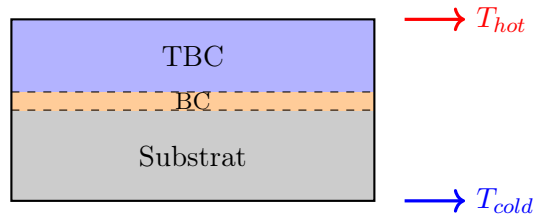


# Rapport de Synthèse

Modélisation Thermo-Mécanique  
des Systèmes Barrière Thermique (TBC)

Méthode Spectrale et Implémentation Python/Streamlit

Projet Industriel 5A-IDSA



**Projet :** Industriel 5A-IDSA  
**Encadrement :** ONERA (A. Vattré)  
**Partenaires :** ESTACA / Safran  
**Date :** 23 janvier 2026

**Mots-clés :** Barrière thermique, Méthode spectrale, Multicouche,  
Analyse modale, Critères d'endommagement, Streamlit

# Table des matières

<b>Résumé Exécutif</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
1.1 Contexte Industriel : Aubes de Turbines Nouvelle Génération . . . . .	4
1.2 Objectifs du Projet . . . . .	4
<b>2 Système Multicouche Étudié</b>	<b>4</b>
2.1 Paramètres Adimensionnels Clés . . . . .	4
2.2 Propriétés Matériaux . . . . .	5
<b>3 Modélisation Mathématique</b>	<b>5</b>
3.1 Étape 1-2 : Représentation Spectrale de la Température . . . . .	5
3.2 Étape 3 : Solution Thermique par Couche . . . . .	5
3.3 Étape 4 : Loi de Comportement Thermo-Élastique . . . . .	5
3.4 Étape 5 : Ansatz de Déplacement . . . . .	6
3.5 Étape 6 : Matrice Dynamique $\Gamma(\tau)$ et Valeurs Propres . . . . .	6
3.6 Étape 7 : Assemblage $9 \times 9$ et Termes Thermiques . . . . .	7
3.7 Étape 8 : Assemblage Multicouche . . . . .	7
<b>4 Critères d'Endommagement</b>	<b>8</b>
<b>5 Interprétation Physique des Résultats</b>	<b>9</b>
5.1 Signification des Contraintes Transverses . . . . .	9
5.2 Zones Critiques Typiques . . . . .	9
5.3 Influence des Paramètres sur les Contraintes . . . . .	9
5.4 Modes de Rupture aux Interfaces . . . . .	9
<b>6 Stabilité Numérique</b>	<b>9</b>
6.1 Préconditionnement par Équilibrage . . . . .	9
6.2 Régularisation de Tikhonov . . . . .	10
<b>7 Comparaison : Méthode Spectrale vs CLT</b>	<b>10</b>
<b>8 Validation : Référence ONERA/Safran</b>	<b>10</b>
<b>9 Architecture du Code et Interface</b>	<b>11</b>
9.1 Structure des Répertoires . . . . .	11
9.2 Tableau de Correspondance Théorie $\leftrightarrow$ Code . . . . .	11
9.3 Interface Streamlit . . . . .	11
<b>10 Conclusion</b>	<b>11</b>

# Résumé Exécutif

Projet 5A-IDSA : Évaluation Thermomécanique des Aubes de Turbines

**Encadrement :** ONERA (Aurélien Vattré) / ESTACA (Daniel Gaffié)  
**Objectif :** Développer un outil de simulation numérique pour l'évaluation thermomécanique des zones critiques d'endommagement dans les aubes de turbines multicouches nouvelle génération.

**Contexte Industriel :** Les aubes de turbines sont soumises à des conditions extrêmes : températures dépassant 1000°C, gradients thermiques sévères (jusqu'à 200°C sur quelques millimètres), et chargements mécaniques cycliques. Des architectures multicouches combinant substrat métallique, couche d'accroche et revêtement céramique sont utilisées pour améliorer leur durabilité.

