

Résolution Matricielle du Système Multicouche

Détermination des Amplitudes par Méthode Spectrale

Documentation Technique - Projet Industriel 5A

10 janvier 2026

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| 1 Introduction et Objectif | 2 |
| 1.1 Structure des Inconnues | 2 |
| 2 Méthodologie d'Écriture des Équations | 2 |
| 2.1 Étape 1 : Substitution de l'Ansatz | 2 |
| 2.2 Étape 2 : Dérivation et Équation d'Équilibre | 3 |
| 2.3 Étape 3 : Isolation des Termes | 3 |
| 3 Calculs Détaillés des Amplitudes | 4 |
| 3.1 Étape 1 : Substitution - Écriture de l'Ansatz | 4 |
| 3.2 Étape 2 : Dérivation - Calcul des Déformations | 4 |
| 3.2.1 Calcul Explicite des Déformations | 4 |
| 3.3 Étape 3 : Calcul des Contraintes via Loi de Hooke | 5 |
| 3.3.1 Contrainte Normale σ_{33} (Arrachement) | 5 |
| 3.3.2 Contraintes de Cisaillement σ_{13} et σ_{23} | 6 |
| 3.4 Étape 4 : Équation d'Équilibre et Identification | 7 |
| 3.5 Résumé : Matrice R Complète | 7 |
| 3.6 Écriture Finale : Amplitudes dans le Système Global | 8 |
| 4 Construction du Système Global | 8 |
| 4.1 Vecteur d'État | 8 |
| 4.2 Matrice Modale $\Phi(z)$ | 8 |
| 4.3 Écriture Explicite des Amplitudes | 9 |
| 5 Assemblage de la Matrice Globale | 9 |
| 5.1 Structure par Blocs | 9 |
| 5.2 Détail des Équations | 9 |
| 6 Second Membre Thermique | 10 |
| 7 Résolution du Système | 10 |
| 7.1 Préconditionnement | 10 |
| 7.2 Extraction des Amplitudes | 10 |
| 8 Reconstruction de la Solution | 11 |
| 9 Correspondance Code/Théorie | 11 |
| 10 Validation de la Structure Matricielle | 11 |

1 Introduction et Objectif

Objectif Principal

Déterminer le vecteur des amplitudes inconnues \mathbf{A} pour reconstruire la solution complète du champ de déplacement :

$$\mathbf{U}(x_3) = \mathbf{A} \cdot e^{\tau x_3}$$

Le problème se ramène à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$[\mathbf{M}_{\text{global}}] \cdot [\mathbf{A}] = [\mathbf{F}_{\text{thermique}}]$$

1.1 Structure des Inconnues

Vecteur d'Amplitudes Global

Pour un système à N couches, avec 6 modes propres par couche :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{(1)} \\ \mathbf{C}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{(N)} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{C}^{(k)} = \begin{pmatrix} C_1^{(k)} \\ C_2^{(k)} \\ C_3^{(k)} \\ C_4^{(k)} \\ C_5^{(k)} \\ C_6^{(k)} \end{pmatrix}$$

Nombre total d'inconnues : $6 \times N$ amplitudes.

Pour $N = 3$ couches : **18 inconnues.**

Note sur les 27 vs 18 inconnues

La formulation initiale mentionnait 27 inconnues (9×3). Le code implémente 18 inconnues (6×3) car :

- L'équation caractéristique $\det(\mathbf{M}(\tau)) = 0$ est un polynôme de degré 6 en τ
- Cela donne 6 racines τ_r (modes propres), pas 9
- Les 6 racines forment 3 paires conjuguées : $\pm\tau_1, \pm\tau_2, \pm\tau_3$

• $3 \times 3 \times N$ amplitudes inconnues $\{A_\alpha^{i,r}, A_\beta^{i,r}\}$. \rightarrow 27 inconnues

2 Méthodologie d'écriture des Equations

2.1 Étape 1 : Substitution de l'Ansatz

Ansatz de Déplacement (Étape 5 du PDF)

Le champ de déplacement est supposé de la forme :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{V}_1(x_3) \cos(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) \quad (1)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{V}_2(x_3) \sin(\delta_1 x_1) \cos(\delta_2 x_2) \quad (2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{V}_3(x_3) \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) \quad (3)$$

