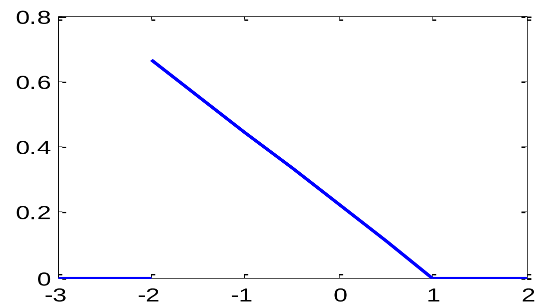
Respuestas de la Práctica 4

Temas : Variables aleatorias continuas. Funciones de distribución de probabilidad uniforme, exponencial, normal

1) Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\,(1-x) & -2 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{caso contrario} \end{cases}$$

a) Hallar la constante k y graficar.

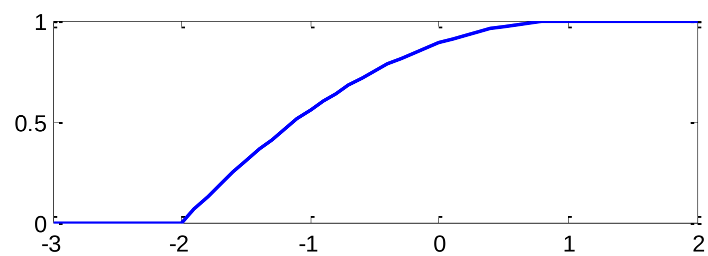


$$\int_{-2}^{1} k\,(1-x)\,dx = k\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 1 \Rightarrow \boxed{k = 2/9}$$

b) Calcular la función de distribución F(x) y graficar

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-2}^{x} \frac{2}{9}(1-x)dx = \frac{2}{9}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{x} = \frac{2}{9}\left(x-\frac{x^2}{2}+4\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{2}{9}\left(x-\frac{x^2}{2}+4\right) & -2 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



F(x)

c) Usando F(x), calcular P(-0.5 <X<1.25)

$$P(-0.5 < X < 1.25) = P(X < 1.25) - P(X < -0.5) = F(1.25) - F(-0.5)$$
$$= 1 - \frac{2}{9} * \left((-0.5) - \frac{(-0.5)^2}{2} + 4\right) = 0.25$$

d) Calcular E(X), V(X)

$$E(X)=\int_{-2}^{1}\frac{2}{9}(x-x^2)\,dx=\frac{2}{9}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\left(\frac{4}{2}-\frac{8}{3}\right)\right)=-1$$

$$E(X^2)=\int_{-2}^{1}\frac{2}{9}(x^2-x^3)\,dx=\frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{9}{6}-(-1)^2=\frac{9}{6}+1=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}=2.5$$

e) Calcular los cuartiles

La forma general del percentil *100p* es

$$F(\eta_p)=p\Rightarrow\frac{2}{9}\left(\eta_p-\frac{\eta_p^2}{2}+4\right)=p\Rightarrow\eta_p=1-3\sqrt{1-p}$$

Ver que la otra solución de la ecuación cuadrática cae fuera de intervalo donde la fda es >0.

Por lo tanto,

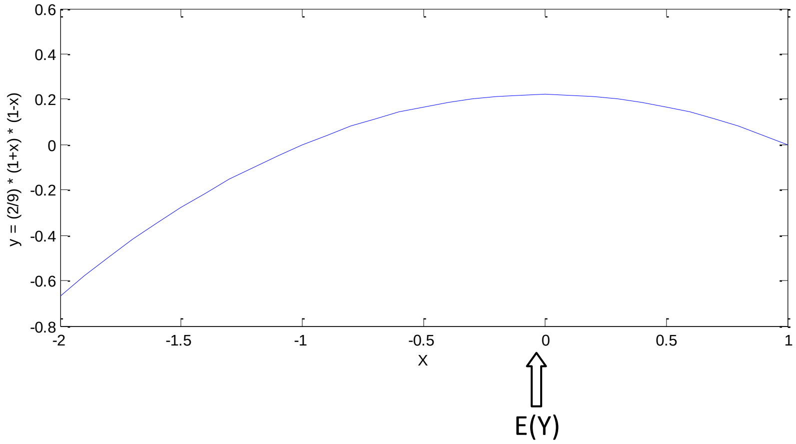
$$\eta_{0.25}=1-3\sqrt{3/4}=-1.5981\quad;\quad\eta_{0.50}=1-3\sqrt{0.50}=-1.1213\quad;\quad\eta_{0.75}=1-3\sqrt{0.25}=-0.5$$

