



Graphes & Algorithmes

Volume (H)

CM : 9

TD : 12

TP : 9

Intervenants

Saïd Hanafi

Raca Todosijevic

Christophe Wilbaut

Evaluation du Module

Note de TP

Seul(e) ou en binôme

Note d'examen

Sans document

Saïd.Hanafi@uphf.fr



Graphes & Algorithmes

- ✓ Introduction & Applications
- ✓ Définitions & Terminologie
- ✓ Opérations & Représentations
- ✓ Parcours en Largeur & Profondeur
- ✓ Acyclique & Tri Topologique
- ✓ Connexité & Forte Connexité
- ✓ Arbres Couvrants



Graphes & Algorithmes

Introduction & Applications

Saïd.Hanafi@uphf.fr



Plan

- C'est quoi un Graphe / Réseau ?
- Applications
- Bref historique
- Modélisations



Théorie des Graphes ?

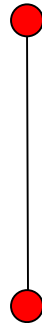
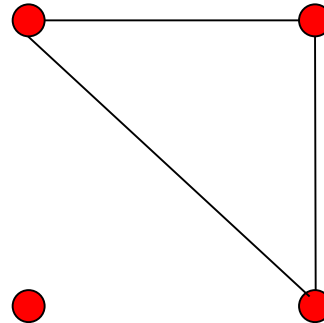
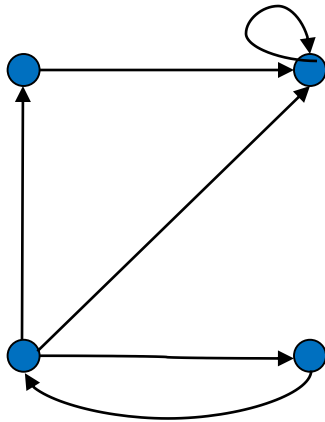
La **théorie des graphes** est la discipline **mathématique** et **informatique** qui étudie les *graphes*

Connexion avec les domaines :

- ✓ Recherche Opérationnelle
- ✓ Intelligence Artificielle
- ✓ Automatique
- ✓ Linguistique
- ✓ Etc

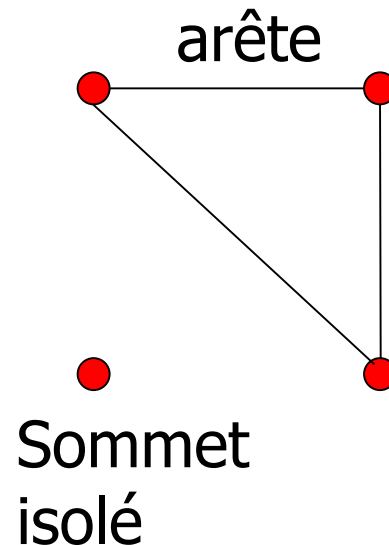
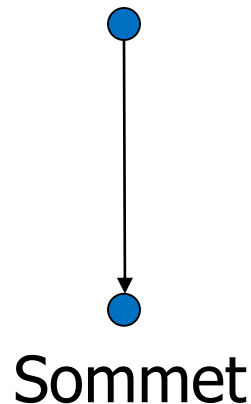
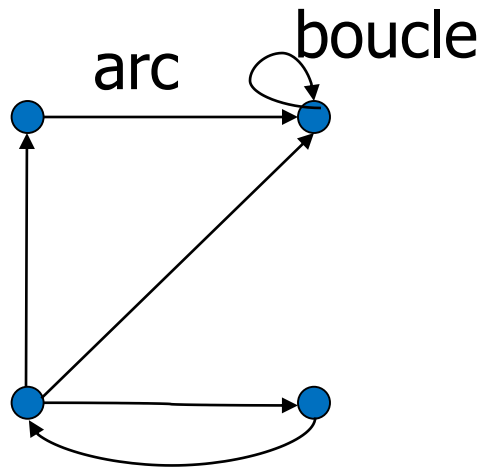
C'est quoi un Graphe ?

- De manière informelle, un graphe est un ensemble de points reliés par un ensemble de lignes ou de flèches



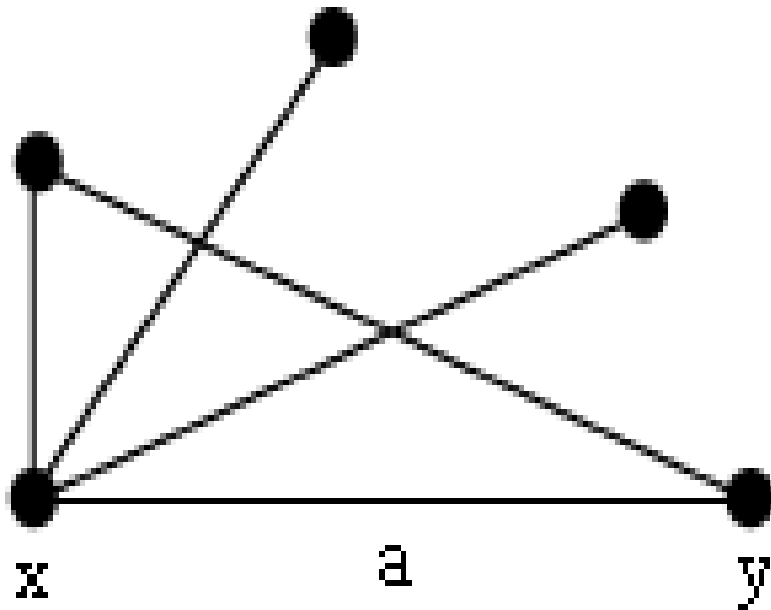
C'est quoi un Graphe ?

- De manière informelle, un graphe est un ensemble de points reliés par un ensemble de lignes ou de flèches



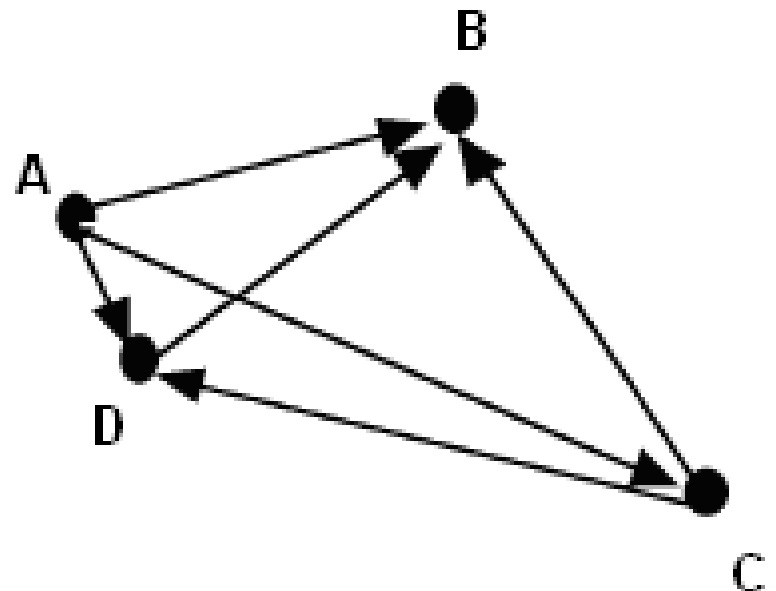
Graphe : orienté ou non

■ Graphe non orienté



Un ensemble de sommets
Un ensemble d'arêtes

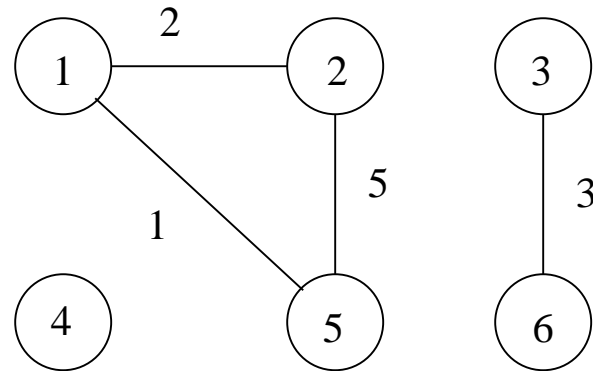
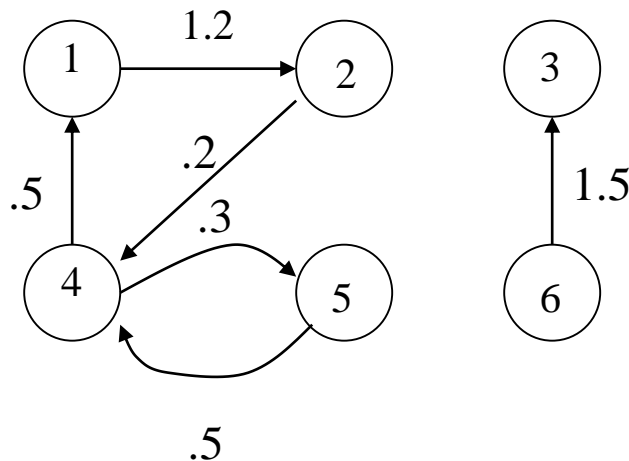
■ Graphe orienté



Un ensemble de sommets
Un ensemble d'arcs

C'est quoi un Réseau ?

- Un réseau = un graphe + Informations
- Un réseau est un graphe pondéré:
 - Chaque élément $e \in S \cup A$ a des attributs dans E





Bref historique...

