Graphes & Algorithmes

Licence 3ème année

Saïd Hanafi

Plan

- ✓ Introduction & Applications
- ✓ Définitions & Terminologie
- ✓ Opérations & Représentations
- ✓ Parcours en Largeur
- ✓ Parcours en Profondeur
- ✓ Tri Topologique
- ✓ Connexité
- ✓ Arbres Couvrants

CM	TD	TP
9	12	9

Graphes & Algorithmes

Licence 3ème année

Opérations

Saïd Hanafi

Opérations sur les graphes

- Opérations élémentaires
- Opérations unaires, qui créent un nouveau graphe à partir d'un ancien
- Opérations binaires, qui créent un nouveau graphe à partir de deux anciens
- Etc …

Opérations Elémentaires

Soit $G = (S, A)$ un graphe

- Insérer un sommet $i \notin S$:
$$G' = (S \cup \{i\}, A)$$
- Insérer un arc / arête $(i, j) \notin A$:
$$G' = (S, A \cup \{(i, j)\})$$
- Supprimer un sommet $i \in S$:
$$G' = (S - \{i\}, A - \{(i, j) : j \in V(i)\})$$
- Supprimer un arc / arête $(i, j) \in A$:
$$G' = (S, A - \{(i, j)\})$$

Opérations Unaires

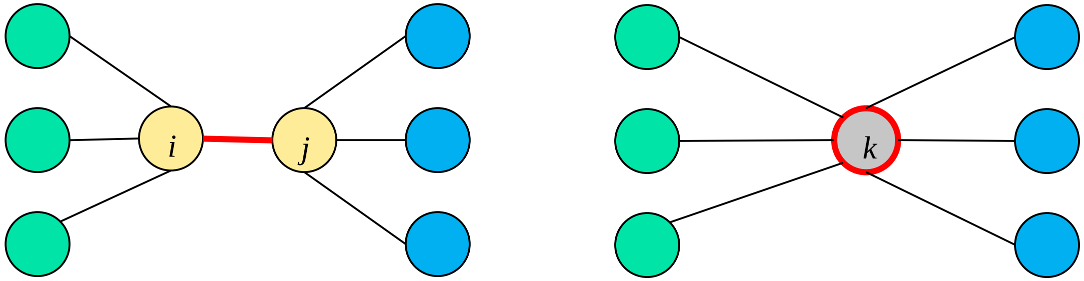
- Contraction d'arête
- Duplication de sommet
- Sous-graphe
- Graphe partiel
- Graphe Complémentaire
- Graphe Transposé
- Graphe de Ligne
- Graphe Dual
- Réécriture de graphes
- …

Contraction d'arête

- $G = (S, A)$ un graphe, une **contraction** d'arête $[i, j]$ consiste à fusionner ses deux extrémités en un sommet k, le graphe devient

$$G' = (S', A') \text{ avec } S' = S - \{i, j\} + \{k\},$$

A' est égal à A mis à part que les occurrences de i et j sont remplacés par k

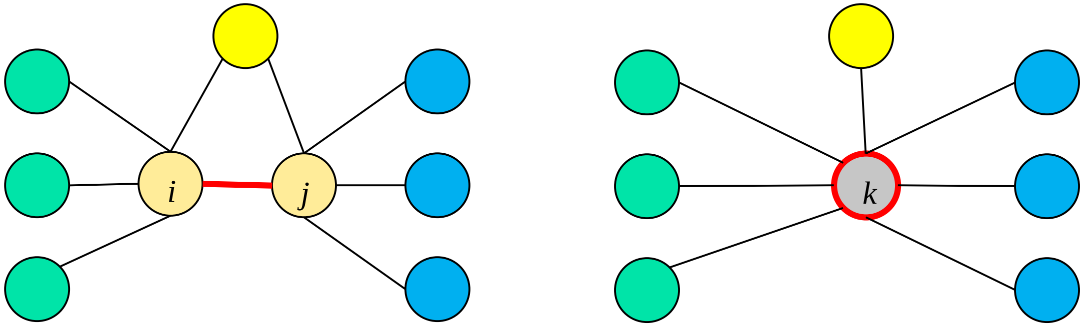


Contraction d'arête

- $G = (S, A)$ un graphe, une **contraction** d'arête $[i, j]$ consiste à fusionner ses deux extrémités en un sommet k, le graphe devient

$$G' = (S', A') \text{ avec } S' = S - \{i, j\} + \{k\},$$

A' est égal à A mis à part que les occurrences de i et j sont remplacés par k



Aggregation

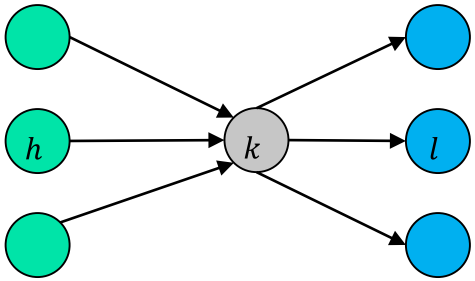
Duplication de sommet

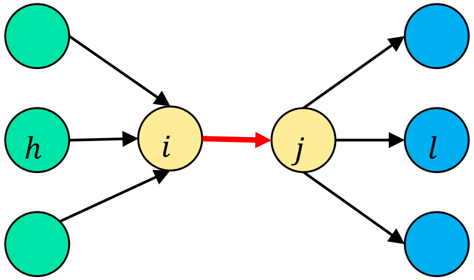
- $G = (S, A)$ un graphe, une **duplication** du sommet k consiste à le replacer par une arête (i, j), le graphe devient

$$G' = (S', A') \text{ avec } S' = S - \{k\} + \{i, j\},$$

A' est égal à $A + \{(i, j)\}$ mis à part que les arcs

  - (h, k) sont remplacés par (h, i)
  - (k, l) sont remplacés par (j, l)