Avec la dépendance en x_3 :

$$\mathcal{V}_i(x_3) = \sum_{r=1}^{\overset{3}{\textcircled{6}}} C_r \cdot \underbrace{\mathcal{V}_i^{(r)}}_{A^{\lambda} \text{ plus}} \cdot e^{\tau_r x_3}$$

2.2 Étape 2 : Dérivation et Équation d'Équilibre

L'équation d'équilibre mécanique $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ conduit à :

Matrice $\mathbf{M}(\tau)$

$$\mathbf{M}(\tau) = \begin{pmatrix} C_{55}\tau^2 - K_{11} & -K_{12} & K_{13}^*\tau \\ -K_{12} & C_{44}\tau^2 - K_{22} & K_{23}^*\tau \\ K_{13}^*\tau & K_{23}^*\tau & C_{33}\tau^2 - K_{33} \end{pmatrix}$$

Avec les coefficients :

$$K_{11} = C_{11}\delta_1^2 + C_{66}\delta_2^2 \quad (4)$$

$$K_{22} = C_{66}\delta_1^2 + C_{22}\delta_2^2 \quad (5)$$

$$K_{33} = C_{55}\delta_1^2 + C_{44}\delta_2^2 \quad (6)$$

$$K_{12} = (C_{12} + C_{66})\delta_1\delta_2 \quad (7)$$

$$K_{13}^* = (C_{13} + C_{55})\delta_1 \quad (8)$$

$$K_{23}^* = (C_{23} + C_{44})\delta_2 \quad (9)$$

2.3 Étape 3 : Isolation des Termes

Séparation Mécanique / Thermique

L'équation complète est :

$$\underbrace{\overset{A}{\mathbf{M}(\tau)} \cdot \underset{\text{Termes mécaniques (matrice)}}{\mathbf{X}}}_{\text{Termes mécaniques (matrice)}} = \underbrace{\mathbf{F}_{\text{th}}}_{\text{Termes thermiques (vecteur)}}$$

Le vecteur de forçage thermique :

$$\mathbf{F}_{\text{th}} = \overset{?}{\hat{T}} \begin{pmatrix} \beta_1 \delta_1 \\ \beta_2 \delta_2 \\ \beta_3 \lambda_{\text{th}} \end{pmatrix} \quad \text{où est ce que l'on a écrit l'expression de la température ?}$$

Où $\beta_i = \sum_j C_{ij} \alpha_j$ sont les coefficients de contrainte thermique.

3 Calculs Détaillés des Amplitudes

Cette section présente les calculs **explicites** permettant d'identifier les amplitudes A_r devant chaque mode propre.

3.1 Étape 1 : Substitution - Écriture de l'Ansatz

Ansatz Complet avec Amplitudes Explicites

On pose le champ de déplacement comme superposition de 6 modes propres :

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \left[\sum_{r=1}^6 A_r \cdot \cancel{V_1^{(r)}} \cdot e^{\tau_r x_3} \right] \cos(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) \quad (10)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = \left[\sum_{r=1}^6 A_r \cdot \cancel{V_2^{(r)}} \cdot e^{\tau_r x_3} \right] \sin(\delta_1 x_1) \cos(\delta_2 x_2) \quad (11)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \left[\sum_{r=1}^6 A_r \cdot \cancel{V_3^{(r)}} \cdot e^{\tau_r x_3} \right] \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) \quad (12)$$

Notation condensée :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \sum_{r=1}^6 A_r \cdot \cancel{V_i^{(r)}} \cdot e^{\tau_r x_3} \cdot \phi_i(x_1, x_2)$$

où ϕ_i sont les fonctions harmoniques latérales. *bigare le nom*

3.2 Étape 2 : Dérivation - Calcul des Déformations

Règle de Dérivation Fondamentale

La dérivation par rapport à x_3 fait apparaître τ :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} (A_r \cdot e^{\tau_r x_3}) = \tau_r \cdot A_r \cdot e^{\tau_r x_3}$$

Donc : $\boxed{\partial_{x_3} \rightarrow \tau_r}$ dans l'espace modal.

