Matemática III

Práctica 1

Temas: Espacio muestral – Eventos – Asignación de probabilidades

1) Indique el espacio muestral de cada uno de los siguientes experimentos
   a) ε : "Seleccionar al azar uno de los meses del año y ver con que letra comienza su nombre".
      $\boldsymbol{S = \{'E', 'F', 'M', 'A', 'J', 'S', 'O', 'N', 'D'\}}$
   b) ε : "Una caja con *N* lámparas tiene *r* (*r* < *N*) unidades con filamentos rotos. Se prueban las lámparas de a una hasta que se encuentra una defectuosa y se anota la cantidad de lámparas extraídas".
      $\boldsymbol{S = \{1, 2, 3, \dots, N - r + 1\}}$
   c) ε : "Una caja con *N* lámparas tiene *r* (*r* < *N*) unidades con filamentos rotos. Se prueban las lámparas una por una hasta que se prueban todas las defectuosas y se anota la cantidad de lámparas extraídas".
      $\boldsymbol{S = \{r, r + 1, .., N\}}$

2) Considérense cuatro objetos *a*, *b*, *c* y *d*. Supóngase que el orden en que se anotan esos objetos representa el resultado de un experimento. Sean A y B los eventos definidos de la siguiente forma: A = {*a* está en primer lugar}; B={*b* está en segundo lugar}
   a) Anotar todos los elementos del espacio muestral.
   b) Anotar todos los elementos de los eventos A ∩ B y A ∪ B.

   Rta:
   a) S={(a,b,c,d), (a,b,d,c), (a,c,b,d), (a,c,d,b), (a,d,b,c), (a,d,c,b), (b,a,c,d), (b,a,d,c), (b,c,a,d), (b,c,d,a), (b,d,a,c), (b,d,c,a), (c,a,b,d), (c,a,d,b), (c,b,d,a), (c,b,a,d), (c,d,a,b), (c,d,b,a), (d,a,c,b), (d,a,b,c), (d,c,b,a), (d,c,a,b), (d,b,a,c), (d,b,c,a)}
   b) A ∩ B ={(a,b,c,d), (a,b,d,c)}
   c) A ∪ B ={(a,b,c,d), (a,b,d,c), (a,c,b,d), (a,c,d,b), (a,d,b,c), (a,d,c,b), (c,b,d,a), (c,b,a,d), (d,b,a,c), (d,b,c,a)}

3) Un lote contiene artículos que pesan 5, 10, 15, …, 50 kilos. Suponga que al menos dos artículos de cada peso se encuentran allí. Se eligen dos artículos del lote. Sea *X* el peso del primer artículo elegido e *Y* el peso del segundo artículo. Así, el par *(X,Y)* representa un solo resultado del experimento. Usando el plano *XY*, indíquese el espacio muestral y los eventos siguientes.
   a) { X = Y }
   b) { Y > X }
   c) El segundo artículo pesa el doble que el primero.
   d) El primer artículo pesa 10 kilos menos que el segundo.

   Rta:
   a) { X = Y } = {(5,5), (10,10), (15,15), (20,20), (25,25), (30,30), (35,35), (40,40), (45,45), (50,50)}

b) { Y > X }={(5,10),(5,15),(5,20),(5,25),(5,30),(5,35) ,(5,40) ,(5,45) ,(5,50) ,(10,15) ,(10,20) ,(10,25) ,(10,30) ,(10,35) ,(10,40) ,(10,45) ,(10,50), (15,20), (15,25), (15,30), (15,35), (15,40), (15,45), (15,50),(20, 25),(20,30),(20,35),(20,40),(20,45),(20,50), (25,30),(25,35),(25,40),(25,45),(25,50),(30,35),(30,40),(30,45),(30,50),(35,40),(35,45), (35,50),(40,45),(40,50),(45,50)}

c) A={(X,Y) | Y=2X} = {(5,10), (10,20), (15, 30), (20, 25), (25, 50)}

d) El primer artículo pesa 10 kilos menos que el segundo.

A={(Y-10, Y) | Y=15,20,25,30,35,40,45,50}
= {(5,15), (10,20), (15,25),(20,30), (25, 35), (30,40), (35, 45), (40,50)}

4) Sean A, B y C tres eventos asociados con un experimento. Expresar las siguientes proposiciones verbales en notación de conjuntos.
   a) Al menos uno de los eventos ocurre.
   b) Exactamente uno de los eventos ocurre.
   c) Exactamente dos de los eventos ocurren.
   d) No ocurren más de dos eventos simultáneamente.

Rta:
   a) $A \cup B \cup C$
   b) $(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$
   c) $(A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C^C)$
   d) $S - (A \cap B \cap C)$

5) Una bola se extrae al azar de una caja que contiene 6 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules. Determinar la probabilidad de que sea:
   a) roja - b)blanca - c)azul - d) no roja - e) roja o blanca

Rtas: Sean R, B y A los eventos de extraer una bola roja, blanca y azul respectivamente
   a) P(R) = 6/15 - b) P(B) = 4/15 - c) P(A) = 5/15
   d) $P(R^C) = 1 - P(R) = 1-6/15 = 9/15$
   e) $P(R \cup B) = P(R) + P(B) = 6/15 + 4/15 = 10/15$

6) Se arroja dos veces un dado equilibrado.
   a) Describa el conjunto de todos los resultados posibles y asigne una probabilidad razonable a cada uno.
   b) Sea A el evento: la suma de ambos resultados es 4, y B el evento: al menos uno de los resultados es 3. Calcule: P(A), P(B), $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ y $P(A^c \cup B)$.