Sous Structure de $G = (S, A)$

- **Sous-graphe** engendré par $S' \subseteq S$ est le graphe
$$G(S') = \big(S', A \cap (S' \times S')\big)$$

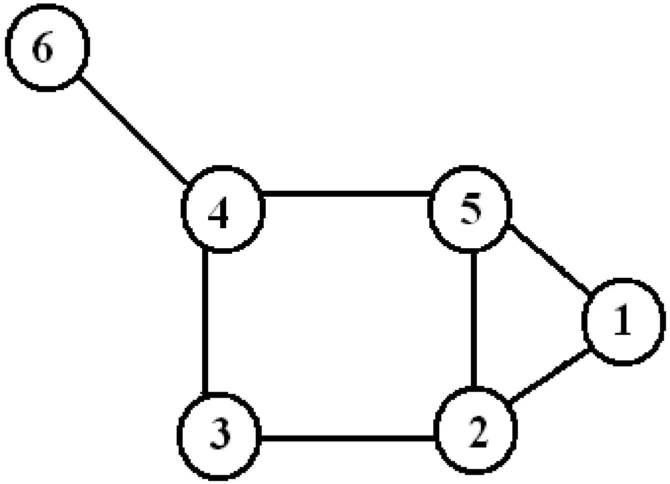
- **Graphe partiel** engendré par $A' \subseteq A$ est le graphe
$$G(A') = (S, A')$$

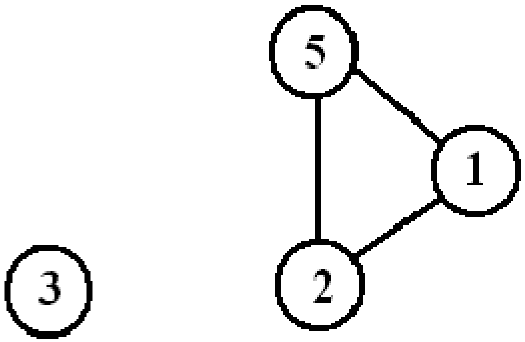
- **Sous-graphe partiel** de G : Sous-graphe d'un graphe partiel de G

- Un graphe partiel est aussi appelé un **sous-graphe couvrant**

Sous-graphe

- Un **super-graphe** d'un graphe G est un graphe qui contient G comme sous-graphe
- Tout graphe simple à n sommets est un sous-graphe couvrant de K_n





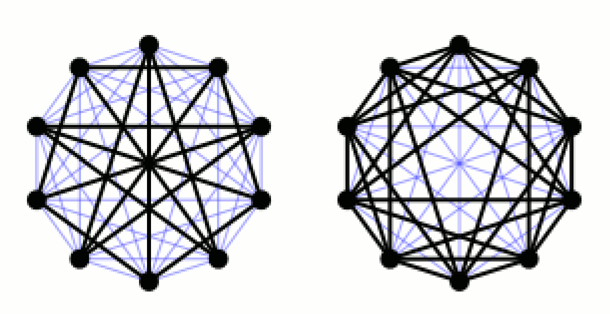
Sous Structures : carte routière

- G est le graphe des routes **nationales et autoroutes**
- La carte d'une **ville** est un sous-graphe
- La carte des routes **nationales** est un graphe partiel
- La carte des routes **nationales d'une ville** est un sous-graphe partiel

Graphe Complémentaire

- Le graphe **complémentaire** d'un graphe simple $G = (S, A)$ est le graphe $\bar{G} = (S, \bar{A})$ tel que

$$(i, j) \in \bar{A} \leftrightarrow (i, j) \notin A$$

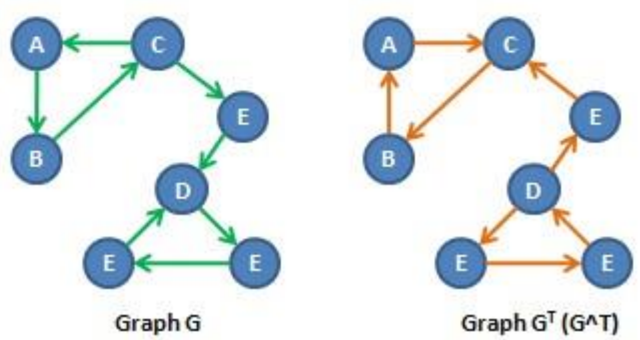


appelé aussi graphe **inversé**

Graphe Transposé

le graphe **transposé** d'un graphe orienté $G = (S, A)$ est
$G^T = (S, A^T)$ avec $A^T = \{(i, j): (j, i) \in A\}$