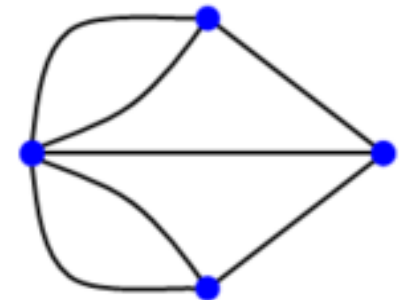
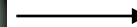
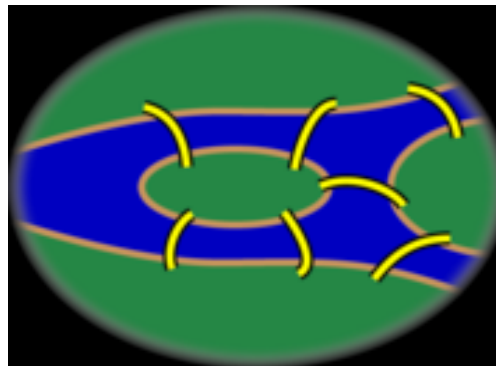
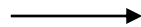
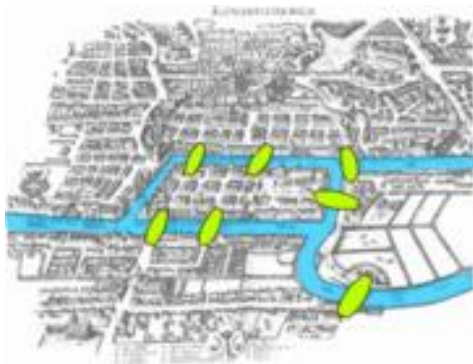
- 1736, Euler : les ponts de Königsberg
... *récréations mathématiques* ...
... *chimie, électricité* ...
- 1852, De Morgan (Guthrie) : quatre couleurs
- 1946, Kuhn, Ford et Fulkerson, Roy, etc.
... *recherche opérationnelle* ...
- Depuis 1960, applications... (informatique)

Théorie des Graphes - Histoire

Article de Leonhard Euler sur les
“*7 Ponts de Königsberg*”, 1736



1707 - 1783

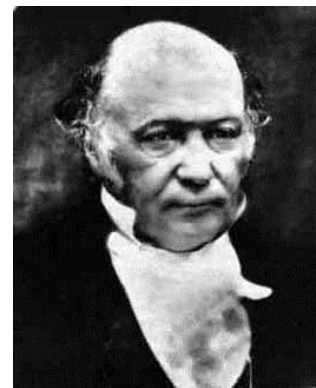


Théorie des Graphes - Histoire

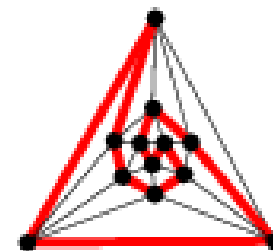
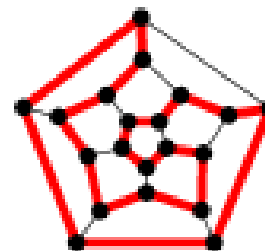
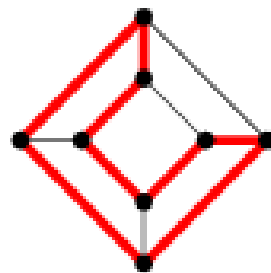
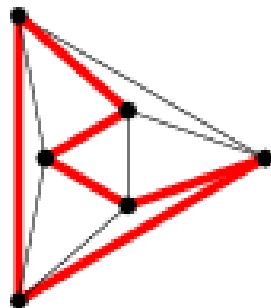
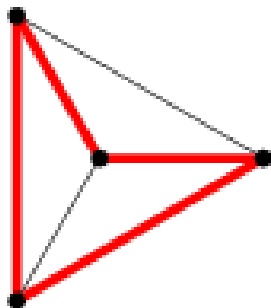
Cycles dans un Polyhédre



Thomas P. Kirkman
1806 – 1895



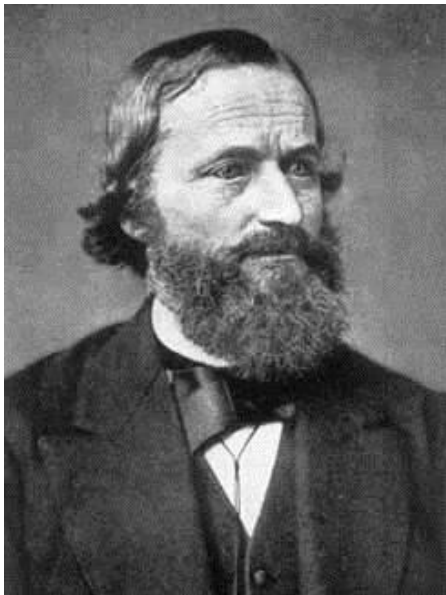
William R. Hamilton
1805 - 1865



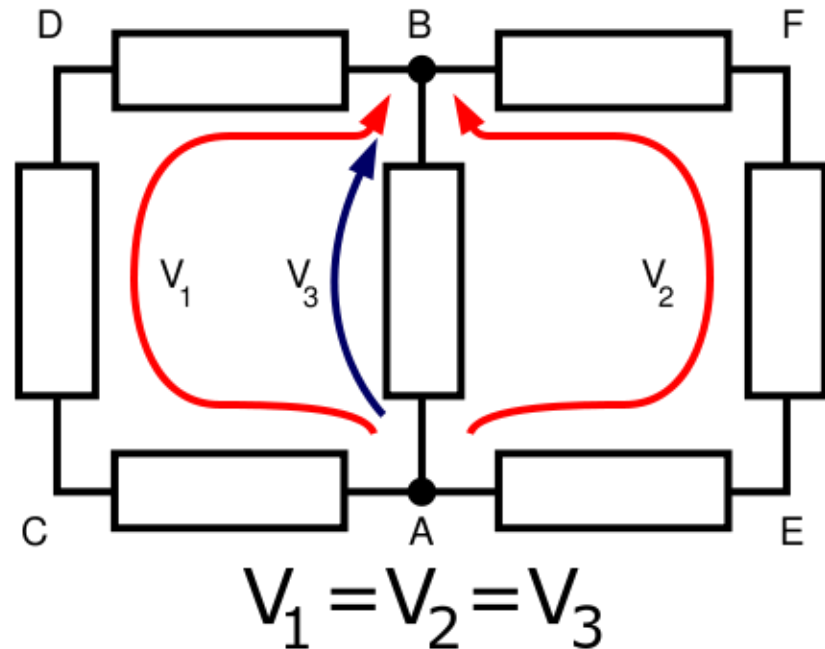
Cycles Hamiltoniens dans les graphes platoniques 12

Théorie des Graphes - Histoire

Arbres dans les Circuits Electriques

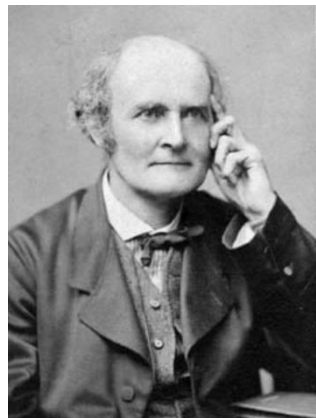


Gustav Kirchhoff
1824 – 1887

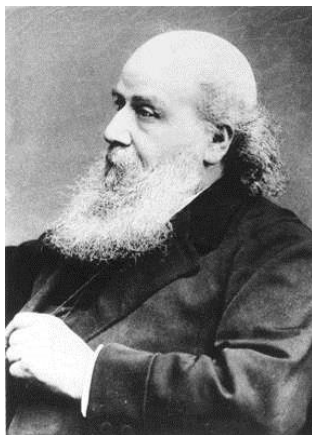


Théorie des Graphes- Histoire

Enumération des Isomères Chimiques



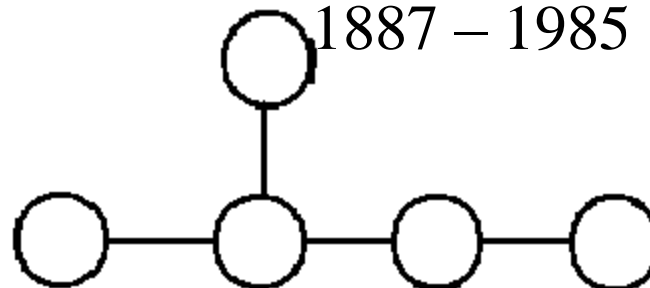
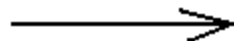
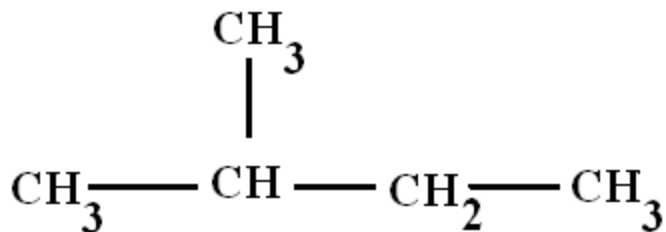
Arthur Cayley
1821 – 1895



James J. Sylvester
1814 – 1897



George Polya
1887 – 1985



Théorie des Graphes - Histoire

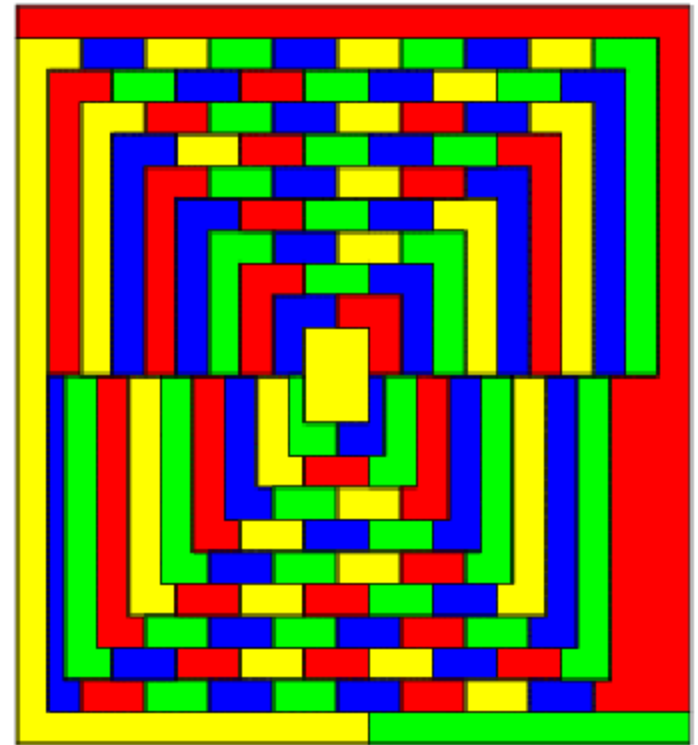
4 Couleurs d'une Carte



Francis Guthrie
1831 - 1899



Auguste DeMorgan
1806 – 1871





Quelques Applications

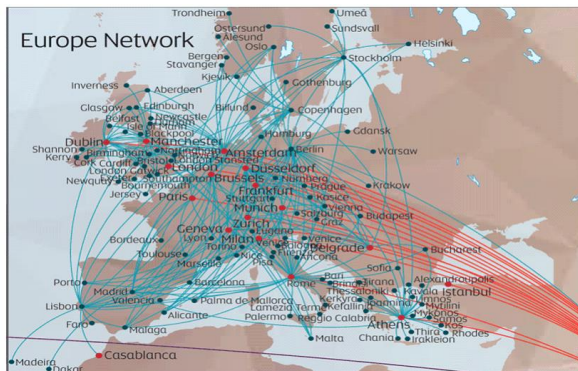
- Chimie
- Sociologie
- Bio-informatique
- Réseaux de communication
- Fonctionnement de systèmes
- Géographie, architecture, linguistique, etc.
- Les réseaux optiques
- Bases de données (dépendances)
- Bases de connaissances
- Techniques de compilation
- Imagerie numérique
- Le WEB (graphe des liens, calcul de pertinence dans les moteurs de recherche, etc.)
- Etc.

