Pourquoi 18 Équations et Non 27 ?

La Réduction du Système par la Méthode Modale

Explication Détaillée de l'Optimisation Mathématique

Documentation Technique - Projet TBC Multicouche

18 janvier 2026

Résumé

Ce document explique en détail pourquoi l'implémentation numérique du solveur mécanique multicouche utilise **18 équations** pour un système à 3 couches, alors que le document théorique *Résolution_ équations.pdf* (Étape 8) mentionne **27 équations**. Cette réduction n'est pas une simplification physique, mais une **optimisation mathématique** inhérente à la méthode des modes propres.

Table des matières

1 Le Comptage Théorique : 27 Équations

1.1 Rappel du Problème

Pour un système multicouche de N couches, nous devons résoudre :

1. L'**équilibre mécanique** dans chaque couche
2. Les **conditions de continuité** aux interfaces
3. Les **conditions aux limites** sur les surfaces libres

1.2 Décompte selon le PDF (Étape 8)

Le document *Résolution_ équations.pdf* compte les équations comme suit pour $N = 3$ couches :

Type d'équation	Formule	Nombre
Équilibre volumique	$N \times 3$ directions	$3 \times 3 = 9$
Continuité aux interfaces	$(N - 1) \times 6$ conditions	$2 \times 6 = 12$
Conditions aux limites	2×3 (haut + bas)	$2 \times 3 = 6$
Total		**27**

1.3 Détail des 27 Équations

Les 9 Équations d'Équilibre Volumique

Pour chaque couche $k \in \{1, 2, 3\}$, l'équilibre statique $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ donne 3 équations :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{(direction } x_1\text{)} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{(direction } x_2\text{)} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{(direction } x_3\text{)} \tag{3}$$

Sous-total : $3 \times 3 = 9$ équations

Les 12 Équations de Continuité aux Interfaces

À chaque interface entre couches k et $k + 1$, on impose :

- **3 continuités de déplacement :** $u_1^{(k)} = u_1^{(k+1)}$, $u_2^{(k)} = u_2^{(k+1)}$, $u_3^{(k)} = u_3^{(k+1)}$
- **3 continuités de traction :** $\sigma_{13}^{(k)} = \sigma_{13}^{(k+1)}$, $\sigma_{23}^{(k)} = \sigma_{23}^{(k+1)}$, $\sigma_{33}^{(k)} = \sigma_{33}^{(k+1)}$

Sous-total : $2 \times 6 = 12$ équations (pour 3 couches $\Rightarrow$ 2 interfaces)

Les 6 Conditions aux Limites (Surfaces Libres)

Sur les surfaces $z = 0$ (bas) et $z = H$ (haut) :

- **En $z = 0$:** $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{23} = 0$, $\sigma_{33} = 0$
- **En $z = H$:** $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{23} = 0$, $\sigma_{33} = 0$

Sous-total : $2 \times 3 = 6$ équations

2 La Clé : La Méthode des Modes Propres

2.1 L'Ansatz Modal

La méthode spectrale cherche des solutions sous la forme :

$$\boxed{u_i(x_1, x_2, x_3) = V_i \cdot e^{\tau x_3} \cdot \sin(\delta_1 x_1) \sin(\delta_2 x_2)} \tag{4}$$

Où :
— V_i est l'amplitude du déplacement selon i
— τ est la **valeur propre** à déterminer
— δ_1, δ_2 sont les nombres d'onde latéraux ($= \pi/L_w$)

2.2 Injection dans l'Équation d'Équilibre

En injectant cet ansatz dans l'équation d'équilibre $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$, on obtient un système linéaire homogène :

Système Matriciel Homogène

$$\boxed{M(\tau) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0}} \tag{5}$$

où $M(\tau)$ est la matrice dynamique 3×3 :

$$M(\tau) = \begin{pmatrix} C_{55}\tau^2 - K_{11} & -K_{12} & K_{13}\tau \\ -K_{12} & C_{44}\tau^2 - K_{22} & K_{23}\tau \\ -K_{13}\tau & -K_{23}\tau & C_{33}\tau^2 - K_{33} \end{pmatrix} \tag{6}$$

2.3 La Condition de Non-Trivialité

Pour que le système ait une solution non-nulle ($\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$), il faut :

$$\boxed{\det(M(\tau)) = 0} \tag{7}$$

Cette équation caractéristique donne **6 valeurs propres** τ_r par couche.

3 Pourquoi les 9 Équations d'Équilibre Disparaissent

Argument Central

Les 9 équations d'équilibre volumique sont automatiquement satisfaites par la construction modale !
Voici pourquoi : par définition d'un mode propre, le vecteur $\mathbf{V}_r$ associé à τ_r appartient au noyau de $M(\tau_r)$:

$$M(\tau_r) \cdot \mathbf{V}_r = \mathbf{0} \quad \text{par définition de } \tau_r \tag{8}$$

Cela signifie que l'équation d'équilibre est **identiquement nulle** pour chaque mode propre.

