Équilibre Local et Solution

L'équilibre local en **formulation forte** est défini par :

$$\text{div}\ \underline{\underline{\sigma}} = \vec{0} \tag{1}$$

En injectant la loi de comportement, on obtient le système d'équations différentielles suivant pour le milieu (i) :

1. Équations de champ (x_3)

Eq # 1 : ($\alpha = 1, \beta = 2$)

$$-\left(C^{(i)}_{1111}\delta_1^2 + C^{(i)}_{1212}\delta_2^2\right) U_1^{(i)}(x_3) + C^{(i)}_{1313}\frac{d^2U_1^{(i)}(x_3)}{dx_3^2} - \left(C^{(i)}_{1122} + C^{(i)}_{1212}\right)\delta_1\delta_2 U_2^{(i)}(x_3)$$
$$+\left(C^{(i)}_{1133} + C^{(i)}_{1313}\right)\delta_1\frac{dU_3^{(i)}(x_3)}{dx_3} = \left(C^{(i)}_{1111}\alpha^{(i)}_{11} + C^{(i)}_{1122}\alpha^{(i)}_{22}\right)\delta_1 T(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \tag{2}$$

Eq # 2 : ($\alpha = 2, \beta = 1$)

$$-\left(C^{(i)}_{2222}\delta_2^2 + C^{(i)}_{1212}\delta_1^2\right) U_2^{(i)}(x_3) + C^{(i)}_{2323}\frac{d^2U_2^{(i)}(x_3)}{dx_3^2} - \left(C^{(i)}_{2211} + C^{(i)}_{1212}\right)\delta_2\delta_1 U_1^{(i)}(x_3)$$
$$+\left(C^{(i)}_{2233} + C^{(i)}_{2323}\right)\delta_2\frac{dU_3^{(i)}(x_3)}{dx_3} = \left(C^{(i)}_{2222}\alpha^{(i)}_{22} + C^{(i)}_{2211}\alpha^{(i)}_{11}\right)\delta_2 T(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \tag{3}$$

Eq # 3 : (Direction 3)

$$\sum_{\gamma=1}^{2}\left[-(C^{(i)}_{\gamma\gamma 33} + C^{(i)}_{\gamma 3\gamma 3})\delta_\gamma\frac{dU_\gamma^{(i)}(x_3)}{dx_3} - C^{(i)}_{\gamma 3\gamma 3}\delta_\gamma^2 U_3^{(i)}(x_3)\right] + C^{(i)}_{3333}\frac{d^2U_3^{(i)}(x_3)}{dx_3^2}$$
$$= \left(\sum_{\gamma=1}^{2} C^{(i)}_{\gamma\gamma 33}\alpha^{(i)}_{\gamma\gamma} + C^{(i)}_{3333}\alpha^{(i)}_{33}\right)\left.\frac{dT}{dx_3}\right|_{x_3=\bar{h}^{(i)}} \tag{4}$$

2. Forme de la solution générale développée

Pour $\alpha \in \{1,2,3\}$, la solution pour les déplacements dans le milieu (i) est recherchée sous la forme d'une combinaison d'exponentielles. En développant la somme $\sum_{r=1}^{3} A_\alpha^{r(i)} e^{\tau_r^{(i)} x_3}$, on obtient :

$$U_1^{(i)}(x_3) = A_1^{1(i)}e^{\tau_1^{(i)}x_3} + A_1^{2(i)}e^{\tau_2^{(i)}x_3} + A_1^{3(i)}e^{\tau_3^{(i)}x_3} \tag{5}$$
$$U_2^{(i)}(x_3) = A_2^{1(i)}e^{\tau_1^{(i)}x_3} + A_2^{2(i)}e^{\tau_2^{(i)}x_3} + A_2^{3(i)}e^{\tau_3^{(i)}x_3} \tag{6}$$
$$U_3^{(i)}(x_3) = A_3^{1(i)}e^{\tau_1^{(i)}x_3} + A_3^{2(i)}e^{\tau_2^{(i)}x_3} + A_3^{3(i)}e^{\tau_3^{(i)}x_3} \tag{7}$$

Où :

— $A_\alpha^{r(i)}$ sont les amplitudes associées à chaque mode r pour la direction α.
— $\tau_r^{(i)}$ sont les coefficients caractéristiques (valeurs propres) du milieu (i), **préalablement calculés** par l'analyse aux valeurs propres du système homogène.