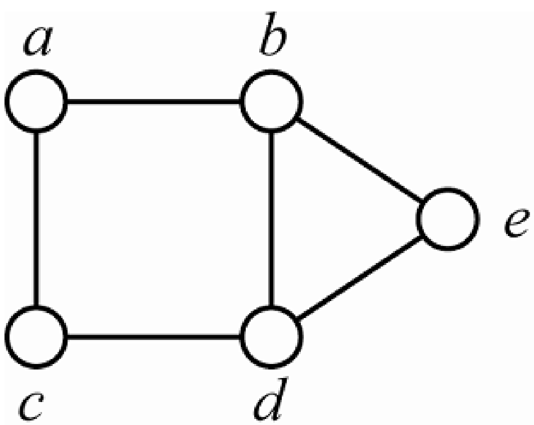
Appelé aussi graphe **inverse**



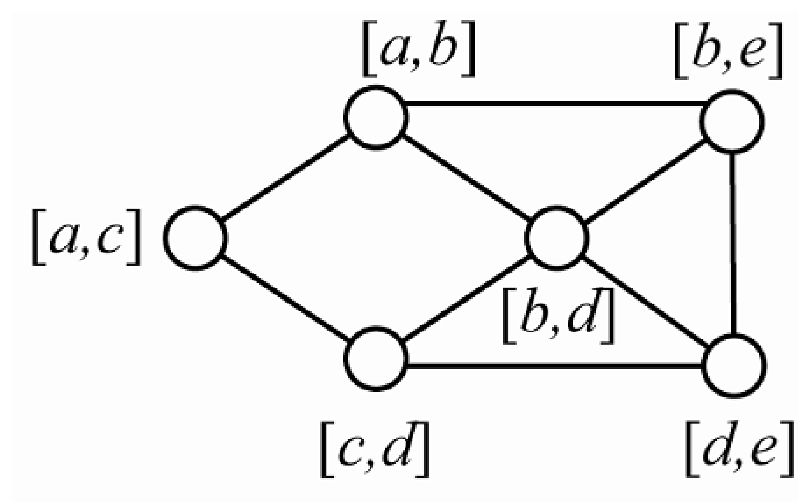
Graph G and its transpose G^T

Graphe de Ligne

- Le graphe de **ligne** associé à un graphe $G = (S, A)$, noté $L(G)$, est le graphe dont les sommets représentent les arêtes de G, et tel que deux sommets de $L(G)$ sont reliés par une arête ssi les deux arêtes qu'ils représentent dans G ont une extrémité commune



G

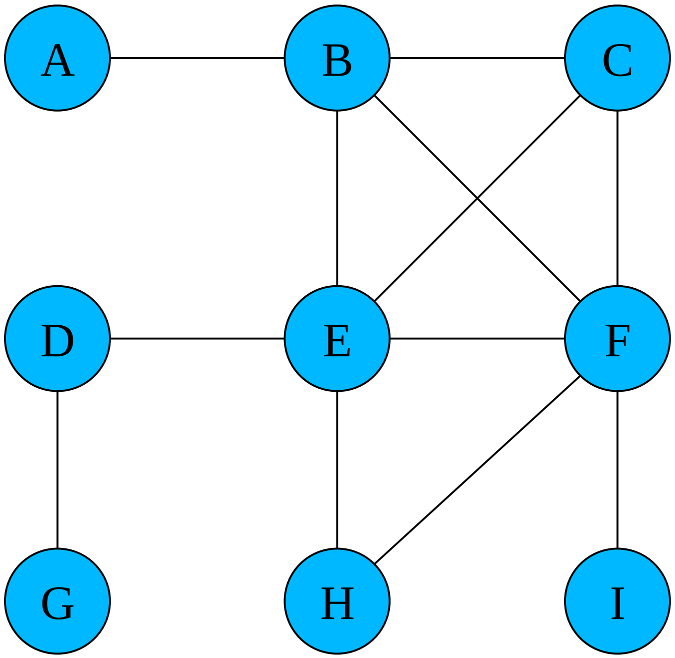


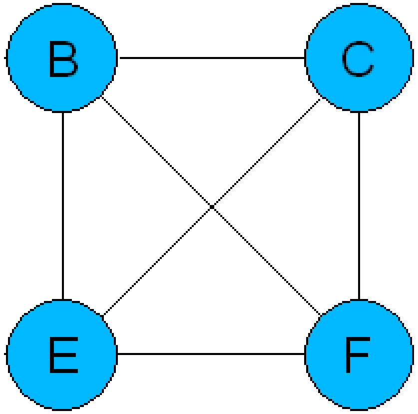
appelé graphe **adjoint**

$L(G)$

Clique

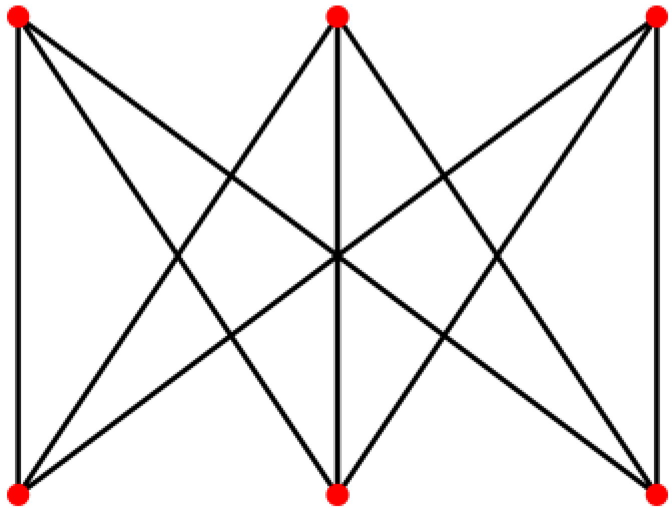
Une **clique** dans $G = (S, A)$ est un ensemble K de sommets deux à deux adjacents





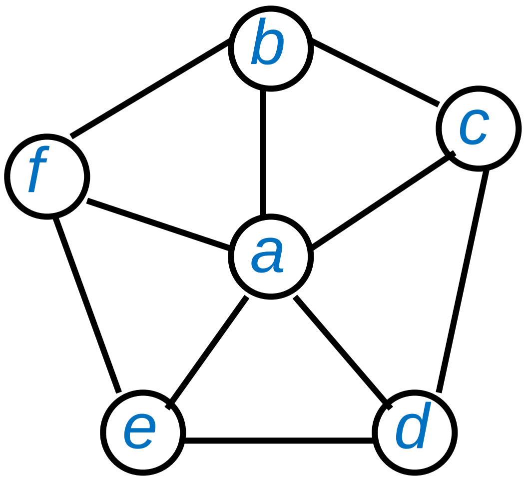
Biclique

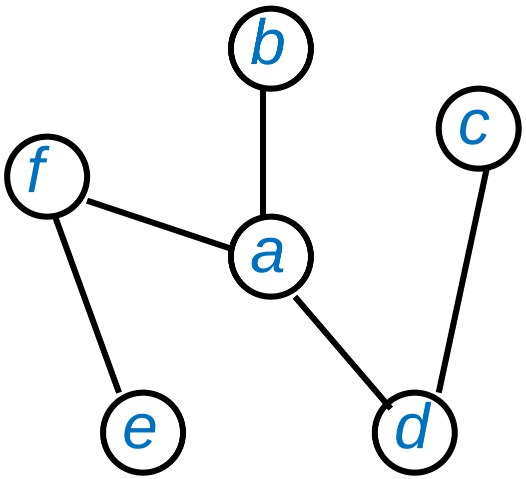
- **Biclique** est un graphe biparti complet