f) Sea $Y=1+X$, calcular $E(Y)$

$$E(Y)=\int_{-2}^{1}(1+x)*\frac{2}{9}*(1-x)dx$$

$$=\frac{2}{9}*\int_{-2}^{1}(1-x^2)dx=\frac{2}{9}*\left(x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{1}\right)=\frac{2}{9}*\left(1-\frac{1}{3}-(-2)+\frac{(-2)^3}{3}\right)=$$

$$\frac{2}{9}*\left(1-\frac{1}{3}+2-\frac{8}{3}\right)=0$$



2) Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad f dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \le x \le 1 \\ a & 1 \le x \le 2 \\ -ax + 3a & 2 \le x \le 3 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

a) Determine la constante a.
b) Calcule $P(0.5 < X < 2.1)$ a partir de la fdp de X.
c) Determine F(X), la fda de X y dibuje su gráfica.
d) Recalcule $P(0.5 < X < 2.1)$ utilizando F(X).
e) Si X_1, X_2, y X_3 son tres observaciones independientes de X ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de esos tres números sea mayor que 1.8?

Rta:

a) Para obtener el valor de a debemos verificar que el área bajo la función $f(x)$ dentro del intervalo donde $f(x) > 0$, es decir [0, 3], vale 1.

$$\int_0^1 a\,x\,dx + \int_1^2 a\,dx + \int_2^3 (-a\,x + 3a)\,dx = 1 \Longrightarrow \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^1 + \left. ax\right|_1^2 + \left.\left(-\frac{ax^2}{2} + 3ax\right)\right|_2^3$$

$$= a\left(\frac{1}{2} - 0\right) + a(2-1) + \left(-a * \frac{9}{2} + 3a * 3 - (-a * 2 + 6a)\right)$$

$$= \frac{a}{2} + a - \frac{9}{2}a + 9a + 2a - 6a = 1 \Longrightarrow 2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

b) Calcule Calcule $P(0.5 < X < 2.5)$ a partir de la fdp de X.

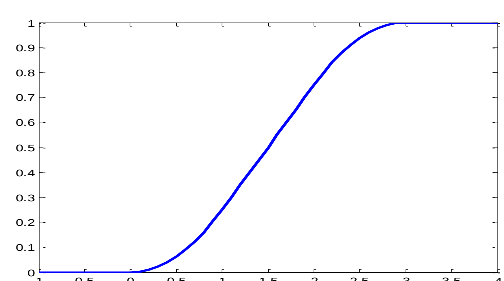
$$P(0.5 < X < 2.1) = \int_{0.5}^1 \frac{x}{2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx + \int_2^{2.5} \left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) dx$$

$$= \left.\frac{x^2}{4}\right|_{0.5}^1 + \left.\frac{x}{2}\right|_1^2 + \left.\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right)\right|_2^{2.5}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{25}{16} + \frac{15}{4} + 1 - 3\right) =$$

$$\frac{3}{16} + \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{7}{8} = 0.875$$

c) La fda de X es



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4} & 2 \leq x \leq 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

d) Calcule Calcule $P(0.5 < X < 2.5)$ a partir de la fda de X.

$$P(0.5 < X < 2.5) = F(2.5) - F(0.5) = \left(-\frac{2.5^2}{4} + \frac{3}{2} * 2.5 - \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{0.5^2}{4}\right) = 0.875$$

e) Si X_1, X_2, y X_3 son tres observaciones independientes de X ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de esos tres números sea mayor que 1.8?

