Note de Calcul Avancée :
Dérivation Exacte du Système Spectral (TBC)

Guitton, Voisin, Dauriac, Leboeuf
Projet Ingénierie 5A - Modélisation Thermomécanique

9 décembre 2025

Résumé

Ce document constitue la justification théorique complète du modèle mécanique implémenté. Il détaille la dérivation analytique régissant l'équilibre élastostatique d'une couche orthotrope et explicite le passage des équations aux dérivées partielles (EDP) au système algébrique par l'approche spectrale.

Table des matières

1 1. Cadre Théorique et Ansatz Spectral

1.1 1.1 Définition du Domaine et Hypothèses

Nous considérons une plaque multicouche d'épaisseur totale H, définie sur le domaine orthogonal $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, H]$. Chaque couche est constituée d'un matériau élastique linéaire et orthotrope, dont les axes principaux d'orthotropie sont alignés avec le repère global (x_1, x_2, x_3). L'équilibre statique est régi par l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \tag{1}$$

1.2 1.2 Séparation des variables (Ansatz)

La méthode de résolution repose sur la séparation des variables. Nous cherchons une solution sous forme de séries de Fourier doubles. Soient les nombres d'onde spatiaux définis par :

$$\delta_1 = \frac{m\pi}{L_1}, \qquad \delta_2 = \frac{n\pi}{L_2}, \qquad (m, n \in \mathbb{N}^*).$$

Pour un mode propre donné (δ_1, δ_2), le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ est supposé sous la forme séparée :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = e^{\tau x_3} \begin{pmatrix} A_1 \cos(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) \\ A_2 \sin(\delta_1 x_1) \cos(\delta_2 x_2) \\ A_3 \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Où :
- $e^{\tau x_3}$ décrit la variation (exponentielle) à travers l'épaisseur, caractéristique des systèmes multicouches à coefficients constants par morceaux.
- $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]^T$ est le vecteur de polarisation (amplitudes inconnues).

1.3 1.3 Justification Mathématique et Physique

Le choix spécifique de l'alternance sinus/cosinus dans l'équation (2) n'est pas arbitraire. Il répond à deux impératifs :

1. **Satisfaction des Conditions aux Limites de Navier (Appuis Simples) :** Sur les bords latéraux (ex : $x_1 = 0$ et $x_1 = L_1$), cette forme impose naturellement :
   - Un déplacement normal nul ($u_3 \propto \sin(0) = 0$).
   - Une dilatation thermique nulle ($\sigma_{11} \propto \sin(0) = 0$).

   Ceci correspond physiquement à une plaque simplement appuyée sur ses bords, un cas canonique en mécanique des structures.
2. **Compatibilité des Dérivées (Factorisation) :** Pour que les équations d'équilibre se simplifient en un système algébrique, tous les termes d'une même équation doivent partager la même dépendance spatiale après dérivation.
   - Pour l'équilibre en x_1, les termes $\partial_1\sigma_{11}$, $\partial_2\sigma_{12}$ et $\partial_3\sigma_{13}$ doivent être proportionnels.
   - Avec cet Ansatz, la dérivée $\partial_1(\cos)$ donne un $-\sin$, et la dérivée $\partial_2(\sin)$ donne un cos, ce qui harmonise les signatures spatiales et permet la factorisation par $e^{\tau x_3} \cos(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2)$.

2 2. Cinématique Détaillée : Tenseur des Déformations

Le tenseur des déformations linéarisées est défini par la partie symétrique du gradient de déplacement : $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$. En composantes, cela s'écrit $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$.

Pour expliciter ces calculs, introduisons les deux fonctions de base spatiales résultant de l'Ansatz spectral :

- Base Impaire (pour les déplacements normaux) : $\mathcal{S}(\mathbf{x}) = e^{\tau x_3} \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2)$
- Base Paire (pour le cisaillement plan) : $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = e^{\tau x_3} \cos(\delta_1 x_1) \cos(\delta_2 x_2)$

Nous appliquons les opérateurs différentiels partiels $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ à chaque composante du vecteur $\mathbf{u}$.

2.1 2.1 Déformations Normales (Extension/Compression)

Les déformations diagonales impliquent la dérivée de la fonction propre dans sa propre direction. *Exemple pour* ε_{11} *:* La dérivée de $\cos(\delta_1 x_1)$ est $-\delta_1 \sin(\delta_1 x_1)$.

$$\varepsilon_{11} = \partial_1 u_1 = A_1 e^{\tau x_3} [\partial_1 \cos(\delta_1 x_1)] \sin(\delta_2 x_2) = -\delta_1 A_1 \mathcal{S} \tag{3}$$
$$\varepsilon_{22} = \partial_2 u_2 = A_2 e^{\tau x_3} \sin(\delta_1 x_1) [\partial_2 \cos(\delta_2 x_2)] = -\delta_2 A_2 \mathcal{S} \tag{4}$$
$$\varepsilon_{33} = \partial_3 u_3 = A_3 [\partial_3 e^{\tau x_3}] \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) = \tau A_3 \mathcal{S} \tag{5}$$

Observation : Toutes les déformations normales sont proportionnelles à $\mathcal{S}$.