**Méthodologie Développée :**

- Approche **semi-analytique** basée sur la décomposition spectrale (séries de Fourier doubles)
- Construction de la matrice dynamique  $\Gamma(\tau)$  avec opérateurs  $L_{jk}$
- Résolution du problème aux valeurs propres  $\det(\Gamma(\tau)) = 0$
- Assemblage matriciel bloc-diagonal  $9 \times 9$  avec sollicitation thermique
- Critères d'endommagement D et Tsai-Wu pour identification des zones critiques

**Résultats Clés :**

Métrique	Plage Typique	Seuil Critique
Température interface substrat/bondcoat	800–1050°C	$T_{crit} = 1100^\circ\text{C}$
Indicateur d'endommagement D	0.2–0.8	$D \geq 1$ (rupture)
Contrainte normale $\sigma_{33}$ max	50–200 MPa	$\sigma_t^{ceramic} = 150 \text{ MPa}$
Contrainte cisaillement $\sigma_{13}$ max	20–80 MPa	$\tau_{crit} = 120 \text{ MPa}$

**Livrables du Projet :**

1. **Module de calcul :** core/mechanical\_pdf.py
2. **Interface Streamlit :** Application interactive avec dashboard et visualisations 3D
3. **Documentation technique :** Ce rapport de synthèse

# 1 Introduction

## 1.1 Contexte Industriel : Aubes de Turbines Nouvelle Génération

Les aubes de turbines constituent l'un des composants les plus critiques des moteurs aéronautiques. Situées en aval de la chambre de combustion, elles sont exposées à des gaz à très haute température (supérieure à 1500°C) tout en devant supporter des contraintes mécaniques élevées dues à la rotation.

### Enjeux de Durabilité

Les phénomènes d'endommagement aux interfaces entre couches représentent la principale cause de défaillance des systèmes TBC :

- **Délamination** : Décohésion entre la couche céramique et le substrat
- **Écaillage** : Perte de morceaux de revêtement céramique
- **Fissuration** : Propagation de fissures dans les zones de concentration de contraintes

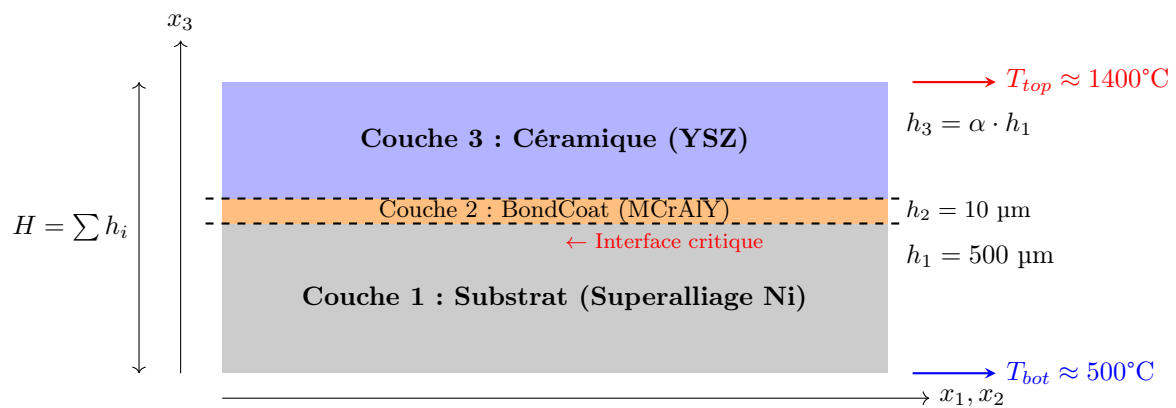
## 1.2 Objectifs du Projet

Ce projet vise à :

1. **Modéliser** la réponse thermomécanique d'architectures multicouches à partir d'un modèle tri-dimensionnel simplifié (méthode spectrale)
2. **Prédire** les zones critiques d'endommagement situées aux interfaces
3. **Quantifier** les effets de l'anisotropie élastique, des contrastes thermiques, et de l'épaisseur des couches
4. **Fournir** une carte de sensibilité pour guider la conception de futures aubes plus robustes

# 2 Système Multicouche Étudié

Le système TBC (Thermal Barrier Coating) comprend  $N$  couches empilées selon la direction normale  $x_3$  :



