

# Finalisation de l'Assemblage Matriciel

## Développement Intégral (Hypothèse 3 Modes)

**Objectif :** Ce document détaille le passage des équations aux dérivées partielles (EDP) au système algébrique  $K \cdot A = F$ . **Note Importante :** Conformément aux hypothèses du projet (Condition de radiation), nous ne conservons que les **3 racines** ( $\tau_r$ ) à partie réelle négative. La somme sur les modes porte donc sur  $r \in \{1, 2, 3\}$ .

## I. Équations d'Équilibre Volumique (9 Équations)

Pour chaque couche  $k \in \{1, 2, 3\}$ , l'équilibre statique impose  $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ . Nous utilisons l'Ansatz spectral restreint aux modes retenus :

$$U_j^{(k)}(x_3) = \sum_{r=1}^3 A_r^{(k)} V_j^{(k,r)} e^{\tau_r^{(k)} x_3}$$

**Règles de substitution :**

- Dérivée seconde en  $x_3$  :  $\frac{d^2}{dx_3^2} \rightarrow \tau_r^2$
- Dérivée première en  $x_3$  :  $\frac{d}{dx_3} \rightarrow \tau_r$
- Dérivées latérales  $(x_1, x_2)$  :  $\frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow i\delta_1$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_2} \rightarrow i\delta_2$

### 1. Équation 1 : Projection sur $x_1$ ( $\alpha = 1$ )

*Physique : Équilibre en traction/cisaillement longitudinal.*

**Forme EDP (Tensorielle) :**

$$C_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + C_{66} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + C_{55} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_3} = F_{th,1}$$

**Forme Algébrique Finale (Lignes 1, 4, 7 de la matrice) :** Pour chaque mode  $r \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\underbrace{(C_{55}\tau_r^2 - [C_{11}\delta_1^2 + C_{66}\delta_2^2])}_{\text{Diag } U_1} V_1^{(r)} - \underbrace{(C_{12} + C_{66})\delta_1\delta_2}_{\text{Couplage } U_2} V_2^{(r)} + \underbrace{(C_{13} + C_{55})\delta_1\tau_r}_{\text{Couplage } U_3} V_3^{(r)} = F_{th,1} \quad (1)$$

### 2. Équation 2 : Projection sur $x_2$ ( $\alpha = 2$ )

*Physique : Équilibre en cisaillement transversal.*

**Forme EDP :**

$$(C_{66}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2 + C_{44}\partial_3^2)U_2 + (C_{12} + C_{66})\partial_1\partial_2U_1 + (C_{23} + C_{44})\partial_2\partial_3U_3 = F_{th,2}$$

**Forme Algébrique Finale (Lignes 2, 5, 8 de la matrice) :**

$$\boxed{-\underbrace{(C_{12} + C_{66})\delta_1\delta_2}_{\text{Couplage } U_1} V_1^{(r)} + \underbrace{(C_{44}\tau_r^2 - [C_{66}\delta_1^2 + C_{22}\delta_2^2])}_{\text{Diag } U_2} V_2^{(r)} + \underbrace{(C_{23} + C_{44})\delta_2\tau_r}_{\text{Couplage } U_3} V_3^{(r)} = F_{th,2}} \quad (2)$$

### 3. Équation 3 : Projection sur $x_3$ ( $\alpha = 3$ )

*Physique : Équilibre normal (Arrachement).*

**Forme EDP :**

$$(C_{55}\partial_1^2 + C_{44}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2)U_3 + (C_{13} + C_{55})\partial_1\partial_3U_1 + (C_{23} + C_{44})\partial_2\partial_3U_2 = F_{th,3}$$

**Forme Algébrique Finale (Lignes 3, 6, 9 de la matrice) :**

$$\boxed{-\underbrace{(C_{13} + C_{55})\delta_1\tau_r}_{\text{Couplage } U_1} V_1^{(r)} - \underbrace{(C_{23} + C_{44})\delta_2\tau_r}_{\text{Couplage } U_2} V_2^{(r)} + \underbrace{(C_{33}\tau_r^2 - [C_{55}\delta_1^2 + C_{44}\delta_2^2])}_{\text{Diag } U_3} V_3^{(r)} = F_{th,3}} \quad (3)$$

## II. Équations de Continuité (12 Équations)

Pour l'interface entre la couche  $k$  et  $k + 1$ .

### Continuité des Déplacements

$$\sum_{r=1}^3 A_r^{(k)} V_j^{(k,r)} e^{\tau_r^{(k)} h_k} - \sum_{s=1}^3 A_s^{(k+1)} V_j^{(k+1,s)} = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, 3$$

### Continuité des Tractions

$$\sum_{r=1}^3 A_r^{(k)} W_j^{(k,r)} e^{\tau_r^{(k)} h_k} - \sum_{s=1}^3 A_s^{(k+1)} W_j^{(k+1,s)} = \underbrace{\sigma_{th,j3}^{(k+1)}(0) - \sigma_{th,j3}^{(k)}(h_k)}_{\Delta\Sigma_{th}}$$

## III. Synthèse : Matrice Globale

Le système final  $[K_{glob}]\{A\} = \{F\}$  s'organise avec des blocs de taille adaptée aux 3 modes retenus.

1. **Équilibre Couche 1** (3 éq) : Appliqué à  $z = h_1/2$ .
2. **Équilibre Couche 2** (3 éq) : Appliqué à  $z = h_2/2$ .

3. **Équilibre Couche 3** (3 éq) : Appliqué à  $z = h_3/2$ .
4. **Interface 1-2** (6 éq) : Continuité  $U$  et  $\sigma$ .
5. **Interface 2-3** (6 éq) : Continuité  $U$  et  $\sigma$ .
6. **Bord Bas** ( $z = 0$ ) (3 éq) : Encastrement  $U = 0$ .
7. **Bord Haut** ( $z = H$ ) (3 éq) : Traction imposée  $\sigma \cdot n = F_{ext}$ .