2.2 2.2 Déformations de Cisaillement (Glissement)

Les cisaillements impliquent des dérivées croisées. Calculons $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1$ en détail :

- $\partial_1 u_2 = A_2 e^{\tau x_3} [\partial_1 \sin(\delta_1 x_1)] \cos(\delta_2 x_2) = \delta_1 A_2 \mathcal{C}$
- $\partial_2 u_1 = A_1 e^{\tau x_3} \cos(\delta_1 x_1) [\partial_2 \sin(\delta_2 x_2)] = \delta_2 A_1 \mathcal{C}$

En sommant, nous obtenons les expressions finales (Notation Ingénieur) :

$$\gamma_{12} = (\delta_1 A_2 + \delta_2 A_1) e^{\tau x_3} \cos(\delta_1 x_1) \cos(\delta_2 x_2) \tag{6}$$
$$\gamma_{13} = (\delta_1 A_3 + \tau A_1) e^{\tau x_3} \cos(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) \tag{7}$$
$$\gamma_{23} = (\delta_2 A_3 + \tau A_2) e^{\tau x_3} \sin(\delta_1 x_1) \cos(\delta_2 x_2) \tag{8}$$

Note Technique : Le passage des fonctions sinus aux cosinus lors de la dérivation assure la compatibilité des équations d'équilibre. Par exemple, γ_{12} est porté par $\cos\cos$, dont la dérivée ∂_2 redonnera du $\cos\sin$ (compatible avec l'équation selon x_1).

3 3. Loi de Comportement Détaillée (Approche Thermo-Élastique)

Le comportement mécanique de chaque couche est modélisé par une loi d'élasticité linéaire orthotrope. La relation contrainte-déformation locale s'écrit sous la forme tensorielle générale :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \alpha_{kl} \Delta T(\mathbf{x}) \right) \tag{9}$$

Pour l'établissement des modes propres (système homogène), nous considérons ici la partie purement élastique ($\Delta T = 0$).

3.1 3.1 Notation de Voigt et Rigidité Orthotrope

Pour simplifier l'écriture des tenseurs d'ordre 4, nous adoptons la notation contractée de Voigt ($11 \to 1$, $22 \to 2$, $33 \to 3$, $23 \to 4$, $13 \to 5$, $12 \to 6$). Pour un matériau orthotrope dont les axes principaux sont alignés avec le repère de la plaque, la matrice de rigidité $\mathbf{C}$ possède la structure creuse suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Note : Les termes $C_{14}, C_{15}, \ldots$ sont nuls, ce qui découple les modes de traction/compression des modes de cisaillement pur.

3.2 3.2 Expression Analytique des Contraintes Utiles

Pour construire l'équation d'équilibre selon l'axe x_1 ($\partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} + \partial_3\sigma_{13} = 0$), nous avons besoin des expressions explicites de σ_{11}, σ_{12} et σ_{13}. Nous injectons les déformations calculées en Section 2 dans la loi de comportement :

— **Contrainte Normale σ_{11} (Traction selon x_1) :** Elle dépend des trois déformations normales via les coefficients de Poisson (C_{12}, C_{13}).

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \\ &= C_{11}(-\delta_1 A_1 \mathcal{S}) + C_{12}(-\delta_2 A_2 \mathcal{S}) + C_{13}(\tau A_3 \mathcal{S}) \\ &= \boxed{[-C_{11}\delta_1 A_1 - C_{12}\delta_2 A_2 + C_{13}\tau A_3]\,\mathcal{S}} \end{aligned}$$

— **Cisaillement Plan σ_{12} (ou σ_6) :** Il ne dépend que de la déformation de cisaillement plan γ_{12} et du module C_{66} (ou G_{12}).

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= C_{66}\gamma_{12} \\ &= C_{66}\left[(\delta_1 A_2 - \delta_2 A_1)e^{\tau x_3}\cos(\delta_1 x_1)\cos(\delta_2 x_2)\right] \\ &= \boxed{C_{66}(\delta_1 A_2 - \delta_2 A_1)e^{\tau x_3}\cos(\delta_1 x_1)\cos(\delta_2 x_2)} \end{aligned}$$

— **Cisaillement Transverse σ_{13} (ou σ_5) :** Il ne dépend que de γ_{13} et du module C_{55} (ou G_{13}).