Arbre Couvrant

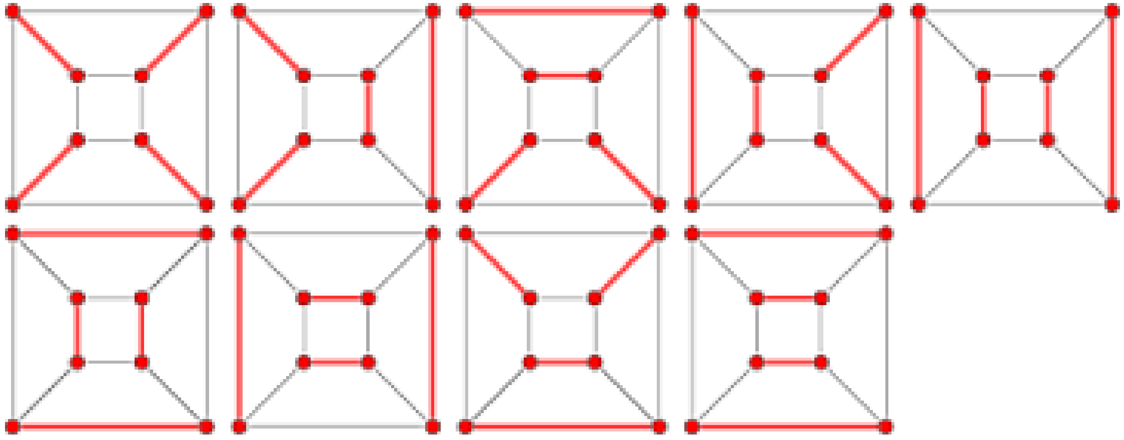
- Un **arbre couvrant** d'un graphe non orienté et connexe est un arbre inclus dans ce graphe et qui connecte tous les sommets du graphe





Couplage

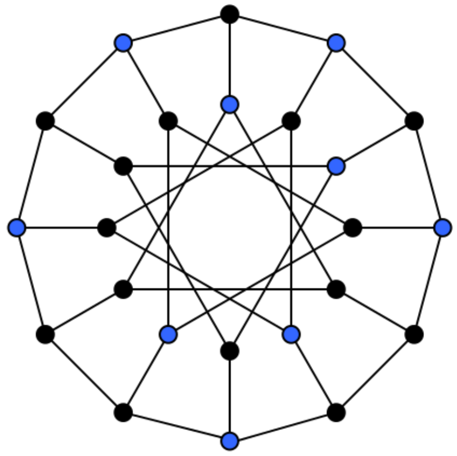
- Un **couplage** dans $G = (S, A)$ est un ensemble d'arêtes n'ayant aucune extrémité en commun



Couplage **parfait**

Stable

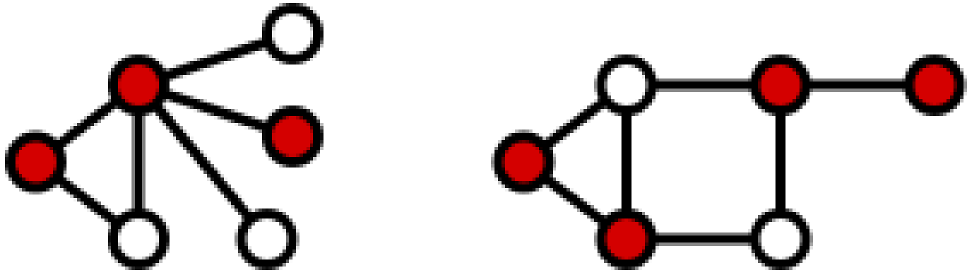
- Un **stable** dans $G = (S, A)$ est un ensemble S' de sommets deux à deux non adjacents
- Le sous-graphe $G(S')$ est vide (ne contient aune arête)



appelé aussi **ensemble indépendant**

Transversal

- Un **transversal** dans $G = (S, A)$ est un ensemble S' de sommets tel que toutes les arêtes G ont au moins une extrémité dans S'

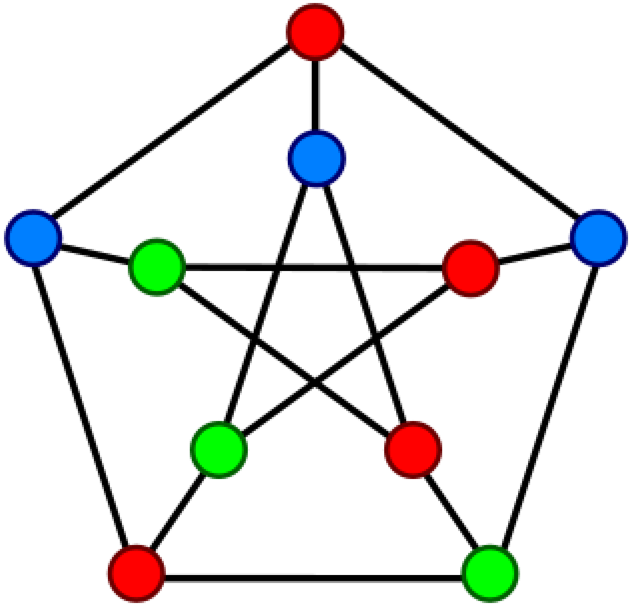


Appelé aussi ***couverture***, ou ***support***

Le complémentaire d'un transversal est un stable

Coloration de graphe

- La **coloration** de graphe consiste à attribuer une couleur à chacun de ses sommets de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleur différente

