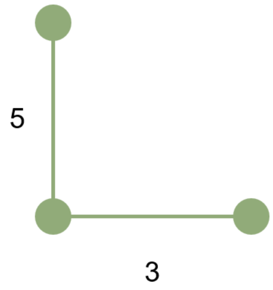
Graphes et algorithmes : Fiche

Sommaire

---

1. Introduction

- **Théorie des graphes :** combine les mathématiques et l'informatique pour étudier les graphes.
- **Graphe :** ensemble de points réliés par un ensemble de lignes ou de flèches.
- **Réseau :** graphe pondéré (graphe + informations).



2. Définitions et terminologie

2.1. Graphe

> Un graphe est un **couple** $G = (S, A)$:

- S est un ensemble de n sommets
- A est une famille de m éléments du produit cartésien $S \times S = \{(i, j) : i, j \in S\}$

2.2. Hypothèses

- G est fini (n et m sont positifs)
- G est $1 - graphe$: (i, j) n'apparaît qu'une fois. Donc A devient un sous ensemble de $\{(i, j) : i, j \in S\}$.
- (i, i) est une **boucle**
- G est **simple** s'il est $1 - graphe$ et sans boucle

2.2.1. Conséquences

- Un graphe est une **relation binaire** A sur l'ensemble S
- Si la relation A est **symétrique**, le graphe G est appelé un **graphe non orienté**, sinon G est **orienté**

2.3. Sommets, arcs et arêtes

> Sommet : Elément de base (maillon, noeud, point, objet, tâche).

- Représenté par un **point**, **cercle**, **carré**, **noeud**, **forme**...

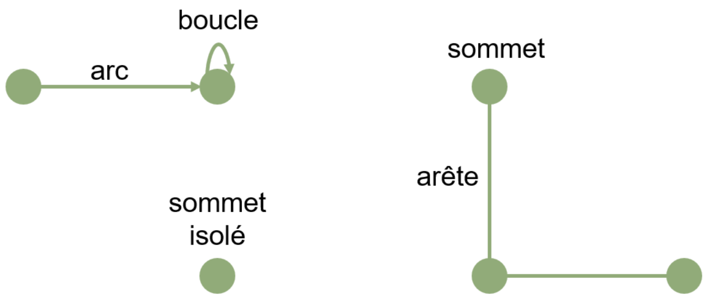
> Arc : Lien entre deux éléments, avec un sens. Un arc reliant i à j est noté (i, j).

- Représenté par une **flèche**.

> Arête : Lien entre deux éléments, sans sens. Une arête reliant i à j est noté $\{i, j\}$ ou $[i, j]$ ou (i, j).

- Représenté par une **ligne** ou **corde**

2.4. Exemple



Graphe orienté **Graphe non orienté**

2.5. Graphes denses et creux

- $S(G)$ ou S est l'ensemble des sommets du graphe G.
  - n est le nombre de sommets $(|S|)$
- $A(G)$ ou A est l'ensemble des arcs/arêtes.
  - m est le nombre d'arc/arêtes $(|A|)$

> G est dense si $m \simeq n^2$
>
> G est creux si $m << n^2$

2.6. Voisins et degrés

Dans un **graphe orienté** :

- **Successeurs** à i $(V^+(i))$: tous les j tels que $\{j \in S : (i,j) \in A\}$
  - **demi-degré extérieur** d'un sommet i : $d^+(i) = |V^+(i)|$
- **Successeurs** à i $(V^-(i))$: tous les j tels que $\{j \in S : (j,i) \in A\}$
  - **demi-degré intérieur** d'un sommet i : $d^-(i) = |V^-(i)|$
- **Voisins** à i : $V(i) = V^+(i) \cup V^-(i)$
  - **degré** d'un sommet i : $d(i) = |V(i)|$

Dans un **graphe non-orienté** il n'y a que des **voisins de sommets** et donc des **degrés de sommets**.

2.7. Sommet isolé

> Un sommet est **isolé** si $d(i) = 0$

2.8. Chaînes et cycles

Dans un graphe **non-orienté** :

> Une **chaîne** est une **séquence** $\pi = (s_1, ..., s_p)$ de p sommets dont s_1 et s_p sont les **extrémités**.
>
> Un **cycle** est une **chaîne** dont les extrémités coïncident : $s_1 = s_p$

2.9. Chemins et circuits

Dans un graphe **orienté** :

> Un **chemin** est une **séquence** $\pi = (s_1, ..., s_p)$ de p sommets dont s_1 est l'**extrémité initiale** et s_p l'**extrémité finale**.
>
> Un **circuit** est un **chemin** dont les extrémités coïncident : $s_1 = s_p$

2.10. Chaîne élémentaire et chaîne simple

> **Chaîne élémentaire :** chaîne ne passant pas deux fois par le même **sommet**
>
> **Chaîne simple :** chaîne ne passant pas deux fois par la même **arête**

2.11. Distance et diamètre

> **Distance** entre deux sommets : longueur du plus court chemin (ou de la plus courte chaîne) entre ces deux sommets.
>
> **Diamètre** d'un graphe : la plus grande **distance** possible qui puisse exister entre deux de ses sommets, noté $Diam(G)$

2.12. Connexité, forte connexité et composantes connexes

> Un graphe **non-orienté** est **connexe** si deux sommets quelconque sont connectés par une **chaîne**.
>
> Un graphe **orienté** est **fortement connexe** s'il existe un **chemin** de n'importe quel sommet vers n'importe quel autre sommet.
>
> Chaque graphe **non-connexe** peut être divisé en plusieurs **composantes connexes**

2.13. Graphes spéciaux

- **Graphe Nul :** $S = \emptyset$ donc $A = \emptyset$
- **Graphe Vide :** $A = \emptyset$

2.13.1. Graphe complet

- Graphe **simple** $G = (S, A)$

2.13.2. Graphe $k-$régulier

- Graphe **connexe**
- Pour tout $i \in S, d(i) = k$
- Un graphe est dit **régulier** si $\delta(G) = \Delta(G)$ avec
  - $\delta(G) = min\{d(i) : i \in S\}$
  - $\Delta(G) = max\{d(i) : i \in S\}$

2.13.3. Hypercube Q_n

- Chaque **sommet** porte une **étiquette** de longueur n sur un **alphabet** $B = \{0, 1\}$
- Deux sommets sont **adjacents** si leurs étiquettes ne diffèrent que d'un **symbole**.

2.13.4. Arbre

ALED

2.13.5. Graphe biparti

- S peut être partitionné en 2 c

2.13.6. Graphe planaire

- On peut le dessiner sur un plan sans que les arêtes se croisent.
- K_4 est le plus grand **graphe complet planaire**.

2.13.7. Graphe eulérien

- Un **cycle** (**circuit**) **eulérien** est un **cycle** (**circuit**) qui passe exactement une fois par chaque **arête** (**arc**) du graphe.
- Un **graphe est eulérien** s'il admet un **cycle** (**circuit**) **eulérien**.s
- Un graphe eulérien peut être tracer "sans lever le crayon"

2.13.8. Graphe hamiltonien

- Un **cycle** (**circuit**) **hamiltonien** est un **cycle** (**circuit**) qui passe une fois par chaque **sommet** du graphe.
- Un **graphe est eulérien** s'il admet un **cycle** (**circuit**) **hamiltonien**.