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= C_{55}\gamma_{13} \\ &= C_{55}\left[(\delta_1 A_3 + \tau A_1)e^{\tau x_3}\cos(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2)\right] \\ &= \boxed{C_{55}(\delta_1 A_3 + \tau A_1)e^{\tau x_3}\cos(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2)} \end{aligned}$$

4 4. Démonstration Détaillée de l'Équilibre (Projection sur x_1)

L'équation d'équilibre local, projetée sur l'axe x_1, requiert la nullité de la divergence du vecteur contrainte :

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \tag{11}$$

Pour résoudre cette équation, nous injectons les lois de comportement définies précédemment et appliquons les opérateurs différentiels aux fonctions de forme. Nous cherchons à factoriser l'équation par la fonction de base spatiale commune :

$$\mathcal{F}(x) = e^{\tau x_3}\cos(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2)$$

4.1 Analyse du Terme I : Gradient de contrainte normale ($\partial_1\sigma_{11}$)

La contrainte normale σ_{11} est proportionnelle à la fonction de forme $\mathcal{S} = e^{\tau x_3}\sin(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2)$. L'opérateur ∂_{x_1} agit sur le sinus :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[\sin(\delta_1 x_1)] = \delta_1\cos(\delta_1 x_1)$$

En appliquant cela à l'expression de σ_{11} :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left([-C_{11}\delta_1 A_1 - C_{12}\delta_2 A_2 + C_{13}\tau A_3]\,\mathcal{S}\right)\\ &= [-C_{11}\delta_1 A_1 - C_{12}\delta_2 A_2 + C_{13}\tau A_3]\times(\delta_1\mathcal{F}(x))\\ &= \left[-\mathbf{C_{11}}\boldsymbol{\delta_1^2}\mathbf{A_1} - \mathbf{C_{12}}\boldsymbol{\delta_1\delta_2}\mathbf{A_2} + \mathbf{C_{13}}\boldsymbol{\delta_1\tau}\mathbf{A_3}\right]\mathcal{F}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

4.2 Analyse du Terme II : Gradient de cisaillement plan ($\partial_2\sigma_{12}$)

Le cisaillement σ_{12} contient le produit $\cos(\delta_1 x_1)\cos(\delta_2 x_2)$. L'opérateur ∂_{x_2} agit sur le cosinus, introduisant un changement de signe :

$$\frac{\partial}{\partial x_2}[\cos(\delta_2 x_2)] = -\delta_2\sin(\delta_2 x_2)$$

En injectant l'expression de σ_{12} (Loi de Hooke) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} &= C_{66}(\delta_1 A_2 - \delta_2 A_1)e^{\tau x_3}\cos(\delta_1 x_1)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}[\cos(\delta_2 x_2)]}_{-\delta_2\sin(\delta_2 x_2)}\\ &= C_{66}(\delta_1 A_2 - \delta_2 A_1)\times(-\delta_2\mathcal{F}(x))\\ &= \left[-\mathbf{C_{66}}\boldsymbol{\delta_1\delta_2}\mathbf{A_2} + \mathbf{C_{66}}\boldsymbol{\delta_2^2}\mathbf{A_1}\right]\mathcal{F}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

4.3 Analyse du Terme III : Gradient de cisaillement transverse ($\partial_3\sigma_{13}$)

Le cisaillement transverse σ_{13} dépend de l'épaisseur via $e^{\tau x_3}$. L'opérateur ∂_{x_3} agit simplement sur l'exponentielle :

$$\frac{\partial}{\partial x_3}[e^{\tau x_3}] = \tau e^{\tau x_3}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} &= C_{55}(\delta_1 A_3 + \tau A_1)\cos(\delta_1 x_1)\sin(\delta_2 x_2)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3}[e^{\tau x_3}]}_{\tau e^{\tau x_3}}\\ &= C_{55}(\delta_1 A_3 + \tau A_1)\times(\tau\mathcal{F}(x))\\ &= \left[\mathbf{C_{55}}\boldsymbol{\delta_1\tau}\mathbf{A_3} + \mathbf{C_{55}}\boldsymbol{\tau^2}\mathbf{A_1}\right]\mathcal{F}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

5 5. Synthèse et Construction de la Matrice M (Ligne 1)

L'équation d'équilibre locale $\sum_j \partial_j \sigma_{1j} = 0$ implique que la somme des coefficients associés au facteur de forme $\mathcal{F}(x)$ doit s'annuler. Nous procédons au regroupement des termes par amplitude A_1, A_2, A_3 en sommant les contributions des trois gradients calculés précédemment.