3. Dérivées premières et secondes

Les dérivées successives par rapport à x_3 pour chaque composante $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ s'écrivent :

Dérivées premières

$$\frac{dU_1^{(i)}(x_3)}{dx_3} = \sum_{r=1}^{3} \tau_r^{(i)} A_1^{r(i)} e^{\tau_r^{(i)} x_3} \tag{8}$$

$$\frac{dU_2^{(i)}(x_3)}{dx_3} = \sum_{r=1}^{3} \tau_r^{(i)} A_2^{r(i)} e^{\tau_r^{(i)} x_3} \tag{9}$$

$$\frac{dU_3^{(i)}(x_3)}{dx_3} = \sum_{r=1}^{3} \tau_r^{(i)} A_3^{r(i)} e^{\tau_r^{(i)} x_3} \tag{10}$$

Dérivées secondes

$$\frac{d^2U_1^{(i)}(x_3)}{dx_3^2} = \sum_{r=1}^{3} (\tau_r^{(i)})^2 A_1^{r(i)} e^{\tau_r^{(i)} x_3} \tag{11}$$

$$\frac{d^2U_2^{(i)}(x_3)}{dx_3^2} = \sum_{r=1}^{3} (\tau_r^{(i)})^2 A_2^{r(i)} e^{\tau_r^{(i)} x_3} \tag{12}$$

$$\frac{d^2U_3^{(i)}(x_3)}{dx_3^2} = \sum_{r=1}^{3} (\tau_r^{(i)})^2 A_3^{r(i)} e^{\tau_r^{(i)} x_3} \tag{13}$$

4. Injection de la solution dans les équations d'équilibre

En injectant les expressions de $U_\alpha^{(i)}(x_3)$ et de leurs dérivées (définies en sections 2 et 3) dans les équations d'équilibre de la section 1, nous obtenons pour chaque mode $r \in \{1, 2, 3\}$ le système suivant :

Équation # 1 injectée ($\alpha = 1$)

$$\sum_{r=1}^{3} \Big[- \left(C_{1111}^{(i)} \delta_1^2 + C_{1212}^{(i)} \delta_2^2 \right) A_1^{r(i)} + C_{1313}^{(i)} (\tau_r^{(i)})^2 A_1^{r(i)} - \left(C_{1122}^{(i)} + C_{1212}^{(i)} \right) \delta_1 \delta_2 A_2^{r(i)}$$
$$+ \left(C_{1133}^{(i)} + C_{1313}^{(i)} \right) \delta_1 \tau_r^{(i)} A_3^{r(i)} \Big] e^{\tau_r^{(i)} x_3} = \left(C_{1111}^{(i)} \alpha_{11}^{(i)} + C_{1122}^{(i)} \alpha_{22}^{(i)} \right) \delta_1 T(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \tag{14}$$

Équation # 2 injectée ($\alpha = 2$)

$$\sum_{r=1}^{3} \Big[- \left(C_{2222}^{(i)} \delta_2^2 + C_{1212}^{(i)} \delta_1^2 \right) A_2^{r(i)} + C_{2323}^{(i)} (\tau_r^{(i)})^2 A_2^{r(i)} - \left(C_{2211}^{(i)} + C_{1212}^{(i)} \right) \delta_2 \delta_1 A_1^{r(i)}$$
$$+ \left(C_{2233}^{(i)} + C_{2323}^{(i)} \right) \delta_2 \tau_r^{(i)} A_3^{r(i)} \Big] e^{\tau_r^{(i)} x_3} = \left(C_{2222}^{(i)} \alpha_{22}^{(i)} + C_{2211}^{(i)} \alpha_{11}^{(i)} \right) \delta_2 T(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \tag{15}$$

Équation # 3 injectée (Direction 3)

$$\sum_{r=1}^{3} \Bigg[\sum_{\gamma=1}^{2} \left(-(C_{\gamma\gamma 33}^{(i)} + C_{\gamma 3\gamma 3}^{(i)}) \delta_\gamma \tau_r^{(i)} A_\gamma^{r(i)} - C_{\gamma 3 \gamma 3}^{(i)} \delta_\gamma^2 A_3^{r(i)} \right)$$
$$+ C_{3333}^{(i)} (\tau_r^{(i)})^2 A_3^{r(i)} \Bigg] e^{\tau_r^{(i)} x_3} = \left(\sum_{\gamma=1}^{2} C_{\gamma\gamma 33}^{(i)} \alpha_{\gamma\gamma}^{(i)} + C_{3333}^{(i)} \alpha_{33}^{(i)} \right) \left. \frac{dT}{dx_3} \right|_{x_3 = \bar{h}^{(i)}} \tag{16}$$