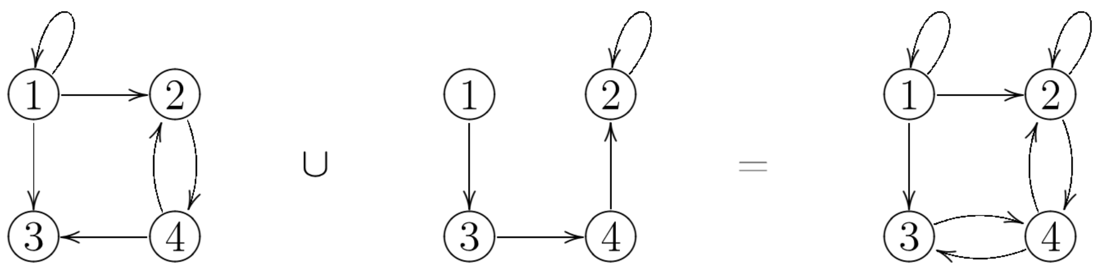


Opérations Binaires

- Union
- Intersection
- Produit cartésien
- Corona
- produit tensoriel
- produit fort
- produit lexicographique
- graphe série-parallèle

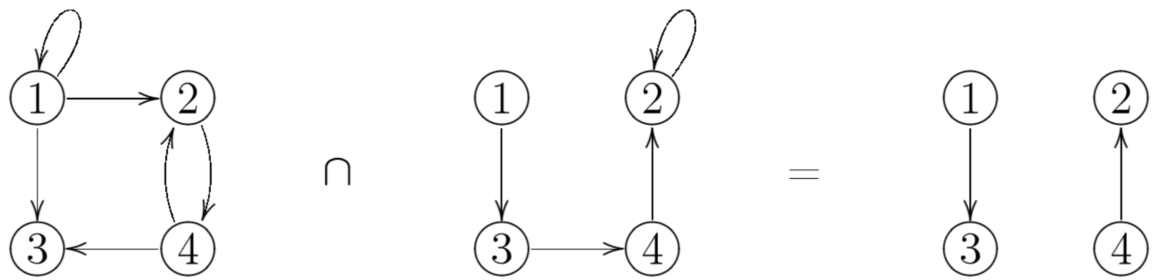
Union

- $G_1 = (S, A_1)$ et $G_2 = (S, A_2)$
- $G_1 \cup G_2 = (S, A_1 \cup A_2)$



Intersection

- $G_1 = (S, A_1)$ et $G_2 = (S, A_2)$
- $G_1 \cap G_2 = (S, A_1 \cap A_2)$

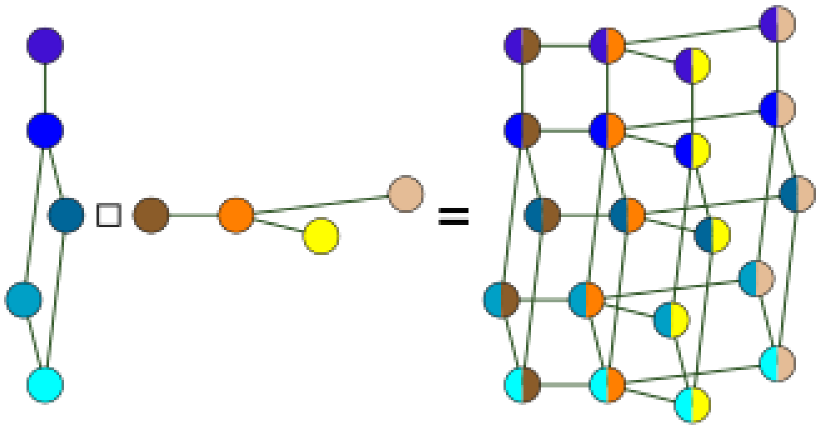


Produit cartésien

Le **produit** de $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ est

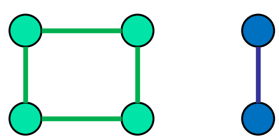
$$G'' = G \boxdot G' = (S'', A''), \text{ où}$$

- $S'' = S \times S'$
- $((i, i'), (j, j')) \in A''$ si
  - $i = j \; et \; (i', j') \in A'$, ou
  - $i' = j' \; et \; (i, j) \in A$

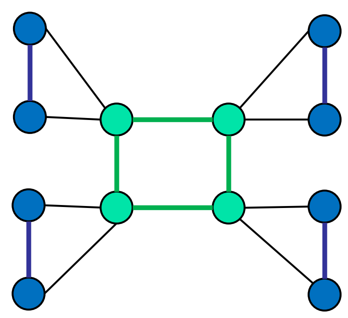


Corona de deux graphes

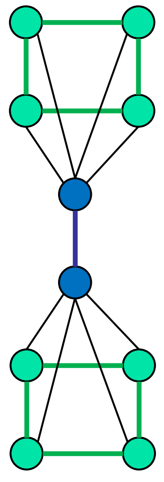
- Étant donné deux graphes G d'ordre n et H, le **corona** $G \circ H$ est défini comme le graphe obtenu en prenant n copies de H et pour chaque i insérant des arêtes entre le $i$ème sommet de G et chaque sommet du avec copie de H