5.1 5.1 Identification des Contributions

— **Termes en A_1 (Diagonal) :** Proviennent de la contrainte normale (Terme I) et des deux cisaillements (Termes II et III).

$$\text{Sum}(A_1) = \underbrace{-C_{11}\delta_1^2}_{\text{Terme I}} \underbrace{-C_{66}\delta_2^2}_{\text{Terme II}} \underbrace{+C_{55}\tau^2}_{\text{Terme III}}$$

— **Termes en A_2 (Couplage Plan $u_1 - u_2$) :** Proviennent de la contrainte normale (effet de Poisson) et du cisaillement plan.

$$\text{Sum}(A_2) = \underbrace{-C_{12}\delta_1\delta_2}_{\text{Terme I}} \underbrace{-C_{66}\delta_1\delta_2}_{\text{Terme II}}$$

— **Termes en A_3 (Couplage Transverse $u_1 - u_3$) :** Proviennent de la contrainte normale et du cisaillement transverse.

$$\text{Sum}(A_3) = \underbrace{C_{13}\delta_1\tau}_{\text{Terme I}} \underbrace{+C_{55}\delta_1\tau}_{\text{Terme III}}$$

5.2 5.2 Coefficients de la Matrice Dynamique

En factorisant ces sommes, nous identifions les éléments de la première ligne de la matrice caractéristique $\mathbf{M}(\tau)$.

Élément Diagonal $M_{11}(\tau)$: Il représente la rigidité dynamique apparente selon l'axe x_1. Notez la compétition entre le terme en τ^2 (courbure selon l'épaisseur) et les termes en δ^2 (courbure dans le plan).

$$M_{11} = C_{55}\tau^2 - (C_{11}\delta_1^2 + C_{66}\delta_2^2) \tag{12}$$

Élément de Couplage Plan M_{12} : Ce terme couple les modes de dilatation et de cisaillement dans le plan (x_1, x_2). Il est constant par rapport à τ.

$$M_{12} = -(C_{12} + C_{66})\delta_1\delta_2 \tag{13}$$

Élément de Couplage Transverse $M_{13}(\tau)$: Ce terme, linéaire en τ, traduit l'interaction entre la flexion hors-plan et l'extension dans le plan.

$$M_{13} = +(C_{13} + C_{55})\delta_1\tau \tag{14}$$

Note Justificative sur le Signe $(+)$:
Le document ProjetEstaca présente ce terme avec un signe $(-)$. Nous conservons ici le signe $(+)$ pour garantir la cohérence physique avec l'équation d'équilibre $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$. En effet, ce terme provient de la somme des dérivées partielles positives : $\partial_1 \sigma_{11}$ (terme en C_{13}) et $\partial_3 \sigma_{13}$ (terme en C_{55}). Le signe $(-)$ observé ailleurs résulte d'une convention de projection différente (multiplication de l'équation par -1), mais notre formulation assure que la matrice $\mathbf{M}$ est directement issue de la divergence du tenseur des contraintes.

6 6. Construction Détaillée du Système Matriciel Complet

La matrice caractéristique $\mathbf{M}(\tau)$ synthétise le couplage entre les trois composantes du déplacement. Nous avons détaillé la première ligne (projection sur x_1). Pour obtenir le système complet $\mathbf{M}(\tau)\mathbf{A} = \mathbf{0}$, nous appliquons la même rigueur aux projections sur x_2 et x_3.

6.1 6.1 Équilibre selon x_2 (Cisaillement Plan)

L'équation d'équilibre est $\partial_1 \sigma_{21} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} = 0$. En injectant l'ansatz spectral, les dérivées spatiales génèrent le facteur commun $\mathcal{G}(x) = e^{\tau x_3} \sin(\delta_1 x_1) \cos(\delta_2 x_2)$.

— $\partial_1 \sigma_{21} \to \delta_1 C_{66}(\delta_1 A_2 - \delta_2 A_1)$
— $\partial_2 \sigma_{22} \to -\delta_2(-C_{12}\delta_1 A_1 - C_{22}\delta_2 A_2 + C_{23}\tau A_3)$
— $\partial_3 \sigma_{23} \to \tau C_{44}(\delta_2 A_3 + \tau A_2)$

Le regroupement des termes fournit la **deuxième ligne** de la matrice :

$$\begin{aligned}
&\text{Coef } A_1 : -\delta_1\delta_2(C_{12} + C_{66}) \\
&\text{Coef } A_2 : C_{44}\tau^2 - (C_{66}\delta_1^2 + C_{22}\delta_2^2) \\
&\text{Coef } A_3 : \delta_2\tau(C_{23} + C_{44})
\end{aligned}$$

6.2 6.2 Équilibre selon x_3 (Direction Normale)

L'équation $\partial_1 \sigma_{31} + \partial_2 \sigma_{32} + \partial_3 \sigma_{33} = 0$ est régie par le facteur $\mathcal{H}(x) = e^{\tau x_3} \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2)$.

