

I. Ур. с разделяющимися переменными  
 $f(y) \cdot dy = g(x) \cdot dx \rightarrow \int f(y) dy = \int g(x) dx$

- $y' = f(ax + by + c) \Rightarrow$  замена  $y(x) = \frac{z(x) - ax - c}{b}$ ,  
 $y'(x) = \frac{z'(x) - a}{b}$ ,  $z(x) = ax + by(x) + c$

## II. Однородные уравнения

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$M$  и  $N$  – однород. одной и той же степени, т.е.

$$M(kx, ky) = k^n \cdot M(x, y), \text{ то же для } N$$

Замена  $y(x) = t(x) \cdot x$ ,  $y' = t'x + t$ ,  $t(x) = \frac{y(x)}{x}$

- $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \leftarrow l_1 \Rightarrow (x_0, y_0) = l_1 \cap l_2$ ,  
 $\leftarrow l_2$

Замена  $x = u + x_0$ ,  $y = v + y_0$

- $y(x) = z^m(x)$ ,  $z = y^{-m}$

## III. Линейные ур. I порядка

$$y' + a(x)y = b(x)$$

(I) Однородное  $y' + a(x)y = 0 \rightarrow (\text{реш.}) y_1 = y = c \cdot \dots \quad \forall c$

(II) Метод вариации постоянной.

Реш. в виде  $y = c(x)y_1(x)$

$$y' + a(x)y = c'y_1 + cy_1' + acy_1 = b \rightarrow$$

$$c'y_1 = b \rightarrow c = \int b(x)dx / y_1(x)$$

- Ур. Бернулли  $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha \rightarrow$   
 $y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$   
 $z(x) = y^{1-\alpha}$ ,  $z'(x) = y^{-\alpha}y'(1 - \alpha)$  (не забудь  $y = 0$ )

- Интегрируемые комбинации

$$ydy = \frac{1}{2} dy^2 \quad \frac{1}{y} dy = d \ln |y| \quad xdy + ydx = d(xy)$$

- Ур. Рикатти  $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$   
 Если  $y_1(x)$  – частное реш., замена  $y(x) = y_1(x) + z(x)$   
 Частное решение можно искать в виде  
 $y_1 = cx^\alpha$ ,  $ce^{\alpha x}$ ,  $ax^2 + bx + c$ ,  $ax + b$

## IV. Ур. в полных дифференциалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 - \text{УПД, если } \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\exists F : \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \rightarrow F(x, y) = \int M(x, y)dx + c(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \rightarrow \left( \int M(x, y)dx + c(y) \right)'_y = N(x, y) \end{cases}$$

Отсюда найдём  $c(y) = \int c'_y dy = \dots + c_1 \quad \forall c_1$

$$dF = 0 \Leftrightarrow (\text{ответ}) F = C \quad \forall C$$

(константа  $c_1$  входит в  $C$ )

- Интегрирующий множитель (!!! не рекомендуется !!!)  
 $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ . Ищем  $m(x, y) : M m dx + N m dy = 0 - \text{УПД.}$   
 $m = m(x)$ ,  $m(y)$ ,  $x^a y^b$

- Выделение полного дифференциала

$$d(xy), d\left(\frac{x}{y}\right), d(\ln |x|)$$



Ур. I порядка, не разреш. отн. производной

$$F(x, y, y') = 0$$

(1) Разрешить отн. производной. Возможен метод решения относительно  $x(y)$ , а не  $y(x)$  :)

(2)  $F(x, y, y')$  разрешено отн.  $y$  :  $y = f(x, y')$

Пусть  $p = y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow p dx = dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp \rightarrow$

$M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0$ , обычное уравнение. Можно найти явное  $p = p(x)$ , а можно  $x = x(p)$  – тогда ответ

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = f(x(p), p) \end{cases}$$

(3)  $F(x, y, y') : x = f(y, y')$

Анал.:  $p = y'$ ,  $\frac{dy}{p} = dx = d f(y, p) = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp \rightarrow \dots$

(4) Нахождение особых решений

0. Решить исходное уравнение

1.  $p$ -дискриминантные кривые:  $\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ \partial F / \partial p = 0 \end{cases}$   
 $(p = y')$

Избавляемся от  $p$  в системе, ее решения –  
 $y = y_1(x, c)$

2.  $y_1$  является решением исх. ур.?

3.  $y_1$  – особое?  $\forall x_0 \exists$  реш.  $y_2(x) : \begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0) \end{cases}$   
 То есть в любой своей точке особое решение должно касаться другого решения системы.