Réseau de Transport

Métro



Aérien



Routier

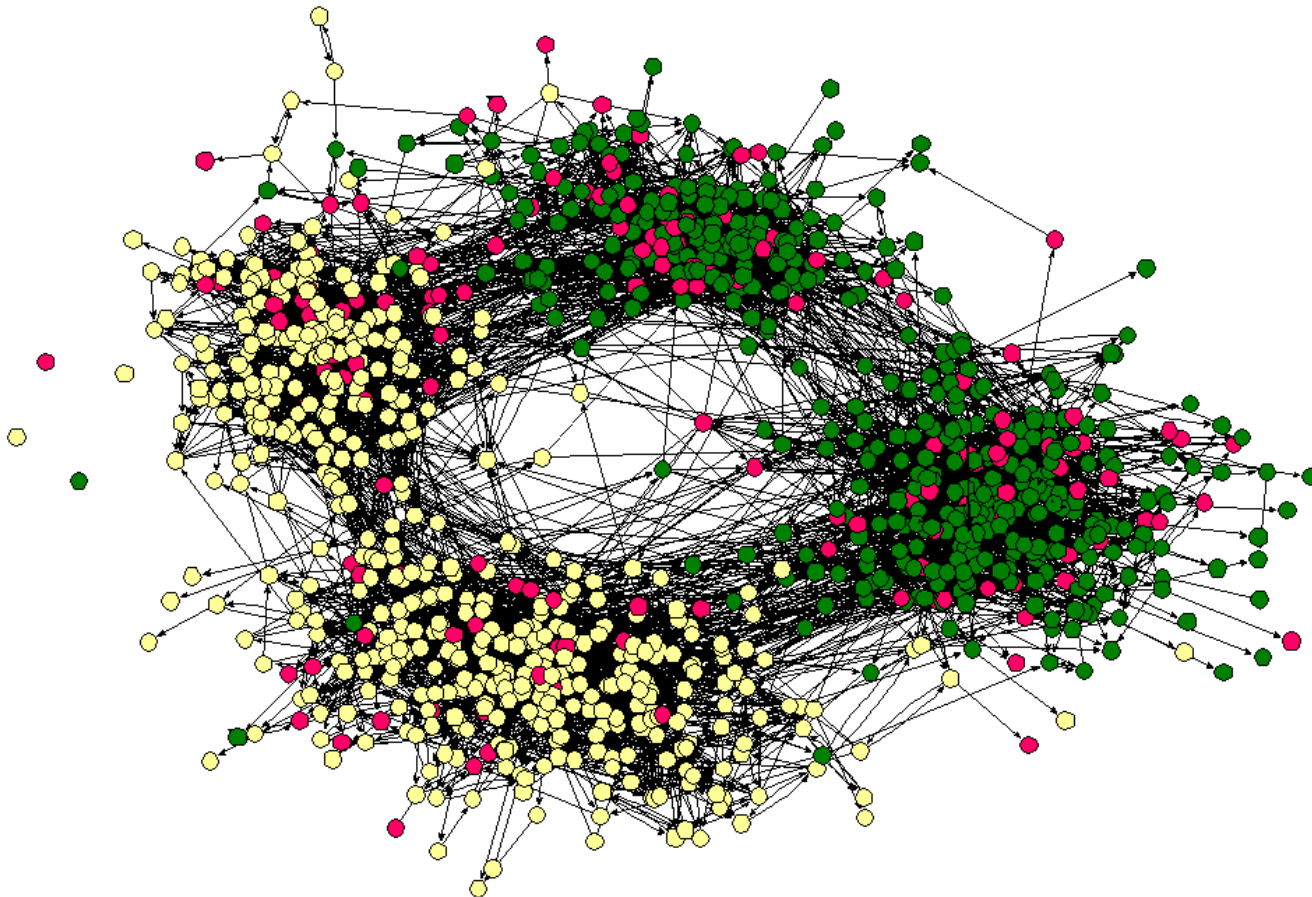


Vélo

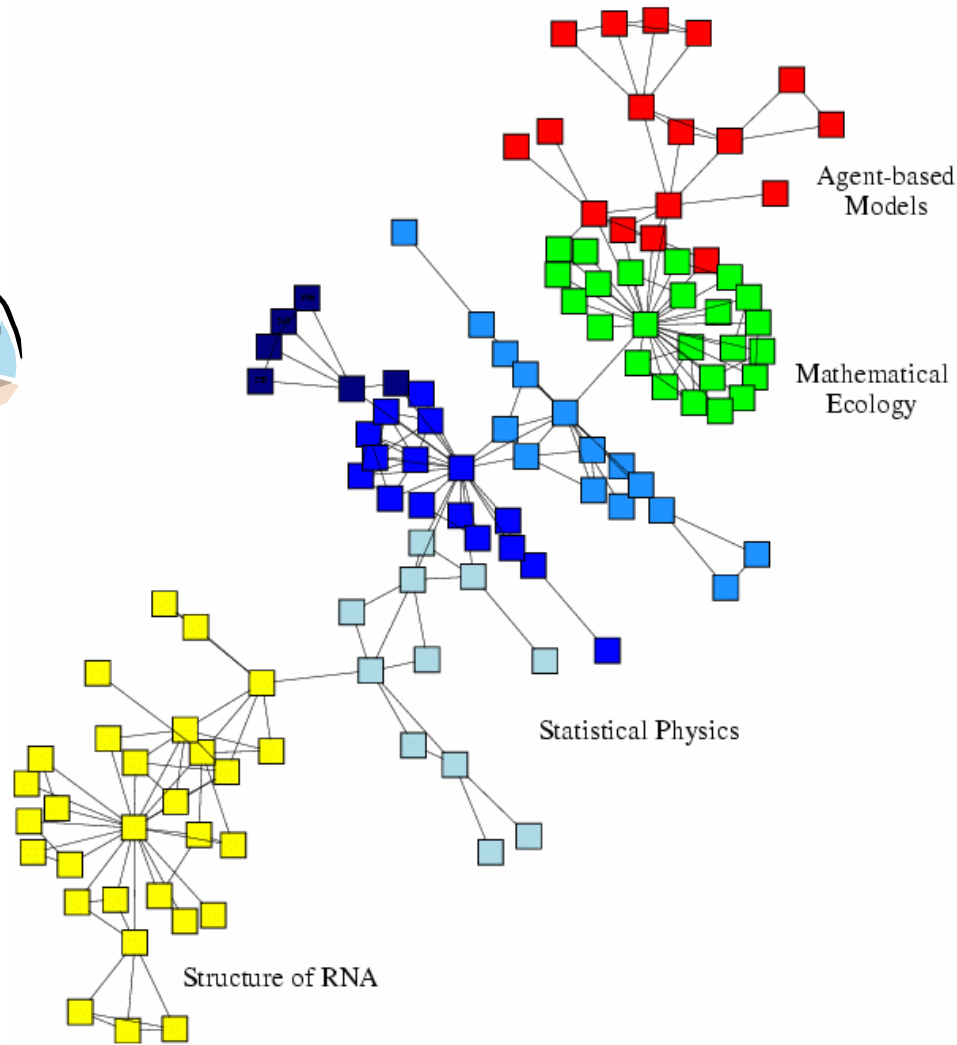




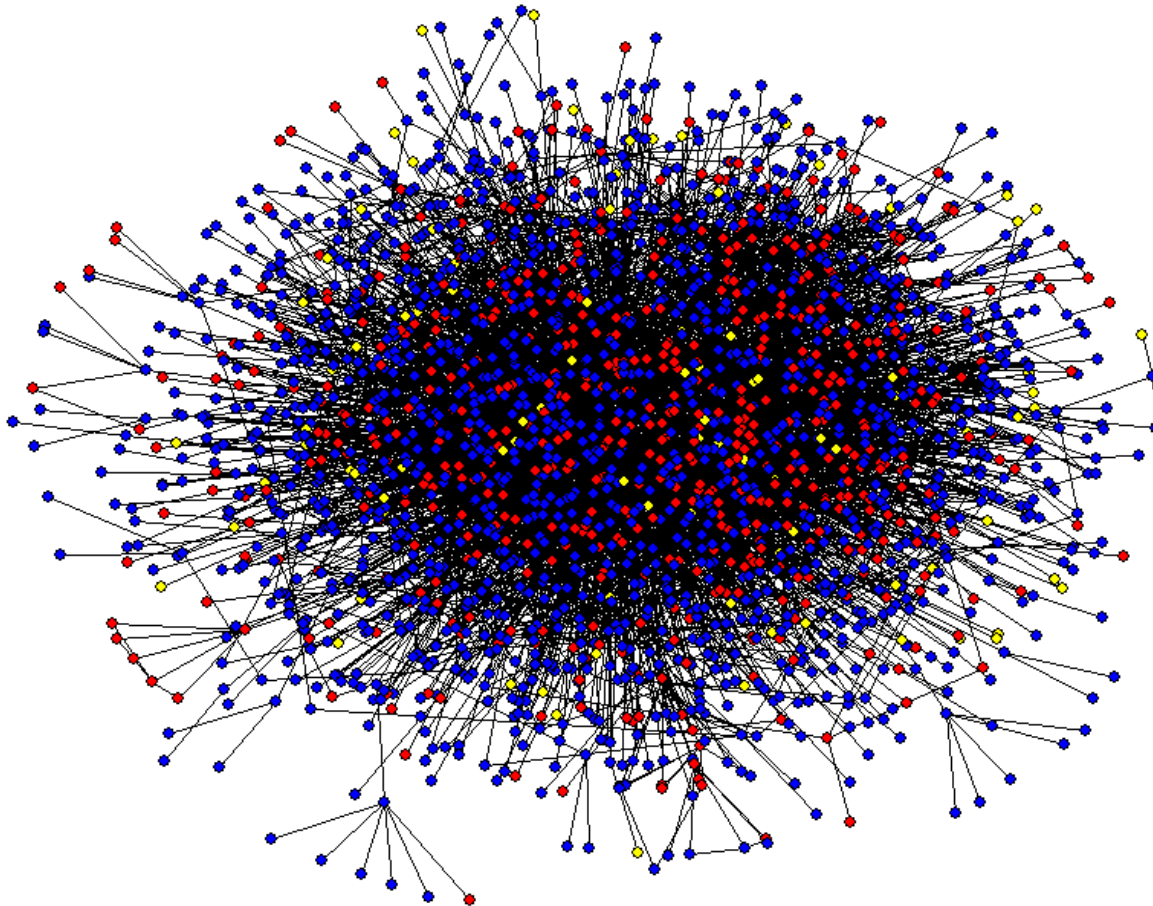
Réseau d'amitié



Réseau de collaboration scientifique

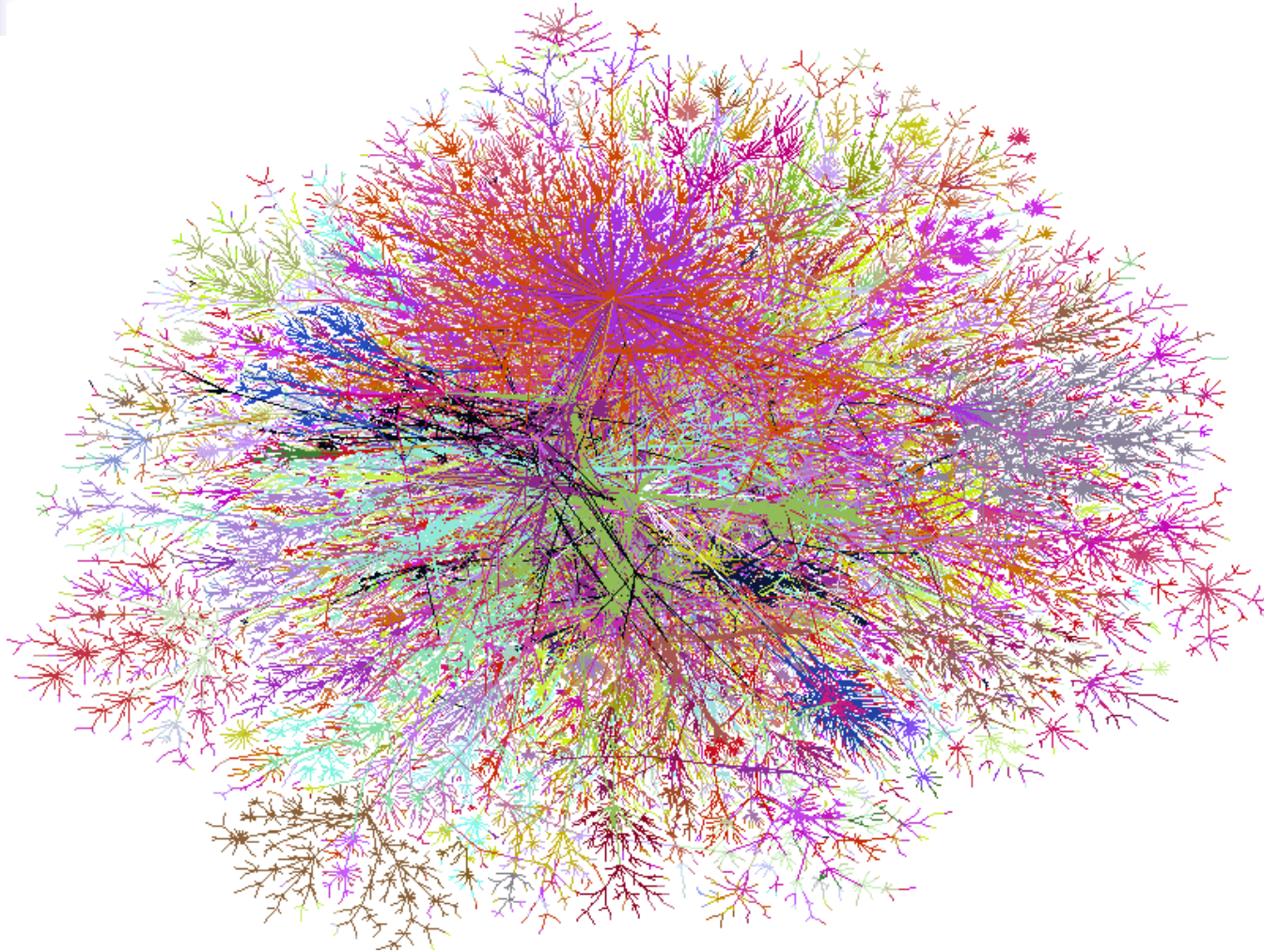


Réseaux d'interactions entre protéines

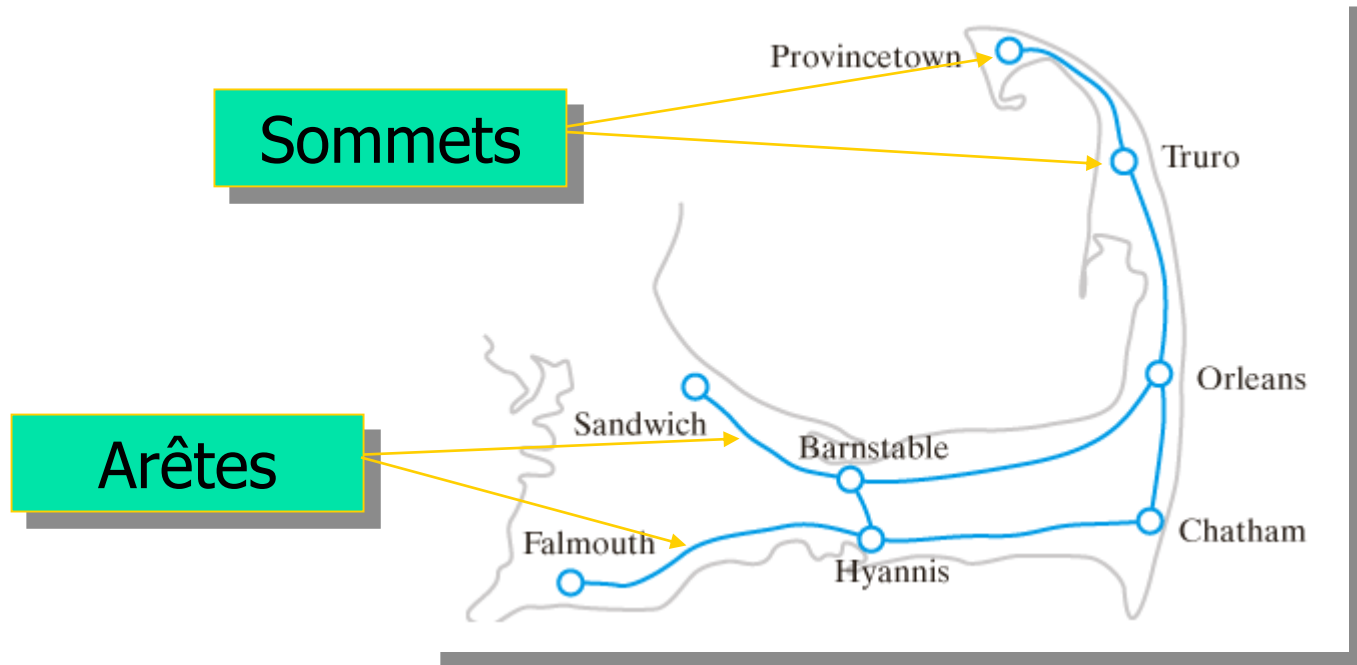




Internet

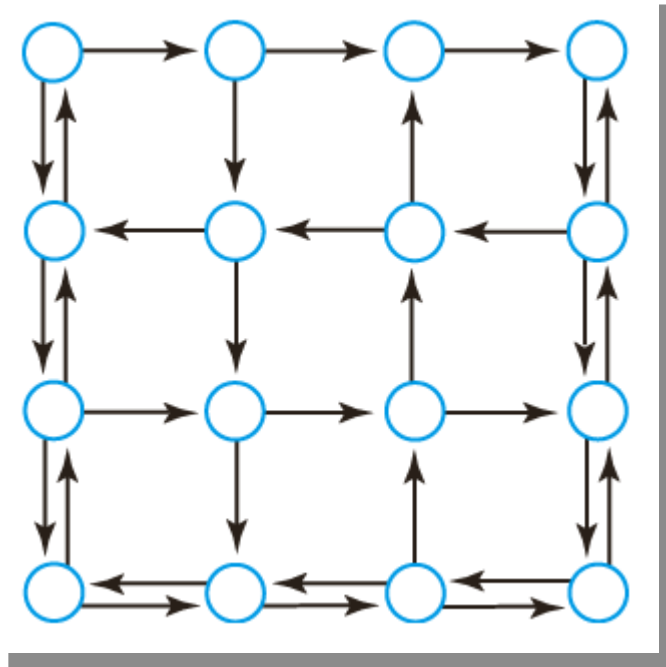