3.1 Démonstration Pas à Pas

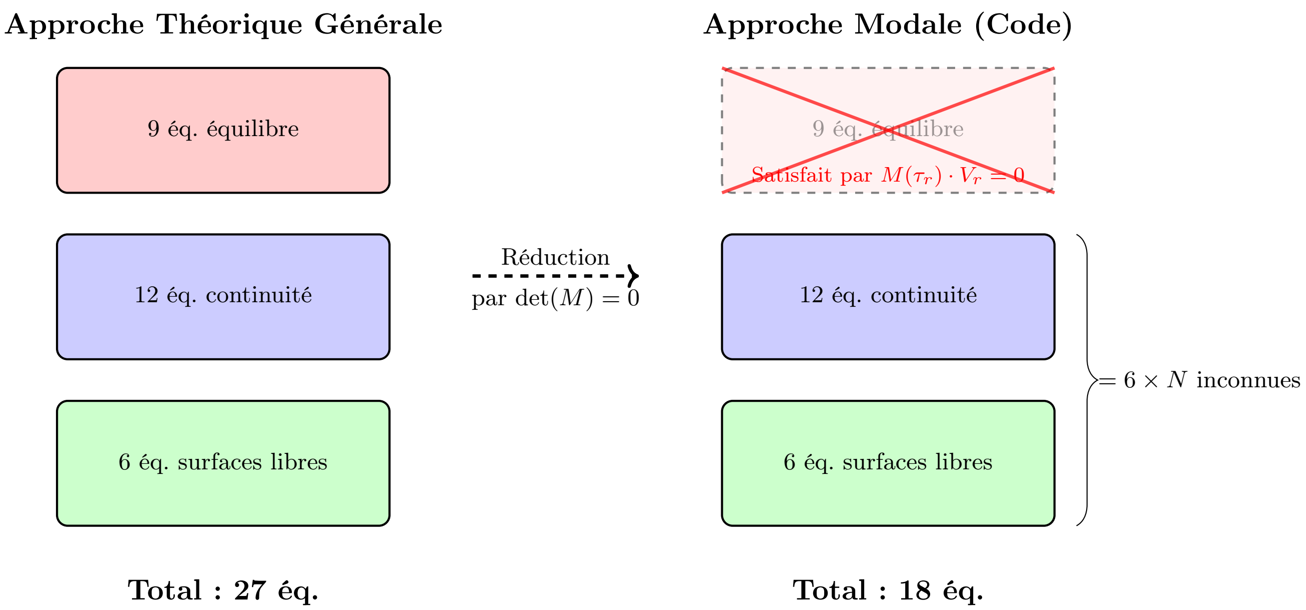
1. **On cherche τ tel que** $\det(M(\tau)) = 0$

2. **Pour chaque racine** τ_r, la matrice $M(\tau_r)$ est singulière (son déterminant est nul)
3. **Le vecteur propre** $\mathbf{V}_r$ est dans le noyau de $M(\tau_r)$, donc :

$$M(\tau_r) \cdot \mathbf{V}_r = \mathbf{0} \tag{9}$$

4. **Or** $M(\tau) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0}$ est exactement l'équation d'équilibre sous forme matricielle !
5. **Conclusion :** L'équilibre est satisfait **a priori** pour tout mode propre τ_r.

3.2 Illustration Graphique



4 Le Système Final : 18 Équations pour 18 Inconnues

4.1 Les 18 Inconnues

Pour chaque couche k, nous avons **6 constantes d'intégration** $C_1^{(k)}, ..., C_6^{(k)}$ correspondant aux 6 modes propres $\tau_1, ..., \tau_6$.

$$\mathbf{C}_{global} = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} \\ \vdots \\ C_6^{(1)} \\ C_1^{(2)} \\ \vdots \\ C_6^{(2)} \\ C_1^{(3)} \\ \vdots \\ C_6^{(3)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{18} \tag{10}$$

4.2 Les 18 Équations

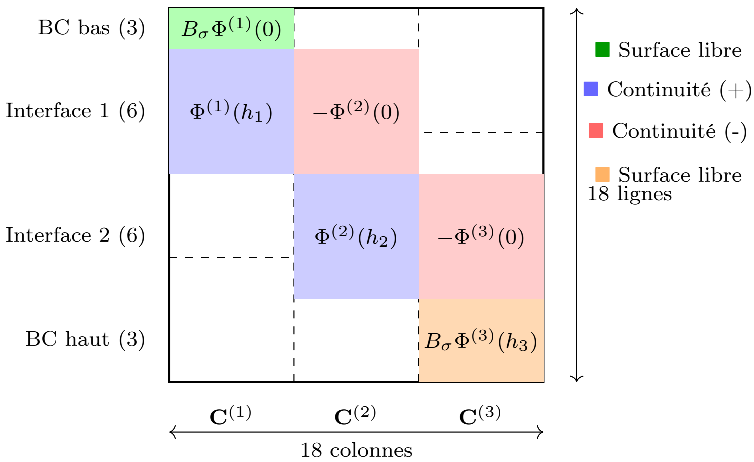
Type	**Position**	**Nombre**
Surface libre ($z = 0$)	$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$	3
Interface 1-2	6 conditions (3 dépl. + 3 contr.)	6
Interface 2-3	6 conditions (3 dépl. + 3 contr.)	6
Surface libre ($z = H$)	$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$	3
Total		**18**