C_4 K_2



$C_4 \circ K_2$



$K_2 \circ C_4$

Frucht, R., & Harary, F. (1970). On the corona of two graphs

Graphes & Algorithmes

Licence 3ème année

Présentations
Graph Data Structures

Saïd Hanafi

Plan

- Performances
- Matrices d’Incidence
- Matrice d’Adjacence
- Liste d’Adjacence

Performances d'une représentation

- **Espace** : Place en mémoire nécessaire pour une représentation
  - Cette place n'est pas toujours la même selon la représentation choisie
- **Temps** : Temps de réponse aux deux requêtes élémentaires
  - Adjacence : deux sommets *i* et *j* sont ils adjacents ?
  - Voisinage : donner la liste des voisins d'un sommet *i*
- **Dynamicité** : Temps de mise à jour de cette représentation sous
  - ajout et retrait d'une arête
  - ajout et retrait d'un sommet avec ses arêtes incidentes
  - Contraction d'arête

La compléxité des algorithmes sur les graphes
dépend fortement de leurs représentations

Opérations intéressantes

Soit $G = (S, A)$ un graphe

- Insérer un sommet $i \notin S$
- Insérer un arc / arête $(i, j) \notin A$
- Supprimer le sommet $i \in S$
- Supprimer l'arc / arête $(i, j) \in A$

- Successeurs $V^+(i)$, prédécesseurs $V^-(i)$ pour $i \in S$
- Voisins $V(i)$ pour $i \in S$
- Demi-degrés $d^-(i), d^+(i)$ pour $i \in S$
- Degrés $d(i)$ pour $i \in S$

Opérations intéressantes

Soit $G = (S, A)$ un graphe

- Insérer un sommet $i \notin S$
- Insérer un arc / arête $(i, j) \notin A$
- Supprimer le sommet $i \in S$
- Supprimer l'arc / arête $(i, j) \in A$

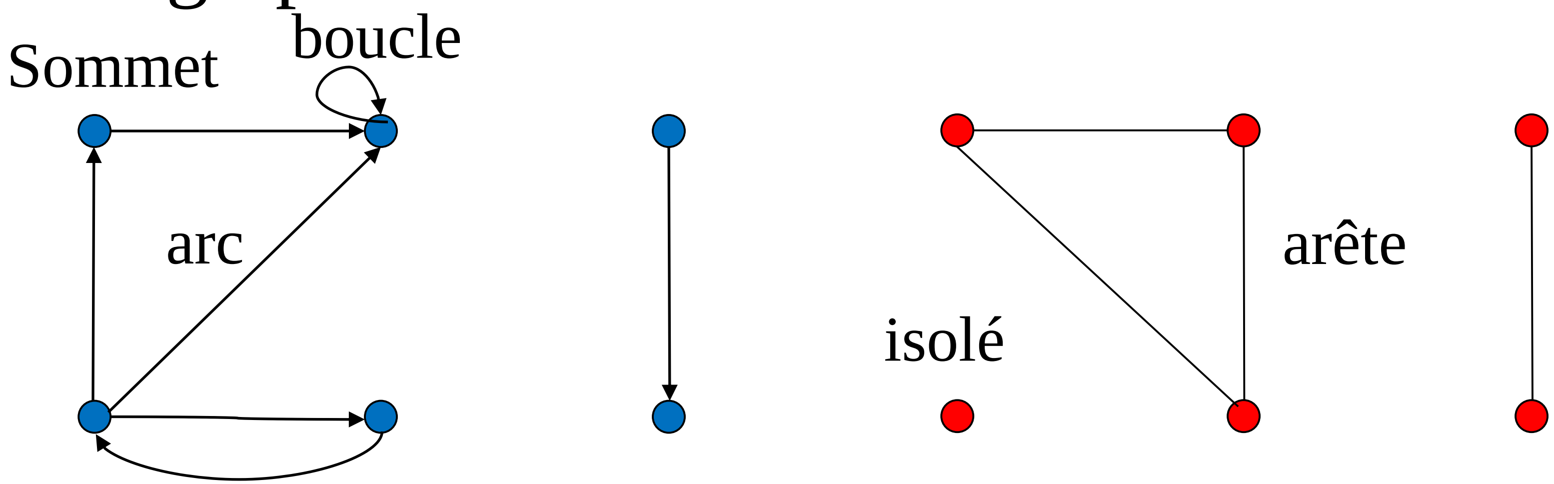
- $i \in S$?
- $(i, j) \in A$?

- Successeurs $V^+(i)$, prédécesseurs $V^-(i)$ pour $i \in S$
- Voisins $V(i)$ pour $i \in S$
- Demi-degrés $d^-(i), d^+(i)$ pour $i \in S$
- Degrés $d(i)$ pour $i \in S$

- $j \in V^-(i)$?
- $j \in V^+(i)$?
- $j \in V(i)$?

Représentation Sagittale

- Un graphe est un ensemble de sommets reliés



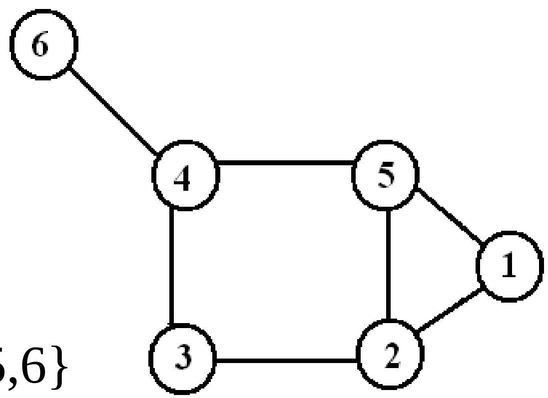
- Sommet i : Dessiner par un point, cercle, carré, nœud, forme, …
- Arc (i, j) : Dessiné par une flèche de i vers j
- Arête $[i, j]$: Dessiné par une ligne ou corde reliant i à j