Cartes routières



Une portion de carte routière

Carte de rue



Un graphe orienté

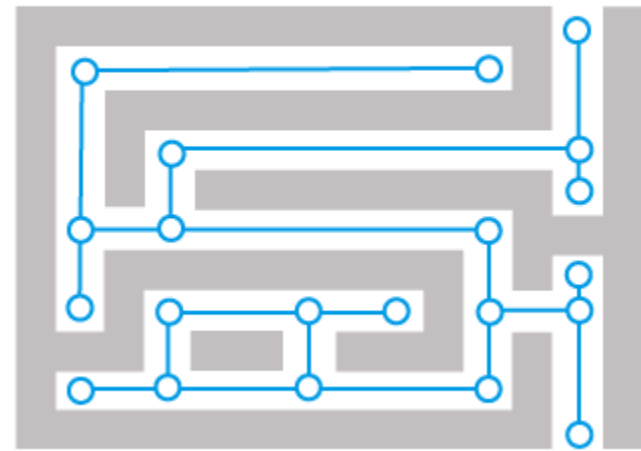


Labyrinthe

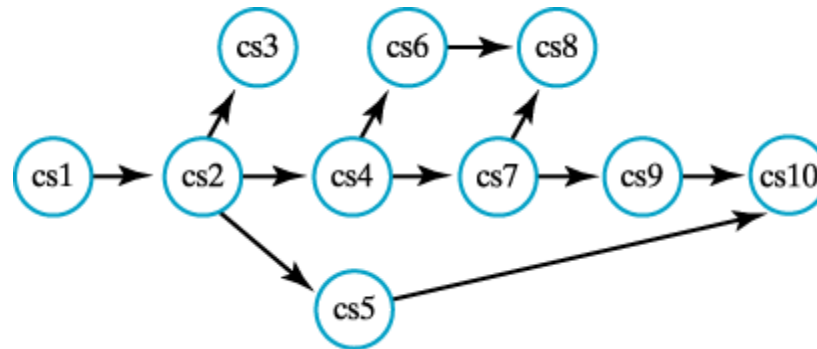
(a) Labyrinthe



(b) Graphe



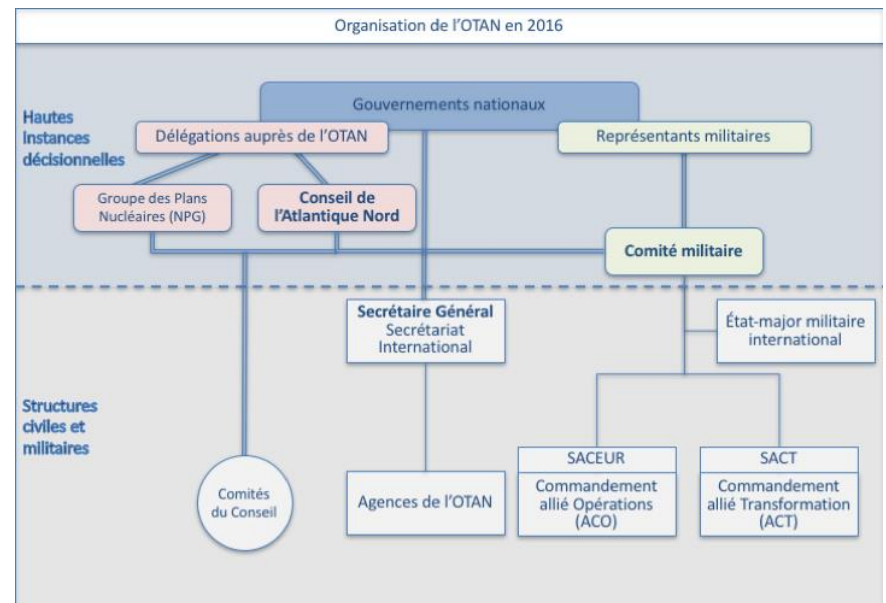
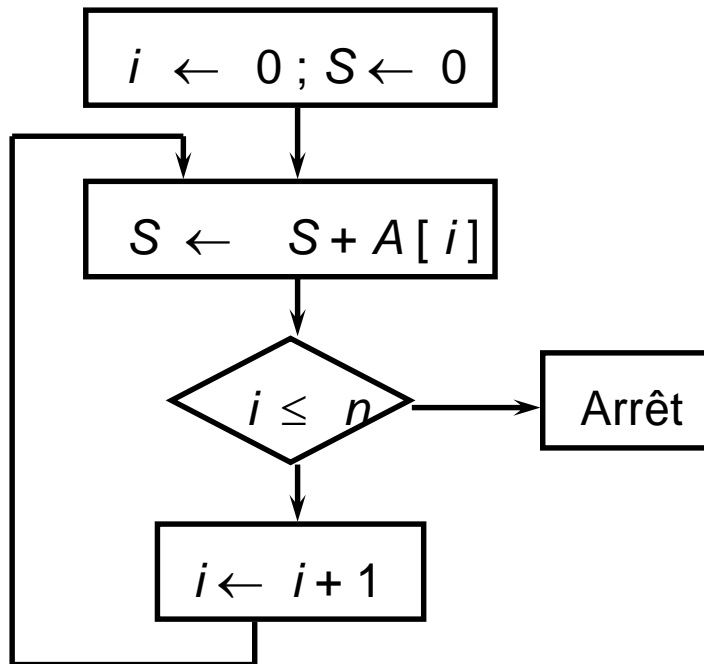
Prérequis de cours



Graphe orienté sans circuit

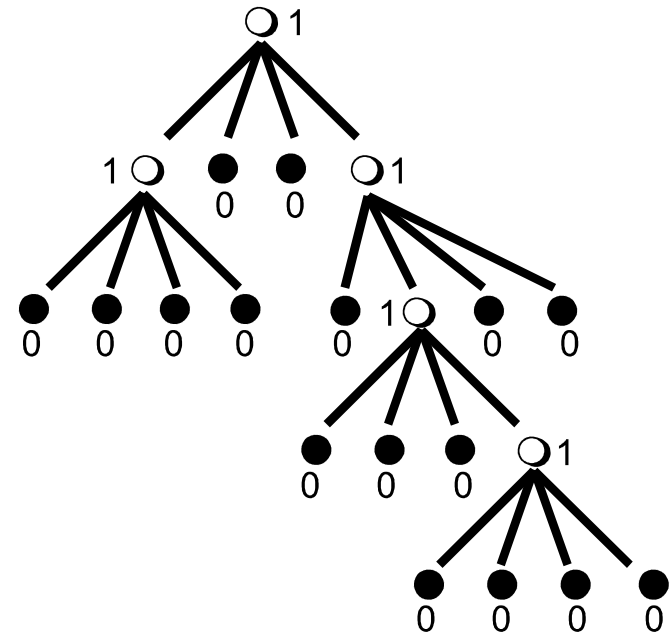