3.2.1 Calcul Explicite des Déformations

Les composantes du tenseur de déformation $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$:

Déformations en Fonction des Amplitudes

Déformations normales :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sum_{r=1}^6 A_r \cdot \cancel{V_1^{(r)}} \cdot e^{\tau_r x_3} \cdot \underbrace{(-\delta_1)}_{\partial_{x_1} \cos} \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2) \quad (13)$$

$$= -\delta_1 \sum_{r=1}^6 A_r \cancel{V_1^{(r)}} e^{\tau_r x_3} \cdot \sin \sin \quad (14)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \left[-\delta_2 \sum_{r=1}^6 A_r \cancel{V_2^{(r)}} e^{\tau_r x_3} \right] \cdot \sin \sin \quad (15)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \left[\tau_r \sum_{r=1}^6 A_r \cancel{V_3^{(r)}} e^{\tau_r x_3} \right] \cdot \sin \sin \quad (16)$$

Déformations de cisaillement :

$$2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad (17)$$

$$= \sum_r A_r \left(\tau_r \cancel{V_1^{(r)}} + \delta_1 \cancel{V_3^{(r)}} \right) e^{\tau_r x_3} \cdot \cos \sin \quad \checkmark \quad (18)$$

$$2\varepsilon_{23} = \sum_r A_r \left(\tau_r \cancel{V_2^{(r)}} + \delta_2 \cancel{V_3^{(r)}} \right) e^{\tau_r x_3} \cdot \sin \cos \quad \checkmark \quad (19)$$

$$2\varepsilon_{12} = \sum_r A_r \left(-\delta_2 \cancel{V_1^{(r)}} - \delta_1 \cancel{V_2^{(r)}} \right) e^{\tau_r x_3} \cdot \cos \cos \quad \checkmark \quad (20)$$

3.3 Étape 3 : Calcul des Contraintes via Loi de Hooke

Loi de Comportement Orthotrope

Pour un matériau orthotrope :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \Theta$$

où Θ est le champ de température et $\beta_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl}$.

3.3.1 Contrainte Normale σ_{33} (Arrachement)

Calcul Détaillé de σ_{33}

$$\sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} - \beta_3\Theta \quad (21)$$

$$= C_{13} \left(-\delta_1 \sum_r A_r \cancel{V_1^{(r)}} e^{\tau_r z} \right) \downarrow + C_{23} \left(-\delta_2 \sum_r A_r \cancel{V_2^{(r)}} e^{\tau_r z} \right) \downarrow \quad (22)$$

$$+ C_{33} \left(\sum_r \tau_r A_r V_3^{(r)} e^{\tau_r z} \right) \downarrow - \beta_3\Theta \quad (23)$$

Factorisation par amplitude :

$$\sigma_{33} = \sum_{r=1}^3 A_r \cdot \underbrace{\left(-C_{13}\delta_1 \cancel{V_1^{(r)}} - C_{23}\delta_2 \cancel{V_2^{(r)}} + C_{33}\tau_r \cancel{V_3^{(r)}} \right)}_{W_3^{(r)}} \cdot e^{\tau_r z} - \beta_3\Theta$$

On identifie les coefficients de la matrice $\mathbf{R}(\tau)$ ligne 3 :

$$R_{31} = -C_{13}\delta_1, \quad R_{32} = -C_{23}\delta_2, \quad R_{33} = C_{33}\tau$$

qu'est ce que la matrice $\mathbf{R}(\tau)$

3.3.2 Contraintes de Cisaillement σ_{13} et σ_{23}

Calcul Détaillé de σ_{13}

$$\sigma_{13} = C_{55} \cdot 2\varepsilon_{13} = C_{55} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad (24)$$

$$= C_{55} \sum_r A_r \left(\tau_r \cancel{V_1^{(r)}} + \delta_1 \cancel{V_3^{(r)}} \right) e^{\tau_r z} \cdot \cos \sin \quad (25)$$

Factorisation :

$$\sigma_{13} = \sum_{r=1}^6 A_r \cdot \underbrace{\left(C_{55}\tau_r \cancel{V_1^{(r)}} + C_{55}\delta_1 \cancel{V_3^{(r)}} \right)}_{W_1^{(r)}} \cdot e^{\tau_r z}$$