5. Développement des équations particulières (Non-Homogènes)

Pour déterminer les solutions particulières dans le milieu (i), on injecte les expressions développées. Le système n'est plus nul mais égal aux termes sources thermiques $Q_\alpha^{(i)}$:

Équation # 1 (Direction 1)

$$\sum_{r=1}^{3} \left[L_{11}^{r(i)} A_1^{r(i)} + L_{12}^{r(i)} A_2^{r(i)} + L_{13}^{r(i)} A_3^{r(i)} \right] e^{\tau_r^{(i)} x_3} = Q_1^{(i)} (x_3 = \bar{h}^{(i)}) \tag{17}$$

Avec le terme source thermique :

— $Q_1^{(i)} = \left(C_{1111}^{(i)} \alpha_{11}^{(i)} + C_{1122}^{(i)} \alpha_{22}^{(i)} \right) \delta_1 T(x_3 = \bar{h}^{(i)})$

Équation # 2 (Direction 2)

$$\sum_{r=1}^{3} \left[L_{21}^{r(i)} A_1^{r(i)} + L_{22}^{r(i)} A_2^{r(i)} + L_{23}^{r(i)} A_3^{r(i)} \right] e^{\tau_r^{(i)} x_3} = Q_2^{(i)}(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \tag{18}$$

Avec le terme source thermique ($1 \leftrightarrow 2$) :

— $Q_2^{(i)} = \left(C_{2222}^{(i)} \alpha_{22}^{(i)} + C_{2211}^{(i)} \alpha_{11}^{(i)} \right) \delta_2 T(x_3 = \bar{h}^{(i)})$

Équation # 3 (Direction 3)

$$\sum_{r=1}^{3} \left[L_{31}^{r(i)} A_1^{r(i)} + L_{32}^{r(i)} A_2^{r(i)} + L_{33}^{r(i)} A_3^{r(i)} \right] e^{\tau_r^{(i)} x_3} = Q_3^{(i)}(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \tag{19}$$

Avec le terme source thermique :

— $Q_3^{(i)} = \left(\sum_{\gamma=1}^{2} C_{\gamma\gamma 33}^{(i)} \alpha_{\gamma\gamma}^{(i)} + C_{3333}^{(i)} \alpha_{33}^{(i)} \right) \frac{dT}{dx_3} \Big|_{x_3 = \bar{h}^{(i)}}$

Définition explicite des facteurs $L_{jk}^{r(i)}$: En identifiant les termes facteurs des amplitudes A_1, A_2 et A_3 dans les équations d'équilibre injectées, on définit les opérateurs de la matrice dynamique pour chaque mode r.

Pour les termes diagonaux (couplage direct) :

$$L_{11}^{r(i)} = C_{1313}^{(i)} (\tau_r^{(i)})^2 - \left(C_{1111}^{(i)} \delta_1^2 + C_{1212}^{(i)} \delta_2^2 \right) \tag{20}$$

$$L_{22}^{r(i)} = C_{2323}^{(i)} (\tau_r^{(i)})^2 - \left(C_{2222}^{(i)} \delta_2^2 + C_{1212}^{(i)} \delta_1^2 \right) \tag{21}$$

$$L_{33}^{r(i)} = C_{3333}^{(i)} (\tau_r^{(i)})^2 - \left(C_{1313}^{(i)} \delta_1^2 + C_{2323}^{(i)} \delta_2^2 \right) \tag{22}$$

Pour les termes croisés (couplage dans le plan) :

$$L_{12}^{r(i)} = L_{21}^{r(i)} = -\left(C_{1122}^{(i)} + C_{1212}^{(i)} \right) \delta_1 \delta_2 \tag{23}$$

Pour les termes de couplage hors plan (faisant intervenir $\tau_r^{(i)}$) :

$$L_{13}^{r(i)} = \left(C_{1133}^{(i)} + C_{1313}^{(i)} \right) \delta_1 \tau_r^{(i)} \tag{24}$$

$$L_{23}^{r(i)} = \left(C_{2233}^{(i)} + C_{2323}^{(i)} \right) \delta_2 \tau_r^{(i)} \tag{25}$$

$$L_{31}^{r(i)} = -\left(C_{1133}^{(i)} + C_{1313}^{(i)} \right) \delta_1 \tau_r^{(i)} \tag{26}$$

$$L_{32}^{r(i)} = -\left(C_{2233}^{(i)} + C_{2323}^{(i)} \right) \delta_2 \tau_r^{(i)} \tag{27}$$