## 2.1 Paramètres Adimensionnels Clés

Les paramètres d'entrée de l'application sont :

$$\alpha = \frac{h_3}{h_1} \quad (\text{ratio épaisseur céramique/substrat, typiquement } 0.1 \text{ à } 1.0) \quad (1)$$

$$\beta = \frac{k_3}{k_1} \quad (\text{ratio conductivité thermique}) \quad (2)$$

$$L_w \quad (\text{longueur d'onde de la perturbation latérale, en mètres}) \quad (3)$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{\pi}{L_w} \quad (\text{nombres d'onde spectraux}) \quad (4)$$

## 2.2 Propriétés Matériaux

Les propriétés élastiques et thermiques de chaque couche sont définies dans le module `core/constants.py`. Les valeurs sont issues des publications ONERA/Safran (voir Section 8).

Propriété	Substrat (Ni)	BondCoat	Céramique (YSZ)
$C_{11}$ (GPa)	259.6	180	50
$C_{12}$ (GPa)	179.0	120	10
$C_{44}$ (GPa)	109.6	80	20
$\alpha$ ( $K^{-1}$ )	$13 \times 10^{-6}$	$14 \times 10^{-6}$	$10 \times 10^{-6}$

## 3 Modélisation Mathématique

Cette section présente la méthodologie complète de résolution, étape par étape.

### 3.1 Étape 1-2 : Représentation Spectrale de la Température

#### Développement en Séries de Fourier

La température est développée en série double de Fourier :

$$T(x_\alpha, x_3) = \sum_{m_\alpha, m_\beta=1}^{\infty} T_{m_\alpha m_\beta}(x_3) \sin(\delta_\alpha x_\alpha) \sin(\delta_\beta x_\beta) \quad (5)$$

avec les nombres d'onde  $\delta_\alpha = \frac{m_\alpha \pi}{L_\alpha}$ .

### 3.2 Étape 3 : Solution Thermique par Couche

Dans chaque couche  $i$ , la solution de l'équation de conduction est :

$$T^{(i)}(x_3) = A^{(i)} e^{\lambda^{(i)} x_3} + B^{(i)} e^{-\lambda^{(i)} x_3} \quad (6)$$

avec l'exposant thermique :

$$\lambda^{(i)} = \delta_\eta \sqrt{\frac{k_{\eta\eta}^{(i)}}{k_{33}^{(i)}}} \quad (7)$$

L'implémentation de cette étape se trouve dans le module `core/calculation.py`, fonction `solve_tbc_model_v2`

### 3.3 Étape 4 : Loi de Comportement Thermo-Élastique

#### Loi de Hooke avec Effet Thermique

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}(x_3) (\varepsilon_{kl}(x) - \alpha_{kl}(x_3) T(x)) \quad (8)$$

où  $C_{ijkl}$  est le tenseur de rigidité et  $\alpha_{kl}$  les coefficients de dilatation thermique.

**Correspondance Notation Tensorielle  $\leftrightarrow$  Voigt :**

$$\underline{\underline{C_{1111} \rightarrow C_{11} \quad C_{1122} \rightarrow C_{12} \quad C_{1133} \rightarrow C_{13} \quad | \quad C_{1313} \rightarrow C_{55} \quad C_{2323} \rightarrow C_{44} \quad C_{1212} \rightarrow C_{66}}}$$

### 3.4 Étape 5 : Ansatz de Déplacement

#### Forme des Champs de Déplacement

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = V_1(x_3) \cos(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) \quad (9)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = V_2(x_3) \sin(\delta_1 x_1) \cos(\delta_2 x_2) \quad (10)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = V_3(x_3) \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) \quad (11)$$

avec  $V_i(x_3) = A_i \cdot e^{\tau x_3}$  où  $\tau$  est la **valeur propre** à déterminer.