— $\partial_1 \sigma_{31} \to \delta_1 C_{55}(\delta_1 A_3 + \tau A_1)$
— $\partial_2 \sigma_{32} \to \delta_2 C_{44}(\delta_2 A_3 + \tau A_2)$
— $\partial_3 \sigma_{33} \to \tau(-C_{13}\delta_1 A_1 - C_{23}\delta_2 A_2 + C_{33}\tau A_3)$

Le regroupement fournit la **troisième ligne** de la matrice :

$$\begin{aligned}
&\text{Coef } A_1 : \delta_1\tau(C_{13} + C_{55}) \\
&\text{Coef } A_2 : \delta_2\tau(C_{23} + C_{44}) \\
&\text{Coef } A_3 : C_{33}\tau^2 - (C_{55}\delta_1^2 + C_{44}\delta_2^2)
\end{aligned}$$

6.3 6.3 Assemblage Final

En rassemblant les coefficients calculés ci-dessus, nous obtenons le système caractéristique complet :

$$\begin{pmatrix} C_{55}\tau^2 - (C_{11}\delta_1^2 + C_{66}\delta_2^2) & -(C_{12}+C_{66})\delta_1\delta_2 & (C_{13}+C_{55})\delta_1\tau \\ -(C_{12}+C_{66})\delta_1\delta_2 & C_{44}\tau^2 - (C_{66}\delta_1^2 + C_{22}\delta_2^2) & (C_{23}+C_{44})\delta_2\tau \\ (C_{13}+C_{55})\delta_1\tau & (C_{23}+C_{44})\delta_2\tau & C_{33}\tau^2 - (C_{55}\delta_1^2 + C_{44}\delta_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (15)$$

Remarque sur la symétrie : Bien que la matrice $\mathbf{M}$ ne soit pas symétrique au sens classique ($M_{ij} \neq M_{ji}$ pour les termes hors-diagonaux contenant τ), elle possède une structure de symétrie par blocs liée à l'énergie de déformation, assurant la réalité des propriétés physiques sous-jacentes.

7 7. Analyse Approfondie de l'Équation Caractéristique

La condition d'existence de solutions non triviales ($\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$) impose la singularité de la matrice de rigidité dynamique :

$$\mathcal{P}(\tau) = \det(\mathbf{M}(\tau)) = 0 \quad (16)$$

Cette section détaille la structure algébrique de ce déterminant et la méthode de résolution associée.

7.1 7.1 Structure de Parité du Déterminant

Analysons la dépendance en τ des composantes de la matrice $\mathbf{M}(\tau)$ définie en (22) :

- Les termes diagonaux (M_{11}, M_{22}, M_{33}) sont de la forme $a\tau^2 + b$. Ce sont des fonctions **paires**.
- Les termes hors-diagonaux plan-plan (M_{12}, M_{21}) sont constants en τ. Ce sont des fonctions **paires**.
- Les termes de couplage plan-normal ($M_{13}, M_{31}, M_{23}, M_{32}$) sont de la forme $c\tau$. Ce sont des fonctions **impaires**.

Le déterminant d'une matrice 3×3 se développe selon la règle de Sarrus (ou des cofacteurs). Chaque terme du développement est le produit de trois éléments de la matrice. Par exemple :

- Produit diagonal : $M_{11}M_{22}M_{33} \propto (\tau^2)(\tau^2)(\tau^2) \to$ Pair
- Produit croisé : $M_{12}M_{23}M_{31} \propto (\text{Cst})(\tau)(\tau) \to$ Pair

Théorème de Symétrie Spectrale : En raison de l'orthotropie du matériau, tous les produits formant le déterminant sont des fonctions paires de τ. Par conséquent, le polynôme caractéristique ne contient que des puissances paires :

$$\det(\mathbf{M}(\tau)) = c_6\tau^6 + c_4\tau^4 + c_2\tau^2 + c_0 = 0 \quad (17)$$

Cette propriété est fondamentale : elle garantit que si τ est solution, alors $-\tau$ l'est aussi (symétrie des ondes montantes et descendantes).