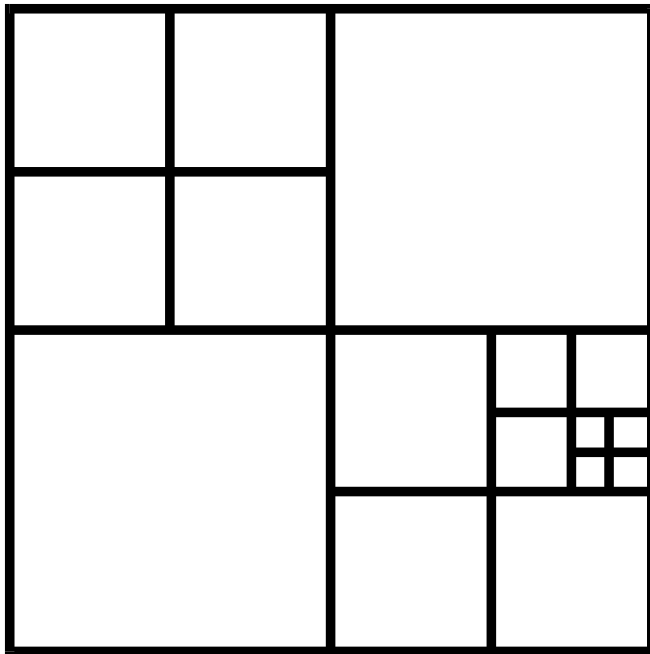
Graphe Acyclique

Organigramme



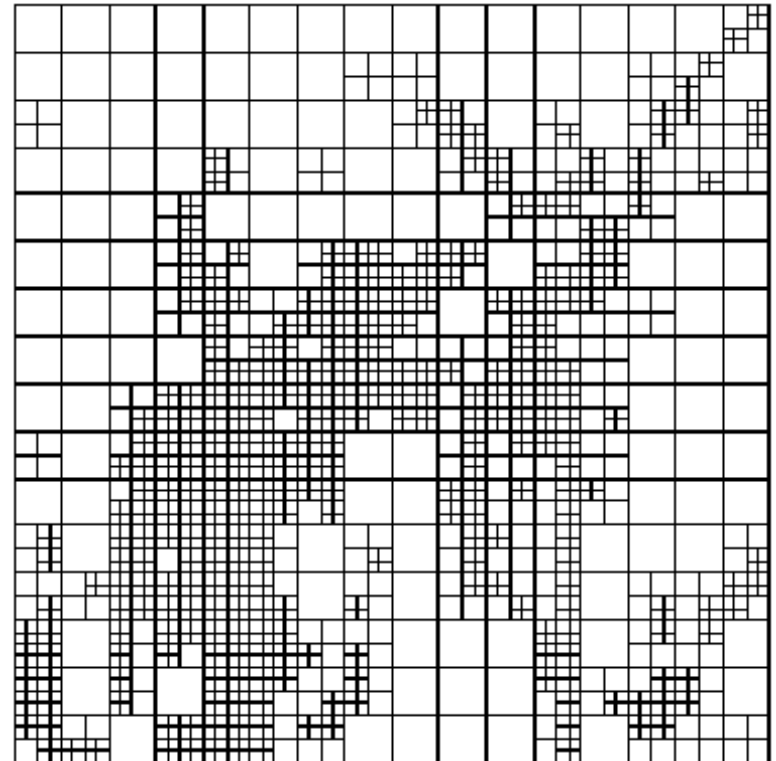
Compression d'images : Quadrees

Découpage récursif en carrés homogènes
Codage d'une image par un arbre

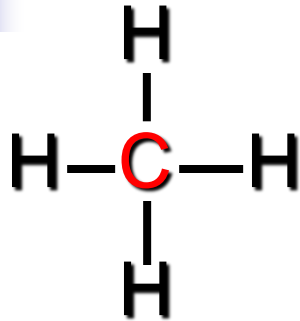


Compression d'images : Quadrees

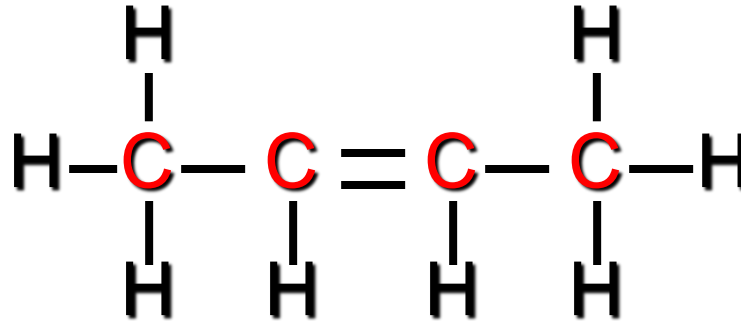
Découpage récursif en carrés homogènes
Codage d'une image par un arbre