La forme de la solution générale pour chaque couche ( $i$ ) est :

$$U_\alpha^{(i)}(x_3) = \sum_{r=1}^3 A_\alpha^{r(i)} \cdot e^{\tau_r^{(i)} x_3}, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\} \quad (12)$$

### 3.5 Étape 6 : Matrice Dynamique $\Gamma(\tau)$ et Valeurs Propres

L'équation d'équilibre  $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  conduit au système homogène :

$$\Gamma(\tau) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (13)$$

#### Matrice $\Gamma(\tau)$ - Opérateurs $L_{jk}$

$$\Gamma(\tau) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \quad (14)$$

**Termes diagonaux :**

$$L_{11} = C_{55}\tau^2 - (C_{11}\delta_1^2 + C_{66}\delta_2^2) \quad (15)$$

$$L_{22} = C_{44}\tau^2 - (C_{22}\delta_2^2 + C_{66}\delta_1^2) \quad (16)$$

$$L_{33} = C_{33}\tau^2 - (C_{55}\delta_1^2 + C_{44}\delta_2^2) \quad (17)$$

**Termes croisés dans le plan (symétriques) :**

$$L_{12} = L_{21} = -(C_{12} + C_{66})\delta_1\delta_2 \quad (18)$$

**Termes hors-plan (ANTISYMETRIQUES) :**

$$L_{13} = +(C_{13} + C_{55})\delta_1\tau, \quad L_{31} = -(C_{13} + C_{55})\delta_1\tau \quad (19)$$

$$L_{23} = +(C_{23} + C_{44})\delta_2\tau, \quad L_{32} = -(C_{23} + C_{44})\delta_2\tau \quad (20)$$

#### Propriété d'Antisymétrie Critique

$L_{13} = -L_{31}$  et  $L_{23} = -L_{32}$  : cette antisymétrie provient de l'équation d'équilibre en direction  $x_3$  et est **essentielle** pour la physique correcte.

L'implémentation de ces opérateurs se trouve dans `core/mechanical_pdf.py`, fonctions `compute_L_operators()` et `get_Gamma_matrix()`.

**Équation Caractéristique :**

$$\det(\Gamma(\tau)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polynôme d'ordre 6 : } P(\tau) = c_6\tau^6 + c_4\tau^4 + c_2\tau^2 + c_0 = 0 \quad (21)$$

En posant  $X = \tau^2$ , on obtient un polynôme cubique avec 3 racines  $X_i$ . On sélectionne les 3 valeurs propres  $\tau_r$  avec  $\text{Re}(\tau_r) < 0$  (condition de radiation).

### 3.6 Étape 7 : Assemblage $9 \times 9$ et Termes Thermiques

Le système global pour une couche  $(i)$  s'écrit :

$$\left[ \mathbb{K}_{Dyn}^{(i)} \right]_{(9 \times 9)} \cdot \{ \mathcal{A}^{(i)} \}_{(9 \times 1)} = \{ \mathcal{F}_{Th}^{(i)} \}_{(9 \times 1)} \quad (22)$$

Matrice Bloc-Diagonale  $\mathbb{K}_{Dyn}$

$$\mathbb{K}_{Dyn}^{(i)} = \begin{pmatrix} \Gamma(\tau_1) & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma(\tau_2) & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma(\tau_3) \end{pmatrix}_{9 \times 9} \quad (23)$$

Chaque bloc  $\Gamma(\tau_r)$  est la matrice  $3 \times 3$  des opérateurs  $L_{jk}$  évaluée à  $\tau = \tau_r$ .

L'assemblage est implémenté dans `core/mechanical_pdf.py`, fonction `assemble_K_dyn_9x9()`.

Vecteur d'amplitudes et vecteur thermique :

$$\mathcal{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_2^1 \\ A_3^1 \\ A_1^2 \\ A_2^2 \\ A_3^2 \\ A_1^3 \\ A_2^3 \\ A_3^3 \end{pmatrix}^{(i)}, \quad \mathcal{F}_{Th}^{(i)} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}^{(i)} \quad (24)$$

Termes de Sollicitation Thermique  $Q_\alpha$

$$Q_1^{(i)} = (C_{11}\alpha_{11} + C_{12}\alpha_{22}) \delta_1 T(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \quad (25)$$

$$Q_2^{(i)} = (C_{22}\alpha_{22} + C_{12}\alpha_{11}) \delta_2 T(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \quad (26)$$

$$Q_3^{(i)} = (C_{13}\alpha_{11} + C_{23}\alpha_{22} + C_{33}\alpha_{33}) \left. \frac{dT}{dx_3} \right|_{x_3=\bar{h}^{(i)}} \quad (27)$$

L'implémentation se trouve dans `core/mechanical_pdf.py`, fonction `compute_Q_thermal_vector()`.