Ур. допускающие пониж. порядка производной

- $y^{(n)} = f(x) \rightarrow y^{(n-1)} = \int f(x)dx \rightarrow \dots$

- $\otimes : F(x, y^{(k)}, \dots y^{(n)}) = 0 \Rightarrow$  замена  $y^{(k)}_x = z(x)$

- $\otimes : F(y, y^{(1)}, \dots y^{(n)}) = 0$

Замена  $y' = p(y(x))$ ,  $y'' = p'_y \cdot y'_x = p'p$   
 (не забудь  $p'_y = \frac{dp}{dy}$  –  $dy = 0$ )

- Однородное по  $y, y', \dots y^{(n)} \Rightarrow$  замена  $y' = yz(x)$   
 $y$  сократятся если ур. однородное

- Выделение интегрируемых комбинаций

$$\frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}} = (\ln |y^{(n-1)}|)'$$

Использовался задачник Филишова

Семинарист – Елена Александровна Павелъева ♡

<https://github.com/maximelianos/difurry>

$\rightarrow$  обозначает переходы между формулами

**I'.** Линейные однор. n-ого порядка с const coeff

$$\text{I} \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \dots a_0y^{(0)} = 0$$

$$\text{II} \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} \dots a_0y^{(0)} = f(x)$$

Ⓘ Характеристич. уравнение:  $\sqsupset y = e^{\lambda x}$ , находим  $\lambda$

корень $\lambda$	функции ФСР
$\mathbb{R}$ кратности $k$	$y_1(x) = e^{\lambda x}, \dots y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$
$\mathbb{C}$ кратности $k$ ( $k$ пар $\lambda = a \pm ib$ )	$y_1(x) = e^{ax} \cos bx \dots$ $y_k(x) = x^{k-1}e^{ax} \cos bx,$ $y_{k+1}(x) = e^{ax} \sin bx \dots$ $y_{2k}(x) = x^{k-1}e^{ax} \sin bx$

$$y_{\text{одн}}(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x) \quad \forall c_1, \dots, c_n$$

Ⓜ Неодн. уравнение.  $y_{\text{общ}}(x) = y_{\text{однор}} + y_{\text{частное}}(x)$

1. Первый специальный вид:  $f(x) = P_k(x)e^{\gamma x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{\text{ч}}(x) = x^s R_k(x) e^{\gamma x}$$

$s$  = кратность  $\gamma$  в решениях хар. уравнения

$R_k$  – неизвестный многочлен  $k$ -ой степени

2. Второй:  $f(x) = (P_k(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x) \cdot e^{\alpha x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{\text{ч}}(x) = x^s (Q_n(x) \cos \beta x + T_n(x) \sin \beta x) \cdot e^{\alpha x}$$

$n = \max(k, m)$ ,  $s$  = кратность  $\gamma = \alpha + i\beta$

(либо  $\alpha - i\beta$ , их кратности равны)

$f(x)$  – сумма 1 и 2 спец. видов  $\Rightarrow y_{\text{ч}}(x) = \sum y_{\text{спец}}$

Общий вид пр. части. **Метод вар. постоянных**

Возможно  $a_0, \dots, a_{n-1}$  – функции от  $x$ , т.е. не const!

$$\text{I} \quad y_{\text{одн}}(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x) \quad \forall c_1, \dots, c_n$$

$$\text{II} \quad \sqsupset y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x) \rightarrow$$

(находим функции  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – интегрируем)

$$\begin{cases} c_1'y_1 + \dots + c_n'y_n = 0 \\ c_1'y_1' + \dots + c_n'y_n' = 0 \\ \dots \\ c_1'y_1^{(n-2)} + \dots + c_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'y_1^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

• Ур. Эйлера

$$x^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1xy' + a_0y = f(x)$$

$$\text{Замена: } x = \begin{cases} e^t, & x > 0 \\ -e^t, & x < 0 \end{cases}, \quad t = \ln(x), \quad y(x) = Y(t(x)).$$

$$\text{Тогда } y' = Y_t' \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \underline{xy' = Y'}$$

$$y'' = \left( Y' \cdot \frac{1}{x} \right)' = Y'' \frac{1}{x^2} - Y' \frac{1}{x^2} \Rightarrow \underline{x^2y'' = Y'' - Y'}$$

Получили новое уравнение  $Y(t)$ . Правая часть спец. вида  $\Rightarrow$  рассматриваем  $x > 0$  и  $x < 0$ , решаем отн.  $t$ .