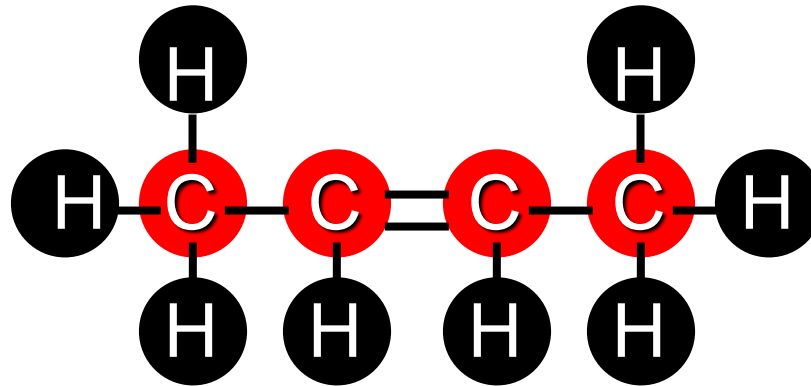
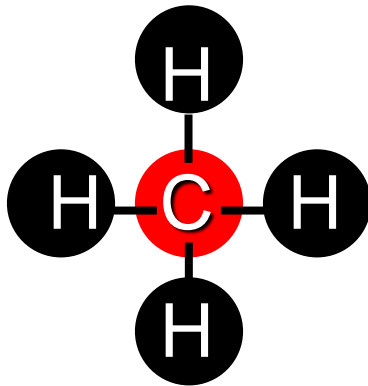
Modélisation de molécules



méthane CH₄

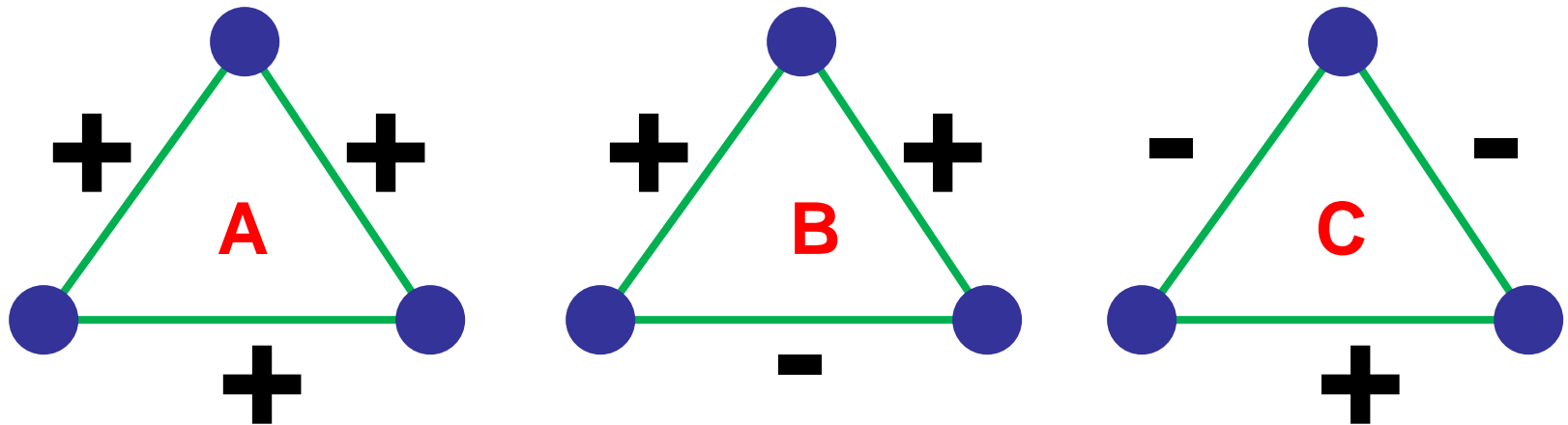


butène C₄H₈



Graphes (multigraphes) avec contraintes sur les degrés des sommets selon le type de sommet...

Graphes signés (sociogrammes)



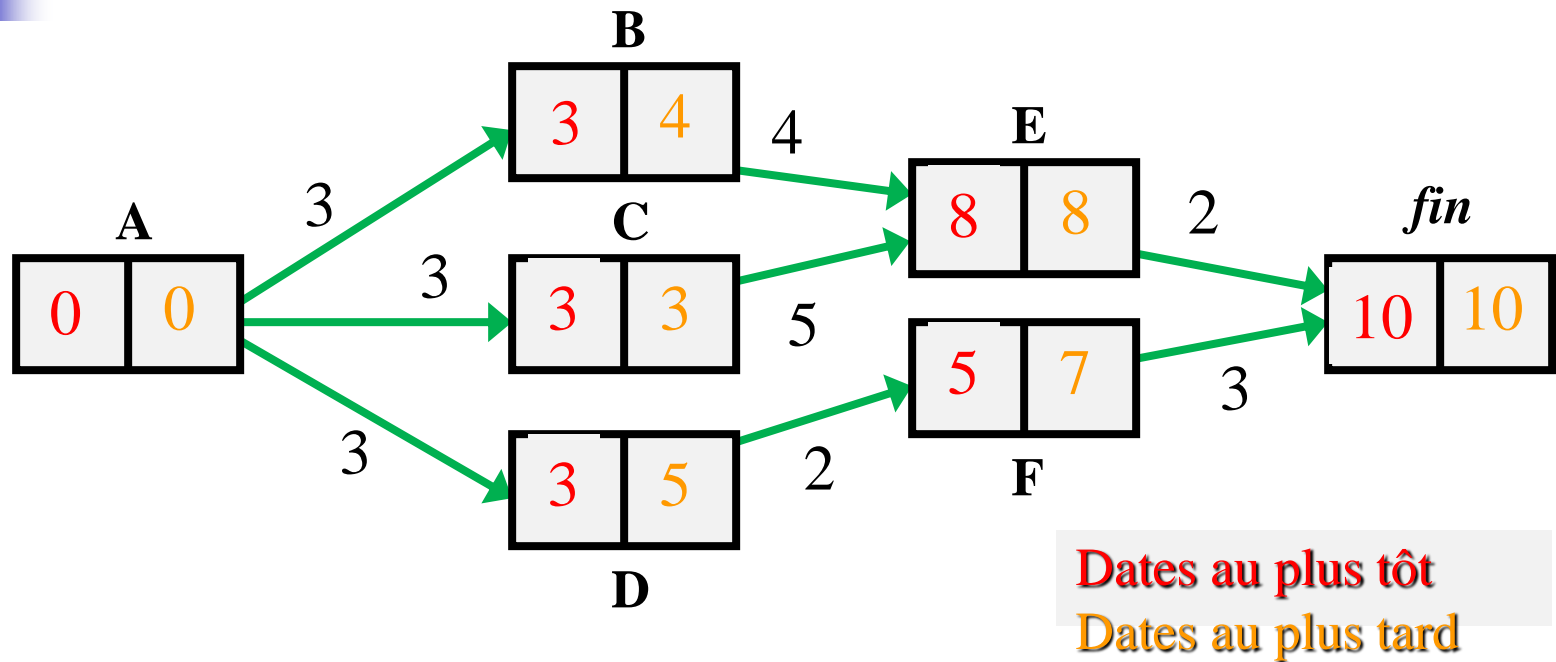
Relation aimer / détester entre employés...

Configurations équilibrées (A, B) ou non (C)

Notions de « clans » (employés, nations, politiciens, etc.)

Algorithmes de Découpage, Classification, ...

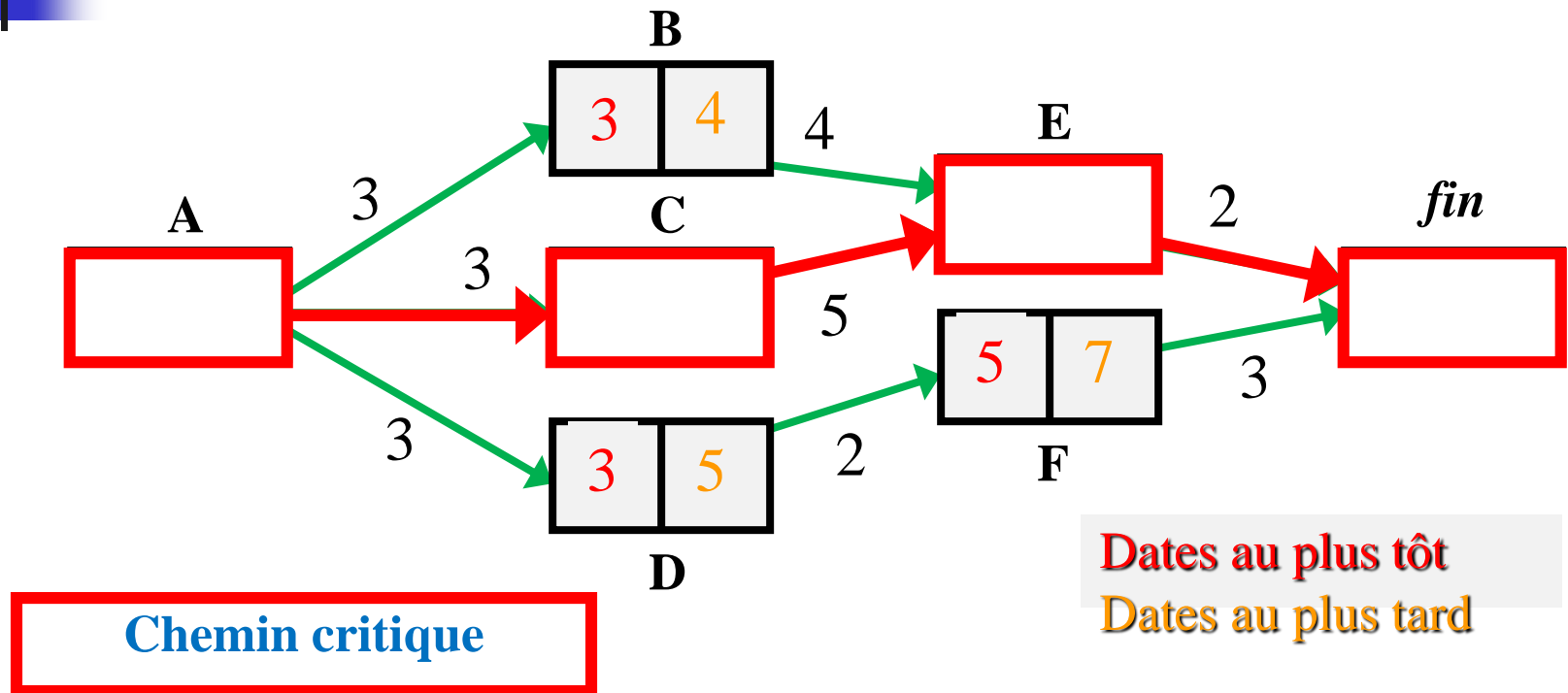
Problèmes d'ordonnancement



Sommets = tâches à réaliser

Arcs = relation d'antériorité (pondération : durée de la tâche initiale)