Coefficients de $\mathbf{R}(\tau)$ ligne 1 :

$$R_{11} = C_{55}\tau, \quad R_{12} = 0, \quad R_{13} = C_{55}\delta_1$$

Calcul Détaillé de σ_{23}

$$\sigma_{23} = C_{44} \cdot 2\varepsilon_{23} = C_{44} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (26)$$

$$= C_{44} \sum_r A_r \left(\tau_r \cancel{V_2^{(r)}} + \delta_2 \cancel{V_3^{(r)}} \right) e^{\tau_r z} \quad (27)$$

Factorisation :

$$\sigma_{23} = \sum_{r=1}^6 A_r \cdot \underbrace{\left(C_{44}\tau_r V_2^{(r)} + C_{44}\delta_2 V_3^{(r)} \right)}_{W_2^{(r)}} \cdot e^{\tau_r z}$$

Coefficients de $\mathbf{R}(\tau)$ ligne 2 :

$$R_{21} = 0, \quad R_{22} = C_{44}\tau, \quad R_{23} = C_{44}\delta_2$$

3.4 Étape 4 : Équation d'Équilibre et Identification

Équation d'Équilibre $\text{div}(\sigma) = 0$

Les trois composantes :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (30)$$

Identification des Facteurs devant A_r

Après substitution et simplification par les harmoniques, chaque équation donne :

$$\sum_{r=1}^6 A_r \cdot \underbrace{M_{ij}(\tau_r) \cdot V_j^{(r)}}_{=0 \text{ si } \tau_r \text{ est racine}} \cdot e^{\tau_r z} = F_{\text{th},i}$$

Condition pour que la solution existe :

$$\boxed{\det(\mathbf{M}(\tau_r)) = 0} \quad \Rightarrow \quad \tau_r \text{ est mode propre}$$

Le vecteur propre $\mathbf{V}^{(r)}$ appartient au noyau de $\mathbf{M}(\tau_r)$.

3.5 Résumé : Matrice R Complète

Matrice $\mathbf{R}(\tau)$ - Passage Déplacement \rightarrow Contrainte

$$\mathbf{R}(\tau) = \begin{pmatrix} C_{55}\tau & 0 & C_{55}\delta_1 \\ 0 & C_{44}\tau & C_{44}\delta_2 \\ -C_{13}\delta_1 & -C_{23}\delta_2 & C_{33}\tau \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre de contrainte est :

$$\mathbf{W}^{(r)} = \mathbf{R}(\tau_r) \cdot \mathbf{V}^{(r)} = \begin{pmatrix} \sigma_{13}^{(r)} / A_r \\ \sigma_{23}^{(r)} / A_r \\ \sigma_{33}^{(r)} / A_r \end{pmatrix}$$

3.6 Écriture Finale : Amplitudes dans le Système Global

Système Final à Résoudre

Pour une couche k , le vecteur d'état à la position z :

$$\begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ u_3(z) \\ \sigma_{13}(z) \\ \sigma_{23}(z) \\ \sigma_{33}(z) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} V_1^{(1)} e^{\tau_1 z} & \dots & V_1^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ V_2^{(1)} e^{\tau_1 z} & \dots & V_2^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ V_3^{(1)} e^{\tau_1 z} & \dots & V_3^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ W_1^{(1)} e^{\tau_1 z} & \dots & W_1^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ W_2^{(1)} e^{\tau_1 z} & \dots & W_2^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ W_3^{(1)} e^{\tau_1 z} & \dots & W_3^{(6)} e^{\tau_6 z} \end{pmatrix}}_{\Phi(z)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{pmatrix}}_{\text{Amplitudes}} + \mathbf{SV}_{\text{part}}$$

Les 6 amplitudes A_r sont les inconnues à déterminer par les conditions aux limites.