6. Système factorisé pour le mode r

Pour qu'une solution existe, nous regroupons les termes pour mettre en évidence les amplitudes $A_\alpha^{r(i)}$. En réarrangeant les équations injectées précédemment, nous obtenons le système linéaire suivant pour chaque mode r :

Équation 1 (Direction 1)

$$\begin{aligned} &\left[C_{1313}^{(i)}(\tau_r^{(i)})^2 - \left(C_{1111}^{(i)}\delta_1^2 + C_{1212}^{(i)}\delta_2^2\right)\right] A_1^{r(i)} \\ &\qquad - \left[\left(C_{1122}^{(i)} + C_{1212}^{(i)}\right)\delta_1\delta_2\right] A_2^{r(i)} \\ &\qquad + \left[\left(C_{1133}^{(i)} + C_{1313}^{(i)}\right)\delta_1\tau_r^{(i)}\right] A_3^{r(i)} = \text{Terme Source}_1(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \end{aligned} \tag{28}$$

Équation 2 (Direction 2)

$$\begin{aligned} &- \left[\left(C_{2211}^{(i)} + C_{1212}^{(i)}\right)\delta_1\delta_2\right] A_1^{r(i)} \\ &\qquad + \left[C_{2323}^{(i)}(\tau_r^{(i)})^2 - \left(C_{2222}^{(i)}\delta_2^2 + C_{1212}^{(i)}\delta_1^2\right)\right] A_2^{r(i)} \\ &\qquad + \left[\left(C_{2233}^{(i)} + C_{2323}^{(i)}\right)\delta_2\tau_r^{(i)}\right] A_3^{r(i)} = \text{Terme Source}_2(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \end{aligned} \tag{29}$$

Équation 3 (Direction 3)

$$\begin{aligned} &- \left[\left(C_{1133}^{(i)} + C_{1313}^{(i)}\right)\delta_1\tau_r^{(i)}\right] A_1^{r(i)} \\ &\qquad - \left[\left(C_{2233}^{(i)} + C_{2323}^{(i)}\right)\delta_2\tau_r^{(i)}\right] A_2^{r(i)} \\ &+ \left[C_{3333}^{(i)}(\tau_r^{(i)})^2 - \left(C_{1313}^{(i)}\delta_1^2 + C_{2323}^{(i)}\delta_2^2\right)\right] A_3^{r(i)} = \text{Terme Source}_3(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \end{aligned} \tag{30}$$

Notation Matricielle

Le système homogène (sans les termes sources) peut s'écrire sous la forme compacte $[\Gamma(\tau)]\{A\} = \{0\}$:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{(i)} & \Gamma_{12}^{(i)} & \Gamma_{13}^{(i)} \\ \Gamma_{21}^{(i)} & \Gamma_{22}^{(i)} & \Gamma_{23}^{(i)} \\ \Gamma_{31}^{(i)} & \Gamma_{32}^{(i)} & \Gamma_{33}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{r(i)} \\ A_2^{r(i)} \\ A_3^{r(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Avec les composantes de la matrice dynamique définies par :

$$\Gamma_{11}^{(i)} = C_{1313}^{(i)}(\tau_r^{(i)})^2 - (C_{1111}^{(i)}\delta_1^2 + C_{1212}^{(i)}\delta_2^2) \tag{32}$$

$$\Gamma_{22}^{(i)} = C_{2323}^{(i)}(\tau_r^{(i)})^2 - (C_{2222}^{(i)}\delta_2^2 + C_{1212}^{(i)}\delta_1^2) \tag{33}$$

$$\Gamma_{33}^{(i)} = C_{3333}^{(i)}(\tau_r^{(i)})^2 - (C_{1313}^{(i)}\delta_1^2 + C_{2323}^{(i)}\delta_2^2) \tag{34}$$

$$\Gamma_{12}^{(i)} = \Gamma_{21}^{(i)} = -(C_{1122}^{(i)} + C_{1212}^{(i)})\delta_1\delta_2 \tag{35}$$

$$\Gamma_{13}^{(i)} = (C_{1133}^{(i)} + C_{1313}^{(i)})\delta_1\tau_r^{(i)} \tag{36}$$

$$\Gamma_{23}^{(i)} = (C_{2233}^{(i)} + C_{2323}^{(i)})\delta_2\tau_r^{(i)} \tag{37}$$

$$\Gamma_{31}^{(i)} = -(C_{1133}^{(i)} + C_{1313}^{(i)})\delta_1\tau_r^{(i)} \tag{38}$$

$$\Gamma_{32}^{(i)} = -(C_{2233}^{(i)} + C_{2323}^{(i)})\delta_2\tau_r^{(i)} \tag{39}$$