Problèmes d'ordonnancement



Sommets = tâches à réaliser

Arcs = relation d'antériorité (pondération : durée de la tâche initiale)

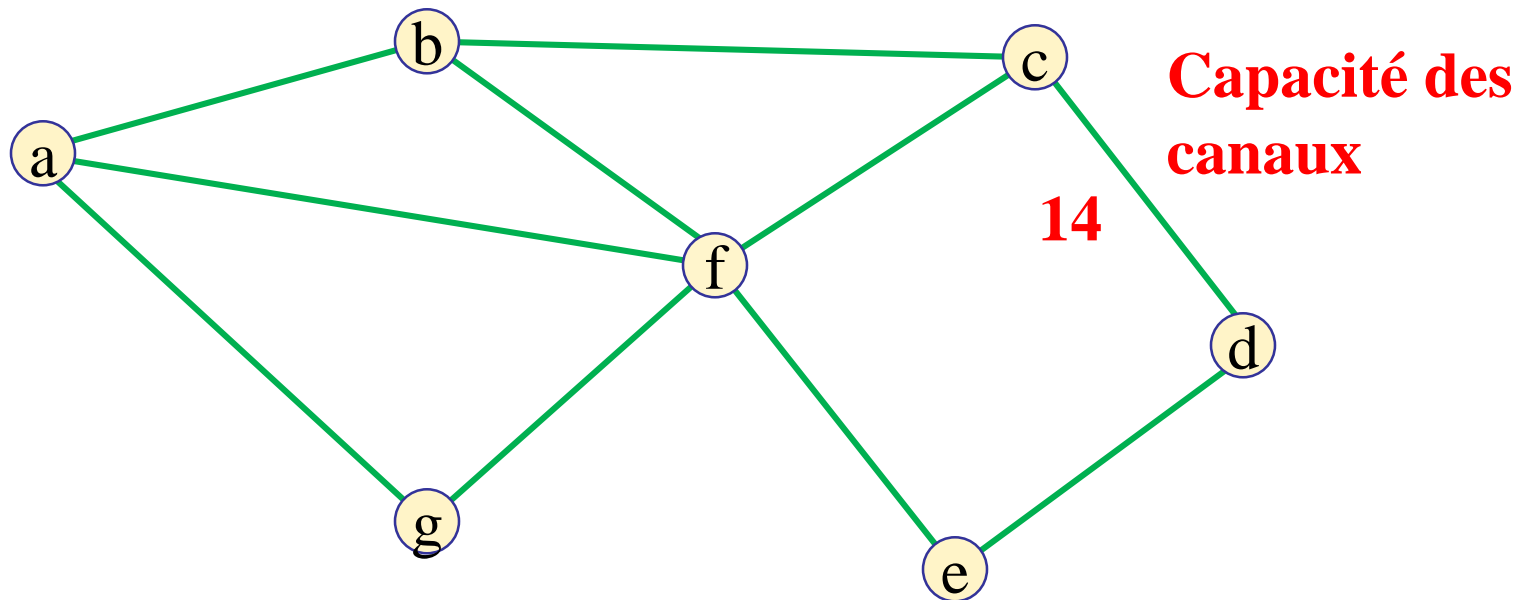
Modélisation d'un réseau

utilisateurs, machines, etc.

-----> **sommets**

canaux de communication

-----> **arcs, arêtes**



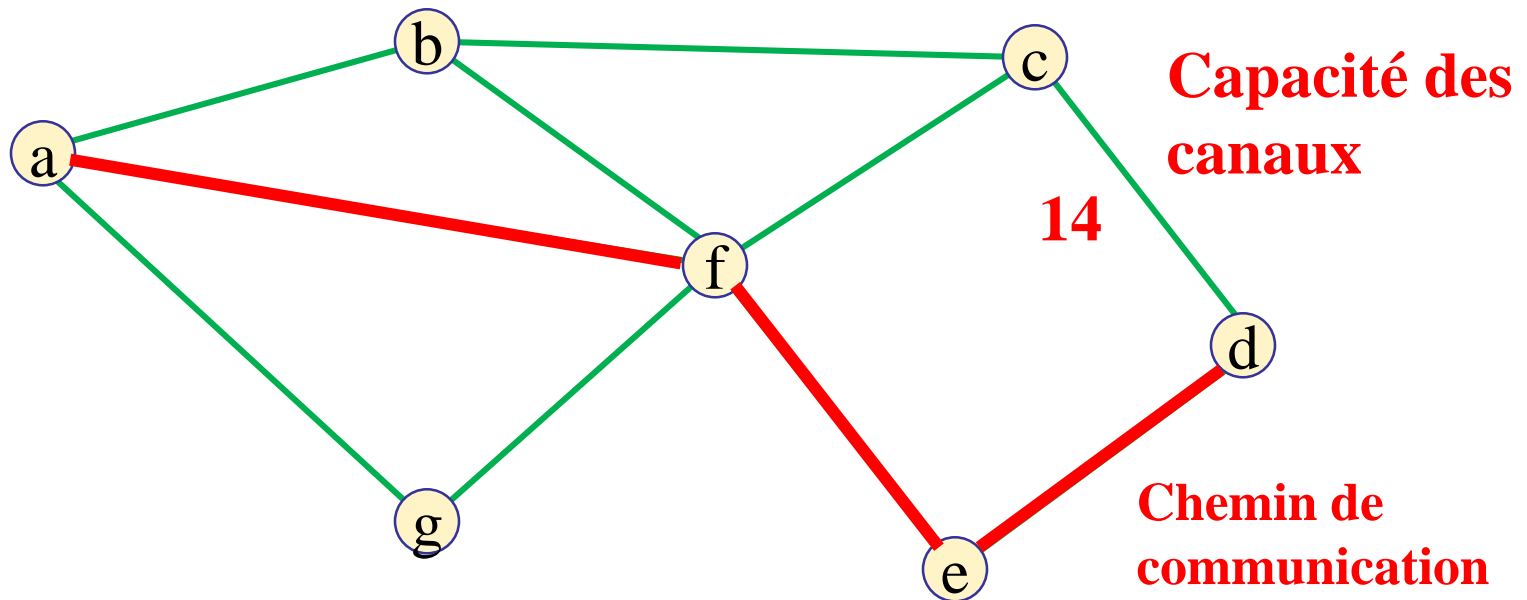
Modélisation d'un réseau

utilisateurs, machines, etc.