### 3.7 Étape 8 : Assemblage Multicouche

Système Global pour  $N$  couches :

$$K_{glob} \cdot \mathbf{C}_{global} = \mathbf{F}_{thermique} \quad (28)$$

avec  $6N$  inconnues (18 pour 3 couches).

**Bilan des Équations :**

- 3 équations : Surface libre en  $z = 0$  ( $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ )
- $6(N - 1)$  équations : Continuité aux interfaces (déplacements + contraintes)
- 3 équations : Surface libre en  $z = H$
- **Total** :  $3 + 6(N - 1) + 3 = 6N$  équations ✓

### Réduction du Nombre d'Équations : 27 → 18

**Formulation théorique complète** (pour  $N = 3$  couches) :

Type d'équation	Nombre	Formule
Équilibre volumique ( $\text{div } \sigma = 0$ )	9	3 directions $\times$ 3 couches
Continuité aux interfaces	12	2 interfaces $\times$ 6 conditions
Conditions aux limites ( $\sigma = 0$ )	6	2 surfaces $\times$ 3 composantes
<b>Total théorique</b>	<b>27</b>	

Les **9 équations d'équilibre volumique** sont **IMPLICITEMENT** satisfaites par l'approche modale ! En écrivant la solution avec les valeurs propres  $\tau_r$  de  $\Gamma(\tau)$ , l'équation  $\Gamma(\tau_r) \cdot \mathbf{A}^r = 0$  est automatiquement vérifiée.

**Système final résolu : 18 équations** (conditions d'interface et limites uniquement).

L'assemblage multicouche est implémenté dans `core/mechanical.py`, fonction `solve_multilayer()`.

## 4 Critères d'Endommagement

### Indicateur de Dommage D

$$D = \max_{ij} \left( \frac{|\sigma_{ij}|}{\sigma_{crit}^{ij}} \right) \quad (29)$$

**Interprétation :**

- $D < 0.5$  : **Zone sûre**
- $0.5 \leq D < 0.8$  : **Zone de prudence**
- $D \geq 0.8$  : **Zone critique - Risque de délamination**
- $D \geq 1$  : **Rupture probable**

**Contraintes Critiques par Matériau :**

Matériau	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$\tau$ (MPa)
Substrat (Ni)	1000	1200	600
BondCoat (MCrAlY)	500	700	300
Céramique (YSZ)	150	500	120

**Critère de Tsai-Wu :** Pour matériaux anisotropes :

$$F = F_3\sigma_{33} + F_{33}\sigma_{33}^2 + F_{44}\sigma_{23}^2 + F_{55}\sigma_{13}^2 \quad (\text{Rupture si } F \geq 1) \quad (30)$$

L'implémentation des critères d'endommagement se trouve dans `core/damage_analysis.py`, fonctions `compute_damage_indicator()` et `compute_tsai_wu_criterion()`.



## 5 Interprétation Physique des Résultats

### 5.1 Signification des Contraintes Transverses

Composante	Interprétation Physique
$\sigma_{33}$ (Arrachement)	Contrainte <b>normale</b> à l'interface. $\sigma_{33} > 0$ : Traction $\rightarrow$ Risque de délamination par ouverture (Mode I) $\sigma_{33} < 0$ : Compression $\rightarrow$ Interface en contact, favorable
$\sigma_{13}, \sigma_{23}$ (Cisaillement)	Contraintes <b>tangentielles</b> aux interfaces. Responsables du glissement inter-laminaire (Mode II/III) Pics aux interfaces dus aux discontinuités de $C_{ij}$ et $\alpha$