7. Assemblage complet du système matriciel avec Thermique

L'écriture globale du problème dans la couche (i), reliant les amplitudes inconnues $A_\alpha^{r(i)}$ au chargement thermique connu, prend la forme suivante :

$$\left[\mathbb{K}_{Dyn}^{(i)}\right]_{(9\times9)} \cdot \{\mathcal{A}^{(i)}\}_{(9\times1)} = \{\mathcal{F}_{Th}^{(i)}\}_{(9\times1)} \tag{40}$$

En développant complètement les termes, on obtient l'assemblage ci-dessous.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\Gamma_{11}(\tau_1) & \Gamma_{12}(\tau_1) & \Gamma_{13}(\tau_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Gamma_{21}(\tau_1) & \Gamma_{22}(\tau_1) & \Gamma_{23}(\tau_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Gamma_{31}(\tau_1) & \Gamma_{32}(\tau_1) & \Gamma_{33}(\tau_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \Gamma_{11}(\tau_2) & \Gamma_{12}(\tau_2) & \Gamma_{13}(\tau_2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \Gamma_{21}(\tau_2) & \Gamma_{22}(\tau_2) & \Gamma_{23}(\tau_2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \Gamma_{31}(\tau_2) & \Gamma_{32}(\tau_2) & \Gamma_{33}(\tau_2) & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{11}(\tau_3) & \Gamma_{12}(\tau_3) & \Gamma_{13}(\tau_3) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{21}(\tau_3) & \Gamma_{22}(\tau_3) & \Gamma_{23}(\tau_3) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{31}(\tau_3) & \Gamma_{32}(\tau_3) & \Gamma_{33}(\tau_3)
\end{array}\right]^{(i)}
\left(\begin{array}{c}
A_1^1 \\ A_2^1 \\ A_3^1 \\ \hline A_1^2 \\ A_2^2 \\ A_3^2 \\ \hline A_1^3 \\ A_2^3 \\ A_3^3
\end{array}\right)^{(i)}
=
\left(\begin{array}{c}
\mathcal{Q}_1(\bar{h}^{(i)}) \\ \mathcal{Q}_2(\bar{h}^{(i)}) \\ \mathcal{Q}_3(\bar{h}^{(i)}) \\ \hline \mathcal{Q}_1(\bar{h}^{(i)}) \\ \mathcal{Q}_2(\bar{h}^{(i)}) \\ \mathcal{Q}_3(\bar{h}^{(i)}) \\ \hline \mathcal{Q}_1(\bar{h}^{(i)}) \\ \mathcal{Q}_2(\bar{h}^{(i)}) \\ \mathcal{Q}_3(\bar{h}^{(i)})
\end{array}\right)^{(i)} \tag{41}$$

Les composantes du vecteur de sollicitation thermique $\{\mathcal{F}_{Th}^{(i)}\}$ sont explicites et identiques pour chaque bloc (si le chargement thermique est uniforme sur l'épaisseur du pli ou projeté identiquement) :

$$\mathcal{Q}_1^{(i)}(x_3 = \bar{h}^{(i)}) = \left(C_{1111}^{(i)}\alpha_{11}^{(i)} + C_{1122}^{(i)}\alpha_{22}^{(i)}\right)\delta_1\, T(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \tag{42}$$

$$\mathcal{Q}_2^{(i)}(x_3 = \bar{h}^{(i)}) = \left(C_{2222}^{(i)}\alpha_{22}^{(i)} + C_{2211}^{(i)}\alpha_{11}^{(i)}\right)\delta_2\, T(x_3 = \bar{h}^{(i)}) \tag{43}$$

$$\mathcal{Q}_3^{(i)}(x_3 = \bar{h}^{(i)}) = \left(\sum_{\gamma=1}^{2} C_{\gamma\gamma33}^{(i)}\alpha_{\gamma\gamma}^{(i)} + C_{3333}^{(i)}\alpha_{33}^{(i)}\right)\left.\frac{dT}{dx_3}\right|_{x_3=\bar{h}^{(i)}} \tag{44}$$