathbf{K}_{\text{glob}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_\sigma \mathbf{\Phi}^{(1)}(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}^{(1)}(h_1) & -\mathbf{\Phi}^{(2)}(0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}^{(2)}(h_2) & -\mathbf{\Phi}^{(3)}(0) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_\sigma \mathbf{\Phi}^{(3)}(h_3) \end{pmatrix}$$

Avec la matrice de sélection des contraintes :

$$\mathbf{B}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2 Détail des Équations

18 Équations du Système

Bloc 1 : Conditions aux limites en $z = 0$ (3 équations)

$$\sigma_{13}^{(1)}(0) = 0, \quad \sigma_{23}^{(1)}(0) = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)}(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Surface inférieure libre de contraintes.

Bloc 2 : Continuité à l'interface 1-2 (6 équations)

$$\mathbf{SV}^{(1)}(h_1) = \mathbf{SV}^{(2)}(0)$$

$\Rightarrow$ Continuité des déplacements ET des contraintes.

Bloc 3 : Continuité à l'interface 2-3 (6 équations)

$$\mathbf{SV}^{(2)}(h_2) = \mathbf{SV}^{(3)}(0)$$

Bloc 4 : Conditions aux limites en $z = H$ (3 équations)

$$\sigma_{13}^{(3)}(h_3) = 0, \quad \sigma_{23}^{(3)}(h_3) = 0, \quad \sigma_{33}^{(3)}(h_3) = 0$$

$\Rightarrow$ Surface supérieure libre de contraintes.

6 Second Membre Thermique

Vecteur $\mathbf{F}_{\text{glob}}$

Le second membre contient les contributions thermiques :

$$\mathbf{F}_{\text{glob}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{T}_{\text{part}}^{(1)}(0)/C_{\text{ref}} \\ \mathbf{U}_{\text{part}}^{(2)}(0) - \mathbf{U}_{\text{part}}^{(1)}(h_1) \\ (\mathbf{T}_{\text{part}}^{(2)}(0) - \mathbf{T}_{\text{part}}^{(1)}(h_1))/C_{\text{ref}} \\ \mathbf{U}_{\text{part}}^{(3)}(0) - \mathbf{U}_{\text{part}}^{(2)}(h_2) \\ (\mathbf{T}_{\text{part}}^{(3)}(0) - \mathbf{T}_{\text{part}}^{(2)}(h_2))/C_{\text{ref}} \\ -\mathbf{T}_{\text{part}}^{(3)}(h_3)/C_{\text{ref}} \end{pmatrix}$$

Où :
- $\mathbf{U}_{\text{part}}^{(k)}$: Solution particulière de déplacement (thermique)
- $\mathbf{T}_{\text{part}}^{(k)}$: Solution particulière de contrainte (thermique)
- C_{ref} : Rigidité de référence pour normalisation (200 GPa)

7 Résolution du Système

7.1 Préconditionnement

Le système peut être mal conditionné ($\text{cond}(\mathbf{K}) > 10^{10}$). Le code utilise :

1. **Équilibrage par scaling :**

$$\mathbf{D}_r \cdot \mathbf{K}_{\text{glob}} \cdot \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{y} = \mathbf{D}_r \cdot \mathbf{F}_{\text{glob}}$$

2. **Régularisation de Tikhonov :**

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \cdot \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{F}}{\sigma_i} \cdot \mathbf{v}_i$$

7.2 Extraction des Amplitudes

Après résolution :

$$\mathbf{A}_{\text{global}} = \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{y}$$

Et pour chaque couche :

$$\mathbf{C}^{(k)} = \mathbf{A}_{\text{global}}[6(k-1) : 6k]$$

8 Reconstruction de la Solution

Solution Complète

Le champ de contraintes reconstruit :

$$\boldsymbol{\sigma}(z) = \underbrace{\boldsymbol{\Phi}_\sigma(z) \cdot \mathbf{C}^{(k)}}_{\text{Solution homogène}} + \underbrace{\sum_m \mathbf{T}_{\text{part},m}(z)}_{\text{Solutions particulières}}$$

Avec dé-normalisation :

$$\sigma_{ij}^{\text{réel}} = \sigma_{ij}^{\text{normalisé}} \times C_{\text{ref}} \times 10^9 \quad [\text{Pa}]$$

9 Correspondance Code/Théorie

Concept Théorique	**Fonction Python**	**Lignes**
$\det(\mathbf{M}(\tau)) = 0$	`solve_characteristic_equation()`	78-186
Vecteurs propres $\mathbf{V}_r$	`compute_all_eigenvectors()`	243-257
Matrice $\mathbf{R}(\tau)$	`get_R_matrix()`	264-334
Vecteurs $\mathbf{W}_r$	`compute_all_stress_eigenvectors()`	348-369
Matrice $\boldsymbol{\Phi}(z)$	`build_Phi_matrix_normalized()`	508-527
Forçage thermique	`compute_thermal_forcing()`	406-448
Système $\mathbf{K} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{F}$	`solve_multilayer()`	992-1141
Régularisation Tikhonov	`solve_regularized_system()`	846-989
Profils de contraintes	`compute_multilayer_stress_profile()`	1144-1293

TABLE 2 – Correspondance entre théorie et implémentation dans `core/mechanical.py`

10 Validation de la Structure Matricielle

Critères de Validation

1. **Dimension :** $\mathbf{K}_{\text{glob}} \in \mathbb{C}^{6N \times 6N}$
2. **Symétrie :** Structure bande tridiagonale par blocs
3. **Conditions aux limites :**

— 3 équations de surface libre en $z = 0$
— 3 équations de surface libre en $z = H$

4. **Continuité :** 6 équations par interface interne
5. **Total :** $3 + 6(N - 1) + 3 = 6N$ équations ✓

Vérification Numérique

Le code vérifie automatiquement :
- Conditionnement avant/après équilibrage
- Résidu relatif $\|\mathbf{KC} - \mathbf{F}\|/\|\mathbf{F}\|$
- Paires conjuguées des racines τ