Rta:
   a) S = {(1,1),(1,2),…,(1,6),(2,1),…, (6,5), (6,6)} tiene 6x6 = 36 eventos, c/u con probabilidad 1/36.
   b) A = {(1,3), (2,2), (3,1)}
   B = {(1,3), (2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4), (3,5), (3,6), (4,3),(5,3),(6,3)}
   P(A) = 3/36; P(B)=11/36 ; $P(A \cap B) = 2/36$; $P(A \cup B) = 12/36$;
   $P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B) = 33/36 + 11/36 – 9/36=35/36$

7) Demostrar que para dos eventos cualesquiera, A_1 y A_2, se cumple que

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

Rta:

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$

$La\ desigualdad\ es\ porque\ P(A_1 \cap A_2) \geq 0\ por\ definición$

8) Dados dos eventos A y B, la siguiente proposición trata de la probabilidad de que exactamente sólo uno de ellos ocurra. Demuestre que

$$P[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] = P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$$

Rta:

$$P[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] = P[(A \cup B) - (A \cap B)] =$$
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$$

9) Un lote consta de 10 artículos sin defecto, 4 con defectos pequeños y 2 con defectos graves. Se elige un artículo al azar. Encontrar la probabilidad de que

a) No tenga defectos
b) No tenga defectos graves.
c) No tenga defecto o que tenga defectos graves.

Rta:

a) $P(no\ tenga\ defecto) = \frac{10}{16}$
b) $P(No\ tenga\ defectos\ graves) = \frac{14}{16}$
c) $P(No\ tenga\ defecto\ o\ tenga\ defectos\ graves) = \frac{12}{16}$

10) Si del mismo lote de artículos descripto en el problema anterior se escogen dos artículos (sin sustitución) encontrar la probabilidad de que

a) Ambos sean buenos
b) Ambos tengan defectos graves
c) Al menos uno sea bueno
d) A lo sumo uno sea bueno
e) Exactamente uno sea bueno
f) Ninguno tenga defectos graves
g) Ninguno sea bueno

Rta:

a) $P(Ambos\ son\ buenos) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8} = 0.375$

b) $P(Ambos\ tengan\ defectos\ graves) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{1}{120} = 0.0083$

c) Esto puede pensarse de dos formas:

$$P(al\ menos\ uno\ sea\ bueno) = P(los\ dos\ son\ buenos) + P(sólo\ uno\ es\ bueno)$$
$$= \frac{\binom{10}{2}}{\binom{16}{2}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{6}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{3}{8} + \frac{60}{120} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

$$P(al\ menos\ uno\ sea\ bueno) = 1 - P(ninguno\ es\ bueno) = 1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}} = 1 - \frac{15}{120}$$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

d) $P(A\ lo\ sumo\ 1\ es\ bueno) = 1 - P(los\ dos\ son\ buenos) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

e) $P(Exactamente\ uno\ sea\ bueno) = \frac{\binom{10}{1}\binom{6}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{1}{2}$

f) $P(\text{Ninguno tenga defectos graves}) = \frac{\binom{14}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{91}{120}$

g) $P(Ninguno\ sea\ bueno) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$

11) En una habitación 10 personas tienen insignias numeradas del 1 al 10. Cada persona lleva una insignia distinta. Se eligen tres personas al azar y se les pide que dejen la habitación y se anotan los números de las insignias.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número menor de las insignias sea 5?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número mayor de las insignias sea 5?

Rta:

a) Si el número menor de las insignias debe ser 5, esta insignia tiene que estar entre las tres, las dos restantes se eligen entre los 5 números que superan al 5.Es deicr que la probabilidad pedida se calcula como:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

b) $P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$

12) Un cargamento de 1500 lavadoras contiene 400 defectuosas y 1100 no defectuosas. Se eligen al azar 200 lavadoras (sin sustitución) y se clasifican

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren exactamente 90 artículos defectuosos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren al menos 2 artículos defectuosos?

Rta:

a) $P(\text{“}90\ art.defectuosos\text{”}) = \frac{\binom{400}{90}\binom{1100}{110}}{\binom{1500}{200}}$

b) $P(\text{“}al\ menos\ 2\ defectuosos\text{”}) =$
$1 - P(\text{ninguno es defectuoso}) - P(\text{solo uno es defectuoso})$

$$= 1 - \frac{\binom{400}{0}\binom{1100}{200}}{\binom{1500}{200}} - \frac{\binom{400}{1}\binom{1100}{199}}{\binom{1500}{200}}$$

13) Diez ficha numeradas del 1 al 10 se mezclan en una caja. Se sacan de la caja dos fichas numeradas, X e Y, una a continuación de otra y sin sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que $X + Y = 10$?

Rta:

A={“pares de fichas cuyos números suman 10”} ={(1,9),(2,8),(3,7),(4,6)}

En total hay $\binom{10}{2} = 45$ pares posibles.

Luego, $P(A) = \frac{4}{45}$