4 Construction du Système Global

4.1 Vecteur d'État

Vecteur d'État à la Position z

Pour chaque couche k , le vecteur d'état contient déplacements et contraintes :

$$\mathbf{SV}^{(k)}(z) = \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ u_3(z) \\ \sigma_{13}(z) \\ \sigma_{23}(z) \\ \sigma_{33}(z) \end{pmatrix} = \Phi^{(k)}(z) \cdot \mathbf{C}^{(k)} + \mathbf{SV}_{\text{part}}^{(k)}(z)$$

4.2 Matrice Modale $\Phi(z)$

Construction de $\Phi(z)$

La matrice $\Phi(z)$ est de dimension 6×6 :

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} V_1^{(1)} e^{\tau_1 z} & V_1^{(2)} e^{\tau_2 z} & \dots & V_1^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ V_2^{(1)} e^{\tau_1 z} & V_2^{(2)} e^{\tau_2 z} & \dots & V_2^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ V_3^{(1)} e^{\tau_1 z} & V_3^{(2)} e^{\tau_2 z} & \dots & V_3^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ W_1^{(1)} e^{\tau_1 z} & W_1^{(2)} e^{\tau_2 z} & \dots & W_1^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ W_2^{(1)} e^{\tau_1 z} & W_2^{(2)} e^{\tau_2 z} & \dots & W_2^{(6)} e^{\tau_6 z} \\ W_3^{(1)} e^{\tau_1 z} & W_3^{(2)} e^{\tau_2 z} & \dots & W_3^{(6)} e^{\tau_6 z} \end{pmatrix}$$

Où $\mathbf{W}^{(r)} = \mathbf{R}(\tau_r) \cdot \mathbf{V}^{(r)}$ est le vecteur propre de contrainte.

4.3 Écriture Explicite des Amplitudes

Vecteur d'Amplitudes pour 3 Couches

Le vecteur global d'amplitudes est :

$$\mathbf{A}_{\text{global}} = \left(C_1^{(1)} \quad C_2^{(1)} \quad C_3^{(1)} \quad C_4^{(1)} \quad C_5^{(1)} \quad C_6^{(1)} \quad C_1^{(2)} \quad C_2^{(2)} \quad \dots \quad C_6^{(3)} \right)^T$$

Signification physique des amplitudes :

- $C_r^{(k)}$: Amplitude du mode r dans la couche k
- Mode $r = 1, 2$: associé à $\pm\tau_1$ (décroissance/croissance rapide)
- Mode $r = 3, 4$: associé à $\pm\tau_2$ (décroissance/croissance intermédiaire)
- Mode $r = 5, 6$: associé à $\pm\tau_3$ (décroissance/croissance lente)

5 Assemblage de la Matrice Globale

5.1 Structure par Blocs

Pour un système à 3 couches, la matrice globale \mathbf{K}_{glob} est de dimension 18×18 :

Structure de \mathbf{K}_{glob}

$$\mathbf{K}_{\text{glob}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_\sigma \Phi^{(1)}(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Phi^{(1)}(h_1) & -\Phi^{(2)}(0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi^{(2)}(h_2) & -\Phi^{(3)}(0) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_\sigma \Phi^{(3)}(h_3) \end{pmatrix}$$

Avec la matrice de sélection des contraintes :

$$\mathbf{B}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2 Détail des Équations

18 Équations du Système

Bloc 1 : Conditions aux limites en $z = 0$ (3 équations)

$$\sigma_{13}^{(1)}(0) = 0, \quad \sigma_{23}^{(1)}(0) = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)}(0) = 0$$

\Rightarrow Surface inférieure libre de contraintes.

Bloc 2 : Continuité à l'interface 1-2 (6 équations)

$$\mathbf{SV}^{(1)}(h_1) = \mathbf{SV}^{(2)}(0)$$

\Rightarrow Continuité des déplacements ET des contraintes.

Bloc 3 : Continuité à l'interface 2-3 (6 équations)

$$\mathbf{SV}^{(2)}(h_2) = \mathbf{SV}^{(3)}(0)$$

Bloc 4 : Conditions aux limites en $z = H$ (3 équations)

$$\sigma_{13}^{(3)}(h_3) = 0, \quad \sigma_{23}^{(3)}(h_3) = 0, \quad \sigma_{33}^{(3)}(h_3) = 0$$

⇒ Surface supérieure libre de contraintes.