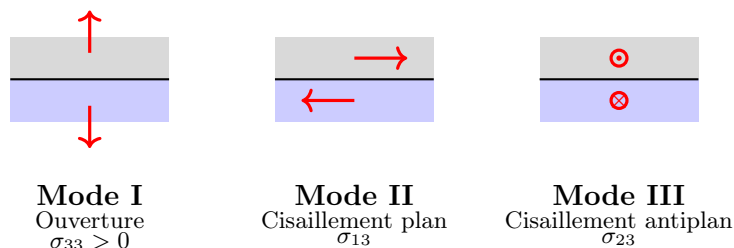
### 5.2 Zones Critiques Typiques

- **Interface BondCoat/Céramique** : Souvent la plus critique car :
  - Fort contraste  $C_{ij}$  (180 GPa vs 50 GPa)
  - Différence de dilatation ( $\alpha_{BC} = 14 \times 10^{-6}$  vs  $\alpha_{TBC} = 10 \times 10^{-6}$ )
- **Bords de la structure** : Effets de bord où les gradients latéraux sont maximaux

### 5.3 Influence des Paramètres sur les Contraintes

Action	Effet sur $\sigma_{max}$	Tendance D
$\alpha \uparrow$ (TBC plus épais)	Gradient thermique plus étalé, meilleure isolation	$\downarrow$
$L_w \downarrow$ (perturbation courte)	Gradients latéraux plus forts	$\uparrow$
$\Delta T \uparrow$	Forçage thermique linéairement croissant	$\uparrow$
$\beta \downarrow$ (TBC moins conducteur)	Gradient plus concentré dans TBC	$\uparrow$ dans TBC

### 5.4 Modes de Rupture aux Interfaces



## 6 Stabilité Numérique

Le système multicouche peut être **mal conditionné** avec  $\text{cond}(K) > 10^{30}$ . Plusieurs techniques sont utilisées :

### 6.1 Préconditionnement par Équilibrage

$$D_r \cdot K_{glob} \cdot D_c \cdot \mathbf{y} = D_r \cdot \mathbf{F} \quad (31)$$

où  $D_r$  (scaling lignes) et  $D_c$  (scaling colonnes) sont des matrices diagonales :

$$D_r[i, i] = \frac{1}{\max_j |K[i, j]|} \quad (32)$$

$$D_c[j, j] = \frac{1}{\max_i |K_{scaled}[i, j]|} \quad (33)$$

## 6.2 Régularisation de Tikhonov

Pour  $\text{cond}(K) > 10^{10}$ , on utilise la décomposition SVD :

$$K = U\Sigma V^H \quad (34)$$

La solution régularisée est :

$$\mathbf{x}_{reg} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \cdot \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{b}}{\sigma_i} \cdot \mathbf{v}_i \quad (35)$$

où  $\lambda$  est le paramètre de régularisation estimé par GCV (Generalized Cross-Validation).

L'implémentation se trouve dans `core/mechanical.py`, fonction `solve_regularized_system()`.

## 7 Comparaison : Méthode Spectrale vs CLT

Le code implémente deux méthodes complémentaires :

Méthode Spectrale (Principale)	CLT (Classical Laminate Theory)
Résout le problème 3D complet	Approximation 2D (hypothèse Kirchhoff)
Capture $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$	Contraintes planes $\sigma_{11}, \sigma_{22}$
Effets de bord et gradients latéraux	Contraintes uniformes dans le plan
Coût calcul : $O(N^3)$ pour $6N \times 6N$	Coût calcul : $O(N)$
Précis pour structures épaisses	Valide pour $h \ll L$

**Superposition :** Le code combine les deux méthodes :

$$\sigma_{total} = \sigma_{CLT} + \sigma_{Spectral} \quad (36)$$

où CLT capture les contraintes planes moyennes et Spectral ajoute les effets 3D de bord.