$$P(X > 1.8) = 1 - P(X < 1.8) = 1 - F(1.8) = 1 - \left(\frac{1}{2} * 1.8 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{20}$$

Sea $A_i =$ "$la\ i - ésima\ observación\ es\ mayor\ que\ 1.8$" con i=1,2,3

$$\begin{aligned} &P(exactamente\ 1\ es\ mayor\ que\ 1.8) \\ &= P\left((A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C) \cup (A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3)\right) \\ &= \frac{7}{20} * \frac{13}{20} * \frac{13}{20} + \frac{13}{20} * \frac{7}{20} * \frac{13}{20} + \frac{13}{20} * \frac{13}{20} * \frac{7}{20} = 3 * \frac{7}{20} * \frac{13}{20} * \frac{13}{20} = 0.4436 \end{aligned}$$

3) ¿Puede ser la siguiente función una función de distribución acumulada? Explique

$$F(X) = \begin{cases} c(1 - x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

Rta: no porque debe ser no decreciente entre 0 y 1.

4) Se genera un número X al azar utilizando un generador con distribución uniforme en el intervalo $[10, 40]$.

a) Escriba la fdp de X y trace su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} 1/30 & 10 \leq x \leq 40 \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número generado sea mayor que 20?

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - (20 - 10)/30 = 0.6667$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número generado diste de la media en menos de 2 unidades?

El valor esperado es el centro del intervalo $E(X) = \frac{40+10}{2} = 25$

Se pide calcular $P(23 \leq x \leq 27) = \frac{4}{30} = 0.1333$

d) Para cualquier valor de a tal que $10 < a < a+2 < 40$ ¿Cuál es la probabilidad de que el número generado esté entre a y $a+2$?

$P(a \leq x \leq a+2) = (a+2-a)/30 = 0.0667$

5) Suponga que el consumo familiar de un cierto producto se distribuye como una variable aleatoria de distribución uniforme, con esperanza igual a 10kg y varianza igual a 1 kg^2. Determine la probabilidad de que dicho consumo este comprendido entre 9 y 12 kilos.

$E(X) = \frac{a+b}{2} = 10 \quad ; \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = 1$

Debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a+b = 20 \\ (b-a)^2 = 12 \end{cases}$$

y se obtendrá que $a = 8.2679$ y $b = 11.7321$

Se pide calcular $P(9 \leq x \leq 12) = F(12) - F(9) = 1 - \frac{9-8.2679}{11.7321-8.2679} = 0.7887$

6) La variable Z tiene distribución normal típica.

i. Calcular las siguientes probabilidades: (a) P(Z≤2.23), (b) P(Z>1.35), (c) P(0<Z<1.2) (d) P(0.3 < Z < 1.56), (e) P(-0.51 < Z < 1.54)

a) $P(Z \leq 2.23) = 0.9871$; b) $P(Z > 1.35) = 1 - P(Z < 1.35) = 0.0885$;

c) $P(0 < Z < 1.2) = F(1.2) - F(0) = 0.8849 - 0.5 = 0.3849$

d) $P(0.3 < Z < 1.56) = F(1.56) - F(0.3) = 0.9406 - 0.6179 = 0.3227$

e) $P(-0.51 < Z < 1.54) = F(1.54) - 1 + F(0.51) = 0.9382 - 1 + 0.6950 = 0.6332$

ii. Hallar los valores de z que verifiquen:

a) $P(Z > z) = 0.5 \Rightarrow 1 - P(Z < z) = 0.5 \Rightarrow P(Z < z) = 0.5 \Rightarrow z = 0$

b) $P(Z < z) = 0.8485 \Rightarrow z = 1.03$;

c) $P(Z < z) = 0.0059 \Rightarrow P(Z > -z) = 0.0059 \Rightarrow P(Z < -z) = 1 - 0.0059 = 0.9941 \Rightarrow z = -2.52$

d) $P(-z < Z < z) = 0.90 \Rightarrow P(Z < z) - P(Z > z) = 0.90 \Rightarrow$

$P(Z < z) - 1 + P(Z < z) = 0.90 \Rightarrow 2P(Z < z) = 1.90 \Rightarrow P(Z < z) = 0.95 \Rightarrow$