Иначе вар. постоянных.

**II'.** Линейные однор. ур. с переменными coeff

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$y_1(x)$  – решение, возможно, вида  $e^{\alpha x}$  или многочлен

(его степень надо найти). Другое решение  $y(x)$  найти по

формуле **Остроградского-Лиувилля**

$$\left| \begin{matrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{matrix} \right| = ce^{-\int \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} dx} \quad \forall c$$

**III'.** Линейные системы

$$\text{Ⓘ} \quad \bar{Y}' = A\bar{Y} - \text{однородные}$$

$$\sqsupset \bar{Y} = \bar{\alpha}e^{\lambda t} \rightarrow \bar{Y}' = \bar{\alpha}\lambda e^{\lambda t} \Rightarrow$$

$$(A - \lambda E)\bar{\alpha} = 0 \Rightarrow |A - \lambda E| = 0$$

Находим собств. значения  $\lambda$  и с. векторы  $\bar{\alpha}$ .

1) Нельзя оставлять  $\mathbb{C}$  собств. значения! Делать так:

(Аналогично обычным однородным линейным ур.,

только кратные с.з. имеют разные с.в.)

$$\lambda = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \bar{Y} = \bar{\alpha} \cdot (\cos \beta t + i \sin \beta t)e^{\alpha t} = \bar{\alpha}_1 + i\bar{\alpha}_2 \Rightarrow$$

$$\bar{Y}_{\text{одн}} = c_1\bar{\alpha}_1 + c_2\bar{\alpha}_2 \quad \forall c_1, c_2$$

2) Если кол-во с. векторов меньше кратности с. значения:

Допустим кратность  $\lambda$  равна 3

$$\bar{Y} = (\bar{\alpha}t^2 + \bar{\beta}t + \bar{\gamma})e^{\lambda t} \rightarrow \bar{Y}' = (\bar{\alpha}2t + \bar{\beta})e^{\lambda t} + (\bar{\alpha}t^2 + \bar{\beta}t + \bar{\gamma})\lambda e^{\lambda t} =$$

$$(\lambda\bar{\alpha}t^2 + (2\bar{\alpha} + \lambda\bar{\beta})t + (\bar{\beta} + \lambda\bar{\gamma}))e^{\lambda t}, \quad A\bar{Y} = (A\bar{\alpha}t^2 + A\bar{\beta}t + A\bar{\gamma})e^{\lambda t}$$

$$\sqsupset B = A - \lambda E. \quad \bar{Y}' = A\bar{Y} \Rightarrow \begin{cases} B\bar{\alpha} = \bar{0} \\ B\bar{\beta} = 2\bar{\alpha} \rightarrow B^3\bar{\gamma} = \bar{0} \rightarrow \dots \\ B\bar{\gamma} = \bar{\beta} \end{cases}$$

Так находим все решения – наборы  $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}\}$ .

Общее решение однородного уравнения

$$\bar{Y}_{\text{одн}} = c_1\bar{\alpha}_1e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n\bar{\alpha}_ne^{\lambda_n t} \quad \forall c_1, \dots, c_n$$

$$\text{Ⓜ} \quad \bar{Y}' = A\bar{Y} + \bar{F} - \text{неоднородные}$$

$$1. \text{ Первый спец. вид. Если } \bar{F} = \overline{P_m}(t) \cdot e^{\gamma t} = \begin{pmatrix} P_{m1}(t) \\ \dots \\ P_{mn}(t) \end{pmatrix} e^{\gamma t},$$

$$m = \max(m_1, \dots, m_n) \Rightarrow \bar{Y}_{\text{ч}} = \bar{Q}_{m+s}(t)e^{\gamma t}$$

( $s$  = кратность  $\gamma$ )

$$2. \text{ Второй спец. вид. } \bar{F} = (\overline{P_m}(t) \cos \beta t + \overline{Q_l}(t) \sin \beta t) \cdot e^{\alpha t}$$

$$\Rightarrow \bar{Y}_{\text{ч}} = (\bar{R}_{k+s}(t) \cos \beta t + \bar{T}_{k+s}(t) \sin \beta t) \cdot e^{\alpha t}$$

$$k = \max(m, l)$$

( $s$  = кратность  $\gamma$ )

$$\bar{F} - \text{сумма специальных видов} \Rightarrow \bar{Y}_{\text{ч}} = \sum y_{\text{спец}}$$