4.3 Structure de la Matrice Globale K_{glob}

Le système est écrit sous forme :

$$\boxed{K_{glob} \cdot \mathbf{C}_{global} = \mathbf{F}_{thermique}} \tag{11}$$

avec K_{glob} de taille 18×18 :



5 Formule Générale pour N Couches

5.1 Comptage des Équations

Formules Générales

Pour un système à N couches :

Nombre d'inconnues :

$$\text{Inconnues} = 6 \times N \tag{12}$$

Nombre d'équations (approche modale) :

$$\text{Équations} = \underbrace{3}_{\text{BC bas}} + \underbrace{6(N-1)}_{\text{interfaces}} + \underbrace{3}_{\text{BC haut}} = 6N \tag{13}$$

Vérification : Inconnues = Équations ✓

5.2 Comparaison des Approches

Approche	**Formule**	**N=3**	**N=10**
Théorique (27 éq.)	$9N$	27	90
Modale (18 éq.)	$6N$	18	60
Réduction	$3N$ équations en moins	9	30

6 L'Implémentation dans le Code Python

6.1 Fonction d'Assemblage (core/mechanical.py)

Le code Python exploite cette optimisation dans la fonction `solve_multilayer` :

Extrait de core/mechanical.py (lignes 992-1050)

```
def solve_multilayer(layers, delta1, delta2, ...):
    """
    Résout le problème multicouche avec 6N équations.

    Les 3N équations d'équilibre sont AUTOMATIQUEMENT
    satisfaites car les modes propres tau_r vérifient:
        det(M(tau_r)) = 0  =>  M(tau_r) @ V_r = 0
    """
    N = len(layers)

    # Matrice globale 6N x 6N (pas 9N x 6N !)
    K_glob = np.zeros((6*N, 6*N), dtype=complex)

    # Bloc 1: Conditions aux limites en z=0
    K_glob[0:3, 0:6] = B_stress @ Phi_layer0(0)

    # Blocs 2 à N: Conditions de continuité
    for k in range(N-1):
        row = 3 + 6*k
        K_glob[row:row+6, 6*k:6*(k+1)] = Phi[k](h[k])
        K_glob[row:row+6, 6*(k+1):6*(k+2)] = -Phi[k+1](0)

    # Bloc final: Conditions aux limites en z=H
    K_glob[-3:, -6:] = B_stress @ Phi_layerN(h_N)

    # Résolution: 6N équations, 6N inconnues
    C_global = solve(K_glob, F_thermal)
```

6.2 Vérification de l'Équilibre a Posteriori

Bien que non nécessaire (l'équilibre est garanti par construction), on peut vérifier :

Test de Validation

```
# Verification que M(tau_r) @ V_r = 0 pour chaque mode
for r, tau_r in enumerate(tau_roots):
```

```
M_r = get_M_matrix(tau_r, delta1, delta2, props)
V_r = eigenvectors[r]
residual = M_r @ V_r
assert np.allclose(residual, 0, atol=1e-10)
# => L'équilibre est bien satisfait !
```

7 Références dans la Documentation

Cette optimisation est mentionnée dans :

1. **resolution_matrice.tex** (lignes 144-160) :

   "Les équations d'équilibre volumique sont automatiquement satisfaites par la propriété des modes propres : $M(\tau_r) \cdot \mathbf{V}_r = \mathbf{0}$ par définition de τ_r."

2. **implementation_mecanique.tex** (ligne 281) :

   "Le système final comporte $6N$ équations et $6N$ inconnues, l'équilibre étant implicitement vérifié."

8 Résumé et Conclusion

Synthèse

Approche	**N=3**	**Pourquoi ?**
Théorique générale	27 éq.	Compte toutes les équations physiques
Méthode modale (code)	**18 éq.**	**Équilibre implicite via** $\det(M) = 0$

Message clé : La réduction de 27 à 18 équations n'est pas une simplification physique, mais une **optimisation mathématique** qui exploite la propriété fondamentale des modes propres :

$$\boxed{\det(M(\tau_r)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(\tau_r) \cdot \mathbf{V}_r = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Équilibre satisfait}} \tag{14}$$

Le code est mathématiquement équivalent au PDF.

Il résout le même problème physique avec moins d'équations grâce à l'exploitation intelligente de la structure modale.