6 Second Membre Thermique

Vecteur \mathbf{F}_{glob}

Le second membre contient les contributions thermiques :

$$\mathbf{F}_{\text{glob}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{T}_{\text{part}}^{(1)}(0)/C_{\text{ref}} \\ \mathbf{U}_{\text{part}}^{(2)}(0) - \mathbf{U}_{\text{part}}^{(1)}(h_1) \\ (\mathbf{T}_{\text{part}}^{(2)}(0) - \mathbf{T}_{\text{part}}^{(1)}(h_1))/C_{\text{ref}} \\ \mathbf{U}_{\text{part}}^{(3)}(0) - \mathbf{U}_{\text{part}}^{(2)}(h_2) \\ (\mathbf{T}_{\text{part}}^{(3)}(0) - \mathbf{T}_{\text{part}}^{(2)}(h_2))/C_{\text{ref}} \\ -\mathbf{T}_{\text{part}}^{(3)}(h_3)/C_{\text{ref}} \end{pmatrix}$$

Où :

- $\mathbf{U}_{\text{part}}^{(k)}$: Solution particulière de déplacement (thermique)
- $\mathbf{T}_{\text{part}}^{(k)}$: Solution particulière de contrainte (thermique)
- C_{ref} : Rigidité de référence pour normalisation (200 GPa)

7 Résolution du Système

7.1 Préconditionnement

Le système peut être mal conditionné ($\text{cond}(\mathbf{K}) > 10^{10}$). Le code utilise :

1. Équilibrage par scaling :

$$\mathbf{D}_r \cdot \mathbf{K}_{\text{glob}} \cdot \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{y} = \mathbf{D}_r \cdot \mathbf{F}_{\text{glob}}$$

2. Régularisation de Tikhonov :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \cdot \frac{\mathbf{u}_i^H \mathbf{F}}{\sigma_i} \cdot \mathbf{v}_i$$

7.2 Extraction des Amplitudes

Après résolution :

$$\mathbf{A}_{\text{global}} = \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{y}$$

Et pour chaque couche :

$$\mathbf{C}^{(k)} = \mathbf{A}_{\text{global}}[6(k-1) : 6k]$$

8 Reconstruction de la Solution

Solution Complète

Le champ de contraintes reconstruit :

$$\sigma(z) = \underbrace{\Phi_\sigma(z) \cdot \mathbf{C}^{(k)}}_{\text{Solution homogène}} + \underbrace{\sum_m \mathbf{T}_{\text{part},m}(z)}_{\text{Solutions particulières}}$$

Avec dé-normalisation :

$$\sigma_{ij}^{\text{réel}} = \sigma_{ij}^{\text{normalisé}} \times C_{\text{ref}} \times 10^9 \quad [\text{Pa}]$$

9 Correspondance Code/Théorie

| Concept Théorique | Fonction Python | Lignes |
|--|--|-----------|
| $\det(\mathbf{M}(\tau)) = 0$ | <code>solve_characteristic_equation()</code> | 78-186 |
| Vecteurs propres \mathbf{V}_r | <code>compute_all_eigenvectors()</code> | 243-257 |
| Matrice $\mathbf{R}(\tau)$ | <code>get_R_matrix()</code> | 264-334 |
| Vecteurs \mathbf{W}_r | <code>compute_all_stress_eigenvectors()</code> | 348-369 |
| Matrice $\Phi(z)$ | <code>build_Phi_matrix_normalized()</code> | 508-527 |
| Forçage thermique | <code>compute_thermal_forcing()</code> | 406-448 |
| Système $\mathbf{K} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{F}$ | <code>solve_multilayer()</code> | 992-1141 |
| Régularisation Tikhonov | <code>solve_regularized_system()</code> | 846-989 |
| Profils de contraintes | <code>compute_multilayer_stress_profile()</code> | 1144-1293 |

TABLE 1 – Correspondance entre théorie et implémentation dans `core/mechanical.py`

10 Validation de la Structure Matricielle

Critères de Validation

1. **Dimension** : $\mathbf{K}_{\text{glob}} \in \mathbb{C}^{6N \times 6N}$
2. **Symétrie** : Structure bande tridiagonale par blocs
3. **Conditions aux limites** :
 - 3 équations de surface libre en $z = 0$
 - 3 équations de surface libre en $z = H$
4. **Continuité** : 6 équations par interface interne
5. **Total** : $3 + 6(N - 1) + 3 = 6N$ équations ✓

Vérification Numérique

Le code vérifie automatiquement :

- Conditionnement avant/après équilibrage
- Résidu relatif $\|\mathbf{KC} - \mathbf{F}\|/\|\mathbf{F}\|$
- Paires conjuguées des racines τ