-----> sommets

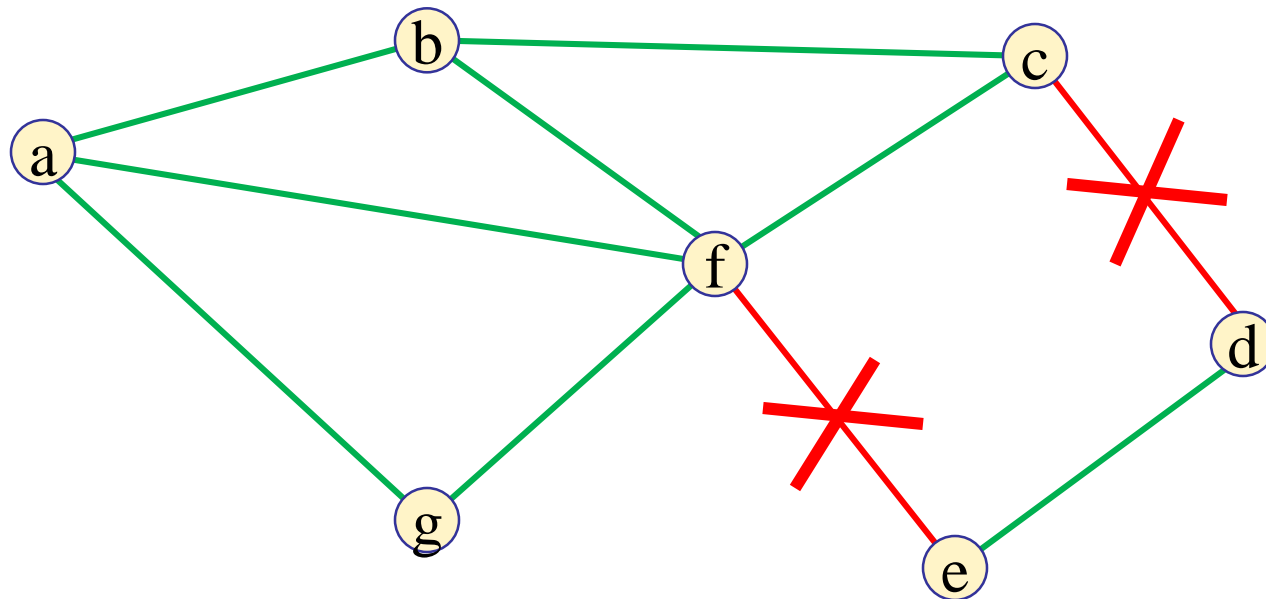
canaux de communication

-----> arcs, arêtes



Fiabilité du réseau

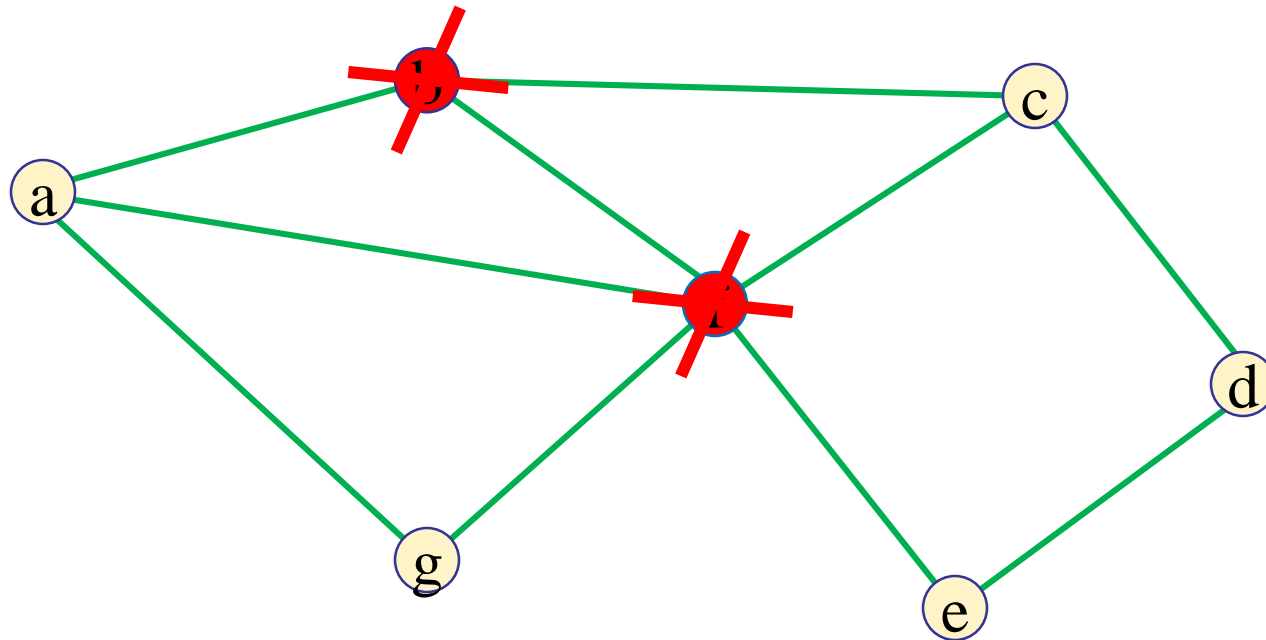
panne des canaux de communication



ensemble d'arêtes déconnectant le graphe

Fiabilité du réseau

panne des « sommets relais »



ensemble de sommets déconnectant le graphe

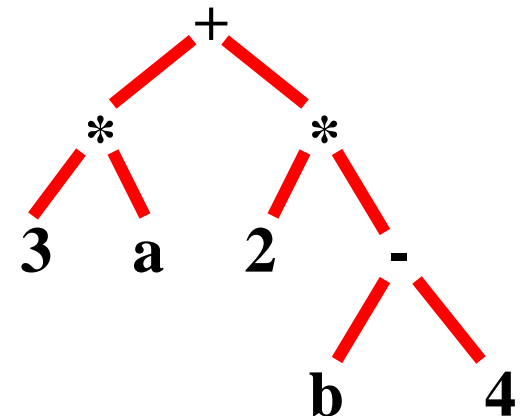
Techniques de compilation

Représentation d'un programme par un arbre

expression
arithmétique

$3 * a + 2 * (b - 4)$

codage par un
arbre



Techniques de compilation

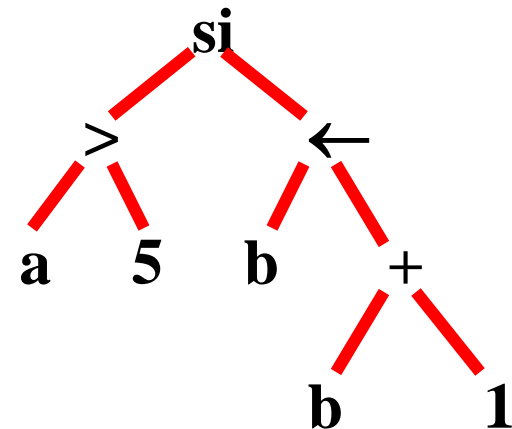
Représentation d'un programme par un arbre

instruction

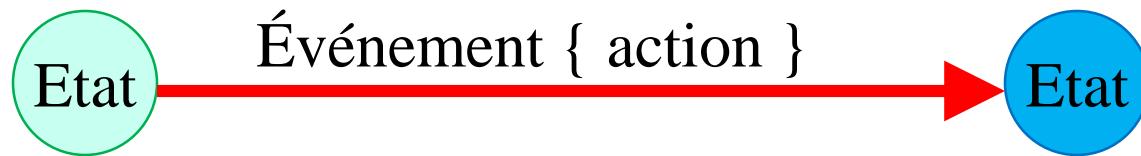
si (a > 5)
alors b ← b + 1

Programme \Rightarrow **graphe**
(*sous-arbres communs*)

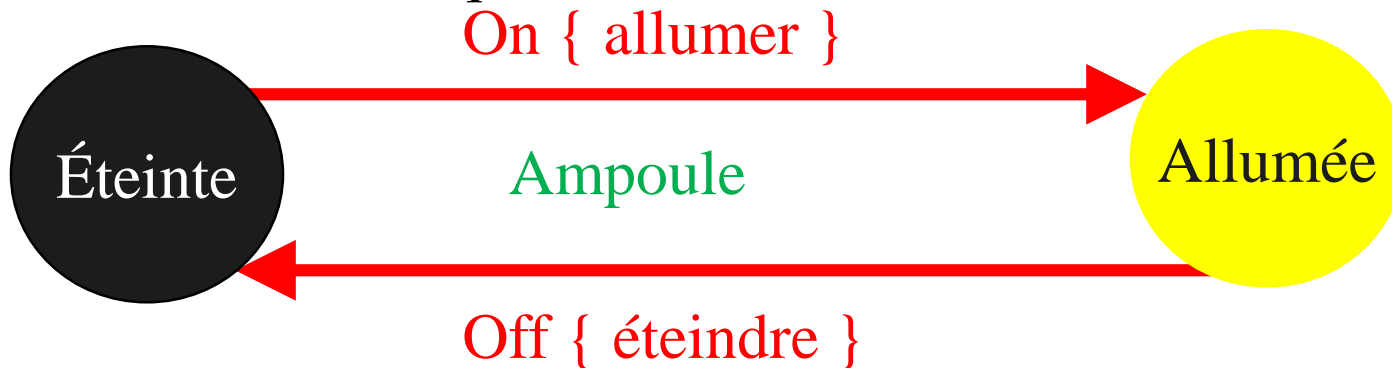
codage par un
arbre



Modélisation par un automate



Les événements déclenchent des actions (réactions) du système selon l'état dans lequel celui-ci se trouve...



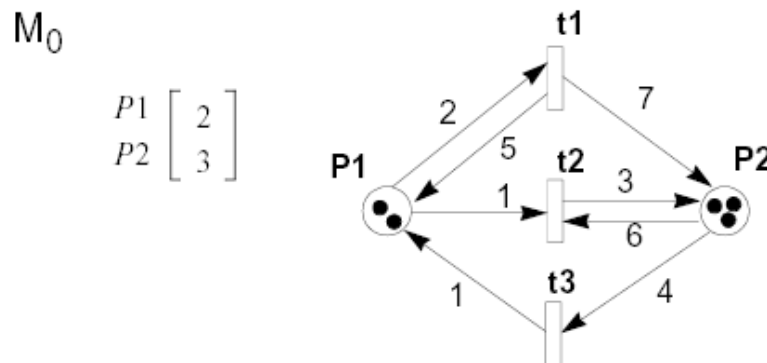
Automate déterministe : pour chaque état, au plus une transition par événement...

Réseaux de Petri

Carl Adam Petri (1962)

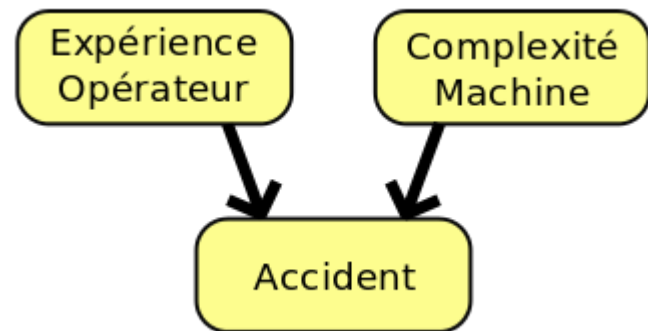
- Un ensemble d'automates à états finis qui communiquent
- Avoir à la fois la représentation des automates et celle des communications par les mêmes primitives

Graphes avec 2 types de sommets « places » et « transitions »

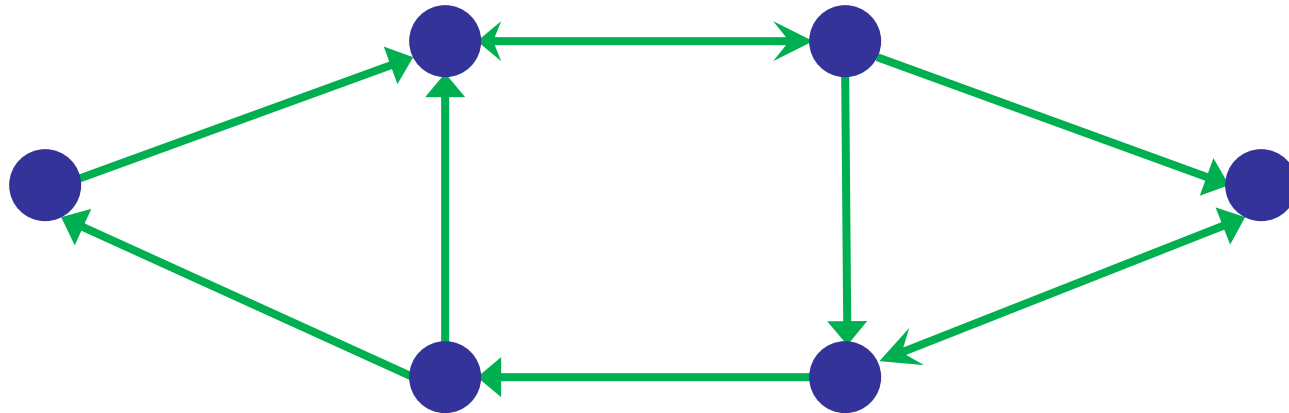


Réseaux bayésiens

- Les **réseaux bayésiens** sont la combinaison des approches probabilistes et la théorie de graphes
- Un **réseau bayésien** est un ensemble de variables aléatoires sous la forme d'un graphe orienté acyclique



Pouvoir et influence



Chaque individu a une opinion représentée par un nombre réel (e.g. valeur d'un objet)...

Ces opinions évoluent dans le temps, en fonction des opinions des personnes ayant de l'influence sur l'individu...