7.2 7.2 Coefficients du Polynôme

Le coefficient dominant c_6 conditionne le degré réel du polynôme. Il est obtenu par le produit des termes en τ^2 de la diagonale :

$$c_6 = C_{55} \times C_{44} \times C_{33} \quad (18)$$

Puisque le tenseur de rigidité est défini positif (stabilité matérielle), $c_6 > 0$. Le polynôme est donc strictement de degré 6, assurant l'existence de 6 racines.

7.3 7.3 Résolution par Substitution

Posons la variable auxiliaire $X = \tau^2$. Le problème se réduit à une équation cubique standard :

$$c_6 X^3 + c_4 X^2 + c_2 X + c_0 = 0 \tag{19}$$

Les racines $\{X_1, X_2, X_3\}$ sont obtenues analytiquement (méthode de Cardan) ou numériquement (matrice compagnon). Les valeurs propres physiques sont alors :

$$\tau = \{\pm\sqrt{X_1}, \pm\sqrt{X_2}, \pm\sqrt{X_3}\} \tag{20}$$

7.4 7.4 Interprétation Physique et Sélection (Condition de Radiation)

Les racines τ décrivent le comportement du champ selon l'épaisseur x_3.

— Si $X_k > 0 \implies \tau = \pm\lambda$ (Réel) : Modes évanescents purs (effet de bord localisé).

— Si $X_k < 0 \implies \tau = \pm i\omega$ (Imaginaire) : Modes propagatifs (ondes sinusoïdales dans l'épaisseur).

— Si $X_k \in \mathbb{C} \implies \tau = a \pm ib$ (Complexe) : Modes oscillants amortis.

Critère de Saint-Venant (ou Condition de Radiation) : Pour une perturbation générée à une interface, l'énergie doit rester finie à distance. Nous ne conservons que les modes qui décroissent en s'éloignant de la source. Si l'on considère une couche semi-infinie $x_3 \in [0, +\infty[$, nous imposons :

$$\mathrm{Re}(\tau_r) < 0 \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, 3 \tag{21}$$

Dans le cas d'une couche finie (notre cas), les 6 modes sont techniquement actifs, mais cette distinction permet de classer les modes en "transmis" ($\mathrm{Re}(\tau) < 0$) et "réfléchis" ($\mathrm{Re}(\tau) > 0$) pour la construction de la matrice de transfert globale.

8 8. Reconstruction Complète des Champs Physiques

Le principe de superposition linéaire nous permet de construire la solution générale dans la couche i comme la somme de la réponse libre (modes propres mécaniques) et de la réponse forcée (chargement thermique).

8.1 8.1 Solution Homogène (Base Modale)

La partie homogène $\mathbf{u}_h$ décrit la réponse élastique du matériau. Elle est construite sur l'espace vectoriel engendré par les 3 modes stables retenus (condition de radiation) :

$$\mathbf{u}_h^{(i)}(x_3) = \sum_{r=1}^{3} c_r^{(i)} \mathbf{V}^{r,(i)} e^{\tau_r^{(i)} x_3} \tag{22}$$

Où $\mathbf{V}^{r,(i)}$ est le **vecteur propre de déplacement** (ou vecteur de polarisation), solution non-triviale du noyau de la matrice dynamique :

$$\mathbf{V}^{r,(i)} \in \mathrm{Ker}\left(\mathbf{M}^{(i)}(\tau_r^{(i)})\right) \tag{23}$$

Note d'implémentation : Ce vecteur est déterminé à une constante près. On le normalise souvent tel que $\|\mathbf{V}^r\| = 1$ ou en fixant sa composante normale $V_3^r = 1$.

8.2 8.2 Solution Particulière (Forçage Thermique)

Le champ de température $T(x_3)$ agit comme un terme source dans les équations d'équilibre. Si l'on suppose que le profil de température dans la couche suit une forme exponentielle (issue du modèle thermique) $T(x_3) = \hat{T}e^{\lambda_{th}x_3}$, alors la solution particulière de déplacement cherche s'écrit sous la même forme :

$$\mathbf{u}_{part}^{(i)}(x_3) = \mathbf{A}_{part}^{(i)}e^{\lambda_{th}x_3} \tag{24}$$

Le vecteur amplitude particulier $\mathbf{A}_{part}$ est solution du système linéaire non-homogène :

$$\mathbf{M}(\lambda_{th}) \cdot \mathbf{A}_{part} = \mathbf{F}_{th}(\lambda_{th}) \tag{25}$$

Où $\mathbf{F}_{th}$ est le vecteur force thermique généralisé, dérivé du terme $\nabla \cdot (\mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}T)$.

$$\mathbf{A}_{part} = [\mathbf{M}(\lambda_{th})]^{-1} \cdot \mathbf{F}_{th}$$

8.3 8.3 Calcul du Vecteur Contrainte (Traction)