Représentation Ensembliste

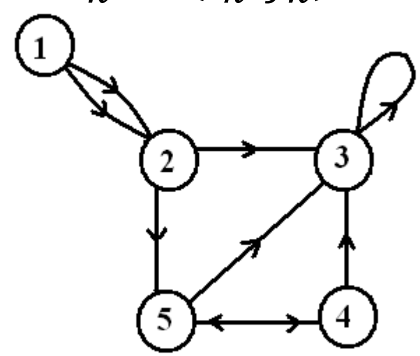
Un graphe $G = (S, A)$, est défini par

$S = \{1, \ldots, n\}$ un ensemble de n sommets

$A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un ensemble de m arcs / arêtes $a_k = (i_k, j_k)$



- S ={1,2,3,4,5,6}
- A ={(1,2),(1,5),(2,3),(2,5),(3,4),(4,5),(4,6)}



S ={1,2,3,4,5}

A = {(1, 2),(1, 2),(2, 3),(2, 5),(3, 3),(4, 3),(4, 5),(5, 3),(5, 4)}

Complexité Spatiale :$O(|S| + |A|) = O(n + m)$

Représentation compacte

Représentation Matricielle

- Matrice d'Incidence
  - Sommet / Arc
  - Sommet / Arête

- Matrice d'Adjacence
  - Sommet / Sommet

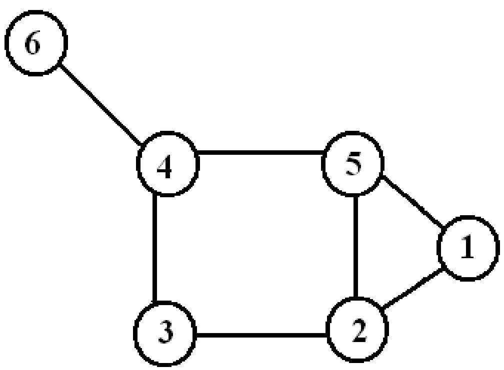
- Pour une arête $a = [i, j] \in A$, i et j sont ses extrémités
- Pour un arc $a = (i, j) \in A$, i est son extrémité initiale et j son extrémité terminale
- i et j sont dits adjacents si $(i, j) \in A$
- Deux arcs (ou arêtes) sont dits adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune
- Un arc (ou arête) est dit(e) incident(e) à ses extrémités

Matrice d'Incidence Sommet/Arêtes

Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est défini par la matrice binaire :

Pour $i \in S$ et $a \in A$

$$M[i,a] = \begin{cases} 1 & si\ i\ extrémité\ de\ a \\ 0 & sinon \end{cases}$$



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1,2 & 1,5 & 2,3 & 2,5 & 3,4 & 4,5 & 4,6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

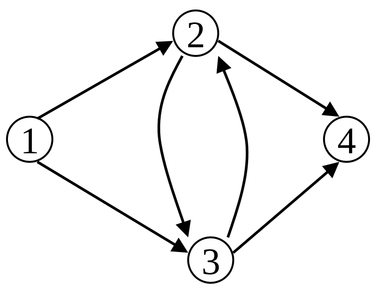
Complexité Spatiale : $O(|S| \times |A|) = O(nm)$

Matrice d'Incidence Sommet/Arc

Un graphe orienté $G = (S, A)$ est défini par la matrice :

Pour $i \in S$ et $a \in A$

$$M[i,a] = \begin{cases} 1 & Si\ i\ extrémité\ initale\ de\ a \\ -1 & Si\ i\ extrémité\ terminale\ de\ a \\ 0 & sinon \end{cases}$$



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 23 & 24 & 32 & 34 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Complexité Spatiale :

$O(|S| \times |A|) = O(nm)$

Représentation - Matrice d'Incidence

Peut également être utilisé pour représenter

- **Arête multiples** : en utilisant des colonnes avec des entrées identiques, puisque ces arêtes sont incidentes avec la même paire de sommets
- **Boucle** : en utilisant une colonne avec exactement une entrée égale à 1, correspondant au sommet incident avec la boucle

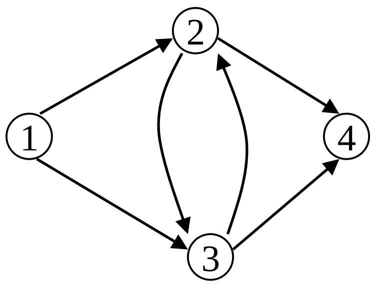
$$M[i,a] = \begin{cases} 1 & si\ i\ extrémité\ de\ a \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$M[i,a] = \begin{cases} -1 & Si\ i\ extrémité\ initale\ de\ a \\ 1 & Si\ i\ extrémité\ terminale\ de\ a \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Matrice d'Adjacence

Un graphe orienté $G = (S, A)$, pour $i, j \in S$

$$M[i,j] = \begin{cases} 1 & si\ (i,j) \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	0	0	0

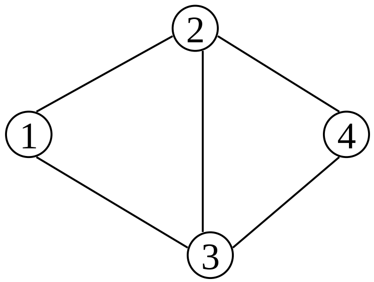
Complexité Spatiale :$O(|S| \times |S|) = O(n^2)$

Appelée Matrice d'Incidence Sommet/Sommet

Matrice d'Adjacence

Un graphe non orienté $G = (S, A)$, pour $i, j \in S$

$$M[i,j] = \begin{cases} 1 & si\ (i,j) \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	1	0

