Analyse appliquée : TF

Exercice 2 : Notons χ la fonction "porte" donnée par :

- $\chi(x) = 1$, si $|x| \leq \frac{1}{2}$
- $\chi(x) = 0$, sinon

Sachant que la transformée de Fourier de cette fonction est donnée par :

- $F[\chi(x)](\xi) = F[\chi(\dfrac{x-1}{2})](\xi) = \begin{cases} \frac{sin(\pi\xi)}{\pi\xi}, \xi \neq 0 \\ 1, \xi = 0 \end{cases}$

Trouver la transformée de Fourier de :

- (a) : $\chi(\dfrac{x-1}{2})$
  - $\chi(u)$ avec $u(x) = \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$
  - Si on pose $g(x) = \chi(x - \dfrac{1}{\xi})$
  - Alors $g(\dfrac{1}{2}x) = \chi(\dfrac{x}{\xi} - \dfrac{1}{2})$
  - $F[\chi(\dfrac{x-1}{2})](\xi) = F[g(\dfrac{x}{2})](\xi) = 2F[g(x)](2\xi) = 2F[\chi(x - \dfrac{1}{2})](2\xi) = 2.e^{-2\pi i\frac{1}{2}x2\xi}.F[\chi(x)](2\xi)$
  - $F[\chi(\dfrac{x-1}{2})](\xi) = \begin{cases} e^{-2\pi i\xi}.\frac{sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}, \xi \neq 0 \\ x, \xi = 0 \end{cases}$

- (b) : $x\chi(x)$
  - $F[x\chi(x)] = \dfrac{1}{-2\pi i}F[\chi(x)]'$ car $(F(f))^{(n)} = F((-2\pi ix)^n.f(x)) \rightarrow n = 1 \Rightarrow F[\chi(x)]'(\xi) = F[-2\pi ix\chi(x)](\xi) = -2\pi iF[x\chi(x)](\xi)$
  - Si $\xi \neq 0$:
    - $F(x\chi(x))(\xi) = \dfrac{1}{-2\pi i}(\dfrac{\pi^2\xi cos(\pi\xi) - \pi sin(\pi\xi)}{(\pi\xi)^2}) = \dfrac{i}{2}(\dfrac{cos(\pi\xi)}{\pi\xi} - \dfrac{sin(\pi\xi)}{(\pi\xi)^2}$
  - Si $\xi = 0$:
    - $F(x\chi(x))(\xi) = \dfrac{1}{-2\pi i}\lim\limits_{\xi\to 0}\dfrac{\frac{sin(\pi\xi)}{\pi\xi} - 1}{\xi - 0} = \dfrac{i}{2\pi}\lim\limits_{\xi\to 0}\dfrac{sin(\pi\xi) - \pi\xi}{\pi\xi^2} = 0$