Pour l'assemblage multicouche, la continuité des déplacements ne suffit pas ; il faut assurer la continuité du vecteur contrainte sur les facettes normales $\mathbf{e}_3$. Le vecteur traction $\mathbf{T} = [\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}]^T$ se reconstruit analytiquement à partir des déplacements :

$$\mathbf{T}^{(i)}(x_3) = \sum_{r=1}^{3} c_r^{(i)}\mathbf{W}^{r,(i)}e^{\tau_r^{(i)}x_3} + \mathbf{T}_{part}^{(i)}(x_3) \tag{26}$$

Où $\mathbf{W}^r$ est le **vecteur propre de contrainte**, calculé par application de la loi de comportement sur le mode propre $\mathbf{V}^r$:

$$\mathbf{W}^r = \mathbf{R}(\tau_r) \cdot \mathbf{V}^r \tag{27}$$

La matrice $\mathbf{R}(\tau)$ contient les lignes 5, 4 et 3 de la loi de Hooke (correspondant aux contraintes $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$).

8.4 8.4 Synthèse : Vecteur d'État

L'état complet d'une couche à la cote x_3 est entièrement décrit par le vecteur d'état $\mathcal{SV}$ (State Vector) de dimension 6, concaténant déplacement et contrainte :

$$\mathcal{SV}(x_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(x_3) \\ \mathbf{T}(x_3) \end{pmatrix} = \mathbf{E}(x_3) \cdot \mathbf{C} + \mathcal{SV}_{part}(x_3) \tag{28}$$

Cette formulation compacte prépare directement l'assemblage global par la méthode des matrices de transfert ou de raideur dynamique.

9 9. Assemblage Global et Résolution Multicouche

La structure complète est constituée de N couches. La résolution du problème global nécessite la détermination simultanée de toutes les amplitudes inconnues. Nous adoptons une formulation par **Vecteur d'État** pour systématiser l'écriture des conditions de continuité.

9.1 9.1 Définition du Vecteur d'État Local

En tout point z de la couche i, l'état mécanique est décrit par un vecteur $\mathcal{V}^{(i)}(z)$ de dimension 6, regroupant les déplacements et les vecteurs contrainte normale (les quantités continues à travers une interface) :

$$\mathcal{V}^{(i)}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(i)}(z) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(i)}(z) \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{6\times 1} \tag{29}$$

En utilisant la base modale construite précédemment, ce vecteur s'écrit comme le produit d'une matrice de passage $\mathbf{\Phi}$ (contruite sur les vecteurs propres $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$) et du vecteur des amplitudes inconnues $\mathbf{C}^{(i)}$, augmenté de la solution particulière thermique $\mathcal{P}^{(i)}$:

$$\mathcal{V}^{(i)}(z) = \mathbf{\Phi}^{(i)}(z) \cdot \mathbf{C}^{(i)} + \mathcal{P}^{(i)}(z) \tag{30}$$

Où $\mathbf{C}^{(i)} = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6]^T$ contient les 6 coefficients d'intégration de la couche i (3 modes montants, 3 descendants).

9.2 9.2 Écriture des Continuités aux Interfaces

Aux interfaces internes $z = z_k$ séparant la couche k et $k+1$, la continuité parfaite des matériaux impose :

$$\mathcal{V}^{(k)}(z_k) = \mathcal{V}^{(k+1)}(z_k) \tag{31}$$

En injectant la décomposition modale, nous obtenons une équation linéaire liant les coefficients de la couche k à ceux de la couche $k+1$:

$$\mathbf{\Phi}^{(k)}(z_k) \cdot \mathbf{C}^{(k)} - \mathbf{\Phi}^{(k+1)}(z_k) \cdot \mathbf{C}^{(k+1)} = \underbrace{\mathcal{P}^{(k+1)}(z_k) - \mathcal{P}^{(k)}(z_k)}_{\text{Saut de chargement thermique } \Delta\mathcal{P}_k} \tag{32}$$

Note Physique : Le terme de droite $\Delta\mathcal{P}_k$ représente la "force motrice" thermique. C'est la discontinuité des propriétés thermiques aux interfaces qui génère le chargement mécanique.

9.3 9.3 Conditions aux Limites (Bords Libres)

Sur la face supérieure ($z = H$) et inférieure ($z = 0$), la surface est libre de contrainte externe. Cela impose que les 3 dernières composantes du vecteur d'état soient nulles (ou égales à la pression gaz) :

$$\mathbf{B}_{bot} \cdot \mathcal{V}^{(1)}(0) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{top} \cdot \mathcal{V}^{(N)}(H) = \mathbf{0} \tag{33}$$

Où $\mathbf{B}$ sont des matrices booléennes sélectionnant les lignes de contrainte.