Complexité Spatiale :$O(|S| \times |S|) = O(n^2)$

Appelée Matrice d'Incidence Sommet/Sommet

Représentation - Matrice d’Adjacence

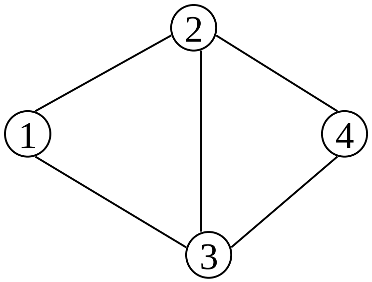
- L’adjacence est choisie sur l'ordre des n sommets. Par conséquent, il y en a autant que $n!$ matrices d’adjacence.
- La matrice d’adjacence représente un graphe orienté ou non
- La matrice d’adjacence d’un graphe non orienté est symétrique $M[i,j]$=$M[j,i]$
- **Arête multiples** : $M[i,j] = nombre\ d'arêtes\ de\ i$ à j
- **Boucle** : $M[i,i] = 1$
- Cela facilite la recherche de sous-graphe, l'inversion d’un graphe, etc …

Représentation- Liste d'Adjacence

Un graphe non orienté $G = (S, A)$, est défini par $G = (S, V)$ où

$$V(i) = \{j \in S: (i, j) \in A\}$$

est l'ensemble des voisins de $i \in S$



$i \in S$	$V(i)$
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

$V(i)$ est appelé Liste d'Adjacence

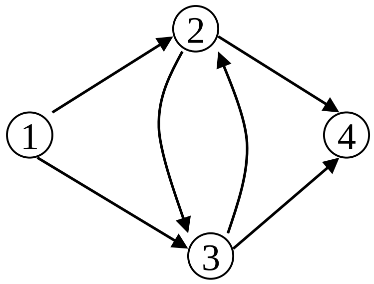
Complexité Spatiale :$O(m)$

Représentation- Liste d'Adjacence

Un graphe orienté $G = (S, A)$ est défini par $G = (S, V^+)$ où

$$V^+(i) = \{j \in S: (i, j) \in A\}$$

est l'ensemble des successeurs de $i \in S$



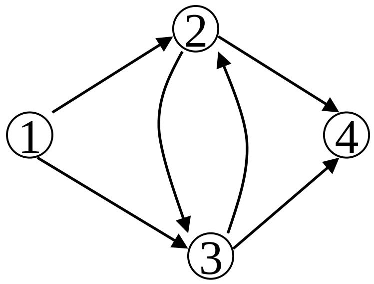
$i \in S$	$V^+(i)$
1	2, 3
2	3, 4
3	2, 4
4	$\varnothing$

Représentation- Liste d'Adjacence

Un graphe orienté $G = (S, A)$ est défini par $G = (S, V^-)$ où

$$V^-(i) = \{j \in S : (i, j) \in A\}$$

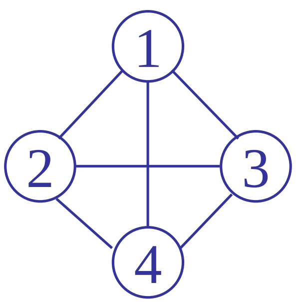
est l'ensemble des prédécesseurs de $i \in S$



$i \in S$	$V^-(i)$
1	$\emptyset$
2	1, 3
3	1, 2
4	2, 3

Liste d'adjacence à ordre alterné

L'ordre n'a aucune importance



$i \in S$	$V(i)$		
1	4	2	3 NUL
2	3	1	4 NUL
2	4	1	2 NUL
4	3	2	1 NUL

Opérations intéressantes

Opération	Matrice d'Adj	Liste d'Adj
$i \in S?$	$O(n)$	$O(n)$
$(i, j) \in A?$	$O(1)$	$O(d(i))$
$j \in V^-(i)$	$O(1)$	$O(d^-(i))$
$j \in V^+(i)?$	$O(1)$	$O(d^+(i))$
$j \in V(i)?$	$O(1)$	$O(d(i))$
Insérer un sommet $i \notin S$	$O(n)$	$O(1)$
Insérer un arc / arête $(i, j) \notin A$	$O(1)$	$O(d(i))$
Supprimer le sommet $i \in S$	$O(n)$	$O(d(i))$
Supprimer l'arc / arête $(i, j) \in A$	$O(1)$	$O(d(i))$
$V^+(i)$, $V^-(i)$, $d^-(i), d^+(i)$ pour $i \in S$	$O(n)$	$O(d^-(i))/O(d^+(i))$
$V(i)$, $d(i)$ pour $i \in S$	$O(n)$	$O(d(i))$

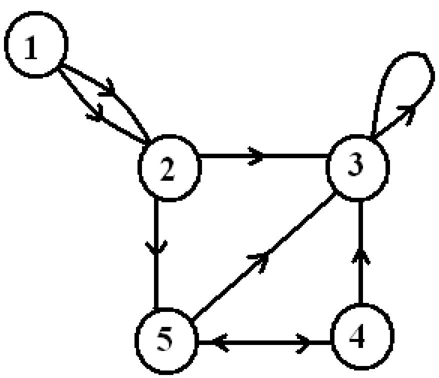
Listes d'Adjacence pour Structures de Données

Chaque ligne / colonne de la matrice d'adjacence est représentée comme une liste d'adjacence

```
#define MAX_VERTICES 50
typedef struct node *node_pointer;
typedef struct node {
    int vertex;
    struct node *link;
};
node_pointer graph[MAX_VERTICES];
int n=0; /* vertices currently in use */
```

Listes d’arêtes et de sommets

- Liste d’Arêtes / Arcs : couples (paires) de sommets
- Liste d’Adjacence : liste de sommets



Liste d’arêtes	Liste de sommets
1 2	1 2 2
1 2	2 3 5
2 3	3 3
2 5	4 3 5
3 3	5 3 4
4 3	
4 5	
5 3	
5 4	

Utile pour le transfert de graphe en fichier