$z = 1.6449$

7) Si X es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros: μ=10 y σ^2=36

Calcular: (a) P(X > 5), (b) P(4 < X < 16), (c) P(X ≤ 8)

a) X ~ N(10,6); μ=10 y σ^2=36 → Y=(X- μ) / σ ~ N(0, 1)

$$P(X > 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5-10}{6}\right) = 1 - P(Y < -0.8333) = 1 - P(Y > 0.8333) =$$

$$= 1 - (1 - P(Y < 0.8333)) = P(Y < 0.8333) = 0.7977$$

La tabla no tiene el valor 0.8333 pero F(0.83)=0.7967 y F(0.84)=0.7995; es decir que para una diferencia en x de 0.01, F(x) tiene una diferencia de 0.0028. Por lo tanto

F(0.8333)=F(0.83)+0.0033 * 0.0028 / 0.001 = 0.7977

b)
$$P(4<X<16)=P(X<16)-P(X<4)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{16-10}{6}\right)-P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{4-10}{6}\right)=$$
$$=P(Y<1)-P(Y<-1)=P(Y<1)-P(Y>1)=P(Y<1)-1+P(Y<1)=$$
$$=2*P(Y<1)-1=2*0.8413-1=0.6826$$

c)
$$P(X<8)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{8-10}{6}\right)=P(Y<-\frac{1}{3})=1-P(Y<\frac{1}{3})=1-0.6305=0.3695$$

8) a) 0.3085 ; b) 0.2112

9) La ganancia esperada de una cuerda es de 23.416$

10) En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de marzo sigue una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5°. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°.

$X \sim N(23, 5)$
$P(21 < X < 27) = P(X < 27) - P(X < 21) = 0.7881 - 0.3446 = 0.4435$
Es decir que el 44.35% de los días de marzo la temperatura estará entre 21° y 27°. Eso equivale a 13.74 días. Si se debe dar una respuesta entera deberíamos decir que son 13 días porque con 14 días la probabilidad estaría fuera del rango indicado.

11) El 11.77% de la producción no satisface las especificaciones.

12) La probabilidad de que las familias haya por lo menos 30 que tengan teléfono es 0.5396.

13) probabilidad de que en una muestra de 1000 individuos elegidos al azar que compraron papas en MacDonald's,

a) Por lo menos 40 noten la diferencia entre los dos aceites es 0.0391.
b) A lo sumo el 5% note la diferencia entre los dos aceites es 0.9999 (casi 1)

14) a) 0.6065 ;
b) 51.2933 hs (si tuviera que ser un nro. entero diríamos 51 porque con 52 no llega al 95%)

15) a) P(T<20) = 0.7135 ; b) P(5<T<25 | T>5)=0.7135
Note que $P(T < 20) = P(5 < T < 25|T > 5)$ es decir que en la duración que se espera que tenga el objeto, no influye en nada el tiempo que en la actualidad lleva funcionando. Es por ello que se dice que la distribución exponencial "no tiene memoria"

16) 322 días

17) Si X tiene una distribución exponencial con parámetro λ, deduzca una expresión general para el percentil (100p) de la distribución. Después especifique como obtener la mediana.
Utilice esta última expresión para calcular la mediana de la distribución del ejercicio anterior.

$$p = \int_0^{\eta_p} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\eta_p} = -e^{-\lambda \eta_p} + 1 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda \eta_p} = p \Rightarrow e^{-\lambda \eta_p} = 1 - p \Rightarrow -\lambda \eta_p = \ln(1-p)$$

$$\eta_p = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$$

La mediana es el percentil 50 es decir que p=0.5

$$\eta_{0.5} = -\frac{\ln(1-0.5)}{\lambda} = -\frac{\ln(0.5)}{\lambda} = \frac{0.6931}{\lambda}$$

En el ejemplo anterior λ=1/140 → $\eta_{0.50}$=0.6931*140=97.034 días ~97 días

18) 0.002

19) La media es 10 y la desviación es 0.2.

20) C=21.155