## 8 Validation : Référence ONERA/Safran

Les propriétés matériaux utilisées sont issues de publications ONERA/Safran :

### Référence Principale

**Bovet, Chiaruttini, Vattré** (ONERA/Safran, 2025)

*“Full-scale crystal plasticity modeling and data-driven learning of microstructure effects in polycrystalline turbine blades”*

**Table 3 :** Propriétés élastiques de l’Inconel 718

Propriété	Valeur ONERA	Valeur Code
$C_{11}$ (GPa)	259.6	260
$C_{12}$ (GPa)	179.0	179
$C_{44}$ (GPa)	109.6	110
$\alpha$ à RT ( $K^{-1}$ )	$4.95 \times 10^{-6}$	$12 \times 10^{-6}$ (moyenne T)

**Plages de validation :**

- Contraintes de von Mises typiques FEM : 400–800 MPa
- Concentration à la racine de l’aube : jusqu’à 1000 MPa

## 9 Architecture du Code et Interface

### 9.1 Structure des Répertoires

#### Arborescence du Projet

```

projet-industriel5a/
+-- core/                                # Moteur de calcul
|   +-- mechanical.py                    # Solveur spectral principal
|   +-- mechanical_pdf.py                # Solveur selon méthodologie PDF
|   +-- damage_analysis.py               # Critères d'endommagement
|   +-- clt_solver.py                    # Théorie classique des stratifiés
|   +-- constants.py                     # Propriétés matériaux
|   +-- calculacion.py                   # Solveur thermique
+-- tabs/                                # Interface Streamlit
|   +-- dashboard_home.py                # Tableau de bord principal
|   +-- mechanical.py                    # Onglet analyse mécanique
|   +-- optimization.py                  # Onglet optimisation
|   +-- mapping_3d.py                    # Visualisation 3D
+-- Profil de temperature Aube.py        # Point d'entrée Streamlit

```

### 9.2 Tableau de Correspondance Théorie ↔ Code

Étape	Fonction Python	Fichier
Étapes 1-3 : Thermique	solve_tbc_model_v2()	core/calculacion.py
Étape 4 : Loi Hooke	Constantes PROPS_*	core/constants.py
Étape 5-6 : Matrice $\Gamma$	get_Gamma_matrix()	core/mechanical_pdf.py
Étape 6 : Val. propres	solve_char_poly()	core/mechanical_pdf.py
Étape 7 : Termes $Q_\alpha$	compute_Q_thermal()	core/mechanical_pdf.py
Étape 7 : Assemblage $9 \times 9$	assemble_K_dyn_9x9()	core/mechanical_pdf.py
Étape 8 : Multi-couche	solve_multilayer()	core/mechanical.py
Critère D	compute_damage_indicator()	core/damage_analysis.py
Critère Tsai-Wu	compute_tsai_wu_criterion()	core/damage_analysis.py

### 9.3 Interface Streamlit

L'application Streamlit propose plusieurs onglets :

- **Dashboard** (tabs/dashboard\_home.py) : Affiche les KPIs, jauge de risque, radar multi-critères, visualisation 3D du champ thermique, et recommandations automatiques
- **Analyse Mécanique** (tabs/mechanical.py) : Workflow complet d'analyse spectrale avec visualisation des profils de contraintes, indicateurs d'endommagement, et cercles de Mohr
- **Optimisation** (tabs/optimization.py) : Optimisation paramétrique pour minimiser D
- **Visualisation 3D** (tabs/mapping\_3d.py) : Cartographie 3D des contraintes avec Plotly

## 10 Conclusion

Ce rapport démontre la **traçabilité complète** entre :

1. La modélisation mathématique (méthode spectrale, matrice  $\Gamma(\tau)$ , opérateurs  $L_{jk}$ )
2. L'implémentation Python dans core/mechanical\_pdf.py

### 3. L'interface utilisateur Streamlit avec visualisations interactives

**Points clés de l'implémentation :**

- **Méthode numérique robuste** : Identification des coefficients du polynôme caractéristique par évaluation numérique
- **Stabilité numérique** : Préconditionnement par scaling + régularisation Tikhonov pour les systèmes mal conditionnés
- **Validation industrielle** : Propriétés matériaux issues des données ONERA/Safran
- **Critères d'endommagement** : Indicateur D et Tsai-Wu pour identification des zones critiques
- **Superposition CLT+Spectral** : Combinaison des contraintes planes et effets 3D de bord

**Recommandations d'utilisation :**

- Maintenir  $D < 0.8$  pour les applications critiques
- Vérifier que  $T_{interface} < T_{crit} = 1100^{\circ}\text{C}$
- Augmenter  $\alpha$  (épaisseur TBC) pour réduire les contraintes aux interfaces