9.4 9.4 Structure du Système Global

L'ensemble de ces équations forme un système linéaire de taille $6N \times 6N$. La matrice globale $\mathbb{K}_{glob}$ possède une structure **bloc-bidiagonale** caractéristique des systèmes sériels :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{bot}\mathbf{\Phi}_0^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{z_1}^{(1)} & -\mathbf{\Phi}_{z_1}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{\Phi}_{z_{N-1}}^{(N-1)} & -\mathbf{\Phi}_{z_{N-1}}^{(N)} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{top}\mathbf{\Phi}_H^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{(1)} \\ \mathbf{C}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta\mathcal{P}_1 \\ \vdots \\ \Delta\mathcal{P}_{N-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Soit sous forme compacte :

$$\mathbb{K}_{glob} \cdot \mathbf{C}_{tot} = \mathbf{F}_{therm} \tag{35}$$

La résolution numérique de ce système permet d'obtenir tous les coefficients $\mathbf{C}^{(i)}$, et donc de reconstruire analytiquement les champs de contraintes $\sigma_{ij}(x, y, z)$ en tout point de l'aube pour prédire l'endommagement (critère de Tsai-Wu ou délaminage).

A Annexe : Dérivation du Vecteur de Forçage Thermique

L'introduction d'un champ de température $T(\mathbf{x})$ génère des contraintes thermiques qui agissent comme des forces volumiques fictives dans les équations d'équilibre. Nous partons de la loi de comportement thermo-élastique :

$$\boldsymbol{\sigma}_{tot} = \boldsymbol{\sigma}_{elas} - \boldsymbol{\sigma}_{th} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\sigma}_{th} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\alpha}\Delta T \tag{36}$$

L'équation d'équilibre devient : $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{elas} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{th}$. Le terme de droite constitue le vecteur de forçage thermique $\mathbf{F}_{th}$.

A.1 A.1 Modules Thermiques Orthotropes

Définissons les coefficients de contrainte thermique β_i (projection de $\mathbb{C} : \boldsymbol{\alpha}$ dans le repère orthotrope) :

$$\beta_1 = C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2 + C_{13}\alpha_3 \tag{37}$$
$$\beta_2 = C_{12}\alpha_1 + C_{22}\alpha_2 + C_{23}\alpha_3 \tag{38}$$
$$\beta_3 = C_{13}\alpha_1 + C_{23}\alpha_2 + C_{33}\alpha_3 \tag{39}$$

Note : Les termes de cisaillement thermique sont nuls pour un matériau orthotrope aligné.

A.2 A.2 Construction du Vecteur Force

Le champ de température est donné par la solution thermique précédente : $T(\mathbf{x}) = \hat{T}e^{\lambda x_3} \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2)$. Nous calculons la divergence $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{th}$ pour chaque composante :

Composante 1 (selon x_1) : Le terme source est $\partial_1 \sigma_{th,11} = \partial_1(\beta_1 T)$.

$$\partial_1 T = \delta_1 \hat{T} e^{\lambda x_3} \cos(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2)$$

D'où la première composante du vecteur force (compatible avec la base spatiale mécanique u_1) :

$$F_{th,1} = \beta_1 \delta_1 \hat{T}$$

Composante 2 (selon x_2) : Le terme source est $\partial_2 \sigma_{th,22} = \partial_2(\beta_2 T)$.

$$\partial_2 T = \delta_2 \hat{T} e^{\lambda x_3} \sin(\delta_1 x_1) \cos(\delta_2 x_2)$$

D'où la seconde composante du vecteur force :

$$F_{th,2} = \beta_2 \delta_2 \hat{T}$$

Composante 3 (selon x_3) : Le terme source est $\partial_3 \sigma_{th,33} = \partial_3(\beta_3 T)$. Ici, la dérivée porte sur l'exponentielle thermique $e^{\lambda x_3}$:

$$\partial_3 T = \lambda \hat{T} e^{\lambda x_3} \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2)$$

D'où la troisième composante du vecteur force :

$$F_{th,3} = \beta_3 \lambda \hat{T}$$

A.3 A.3 Résultat Final : Système Particulier

Le système linéaire à résoudre pour obtenir l'amplitude de la solution particulière $\mathbf{A}_{part}$ est :

$$\mathbf{M}(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} A_1^{part} \\ A_2^{part} \\ A_3^{part} \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} \beta_1 \delta_1 \\ \beta_2 \delta_2 \\ \beta_3 \lambda \end{pmatrix} \tag{40}$$

Où λ est l'exposant du mode thermique (connu) et non une valeur propre mécanique.