Respuestas de la Práctica 3

1) Para ser una función de probabilidad debe cumplirse que todos los valores de $p(x_i)$ sean mayores o iguales que cero y que su suma de 1. La v.a. puede tomar valores negativos o cero pero su probabilidad debe ser ≥ 0.
   Esto no se cumple ni en d) ni en f). En d) suman 1 pero p(1)= -1 y en f) la suma se pasa de 1. Las 4 restantes son funciones de probabilidad.
   a) $P(1 \leq X \leq 4)= 1$; $P(X = 1) = 1/4$; $P(X \neq 2) =1$; $E(X) = 2.75$; $V(X)=1.1875$
   b) $P(1 \leq X \leq 4)= 3/4$; $P(X = 1) = 3/4$; $P(X \neq 2) =1$; $E(X) = 0$; $V(X)=3$
   c) $P(1 \leq X \leq 4)= 1$; $P(X = 1) =0$; $P(X \neq 2) =0.7$; $E(X) = 1.6$; $V(X)=2.04$
   e) $P(1 \leq X \leq 4)= 20/25=0.8$; $P(X = 1) =0$; $P(X \neq 2) =21/25=0.84$; $E(X) = 2.52$; $V(X)=5.2096$

2) Un dado normal es arrojado 2 veces. Considere la variable aleatoria Y = "el número mínimo de las dos tiradas". Calcular:

   a) Función de distribución.

Y	1	2	3	4	5	6
p(y)	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

   b) Función de distribución acumulada.

$$F(Y)=\begin{cases} 0 & y<1 \\ 11/36 & 1\leq y<2 \\ 20/36 & 2\leq y<3 \\ 27/36 & 3\leq y<4 \\ 32/36 & 4\leq y<5 \\ 35/36 & 5\leq y<6 \\ 1 & y\geq 6 \end{cases}$$

   c) Graficar las funciones calculadas en a) y b)

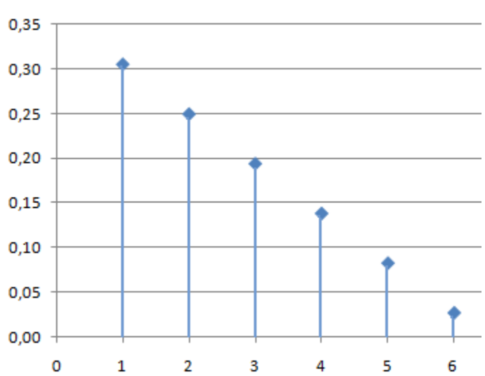

Grafico de p(y)

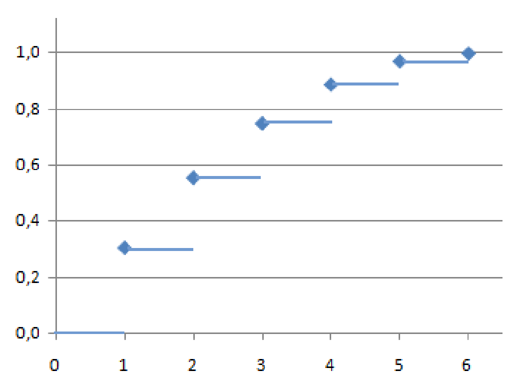

Gráfico de F(y)

3) La Figura 1 no corresponde con una fda válida porque si bien es no decreciente toma valores mayores a uno. En la figura 2, si bien toma valores entre 0 y 1, no cumple con la idea de ser “acumulada” porque la función es decreciente. La única que cumple con la definición es la figura 3. En ella, se observan 5 escalones, es decir que la v.a. correspondiente puede tomar 1 de 5 valores posibles (son los únicos que tienen probabilidad > 0).

4) a) La distribución de probabilidad de Z=X+Y es

Z	3	4	5	6	7	8	9
p(z)	2/20	2/20	4/20	4/20	4/20	2/20	2/20

b) E(Z)=6; V(Z)=3

5) La función de frecuencia de Y es

y	0	1	2
p(y)	0.20	0.70	0.10

6) La tabla muestra la función de frecuencia de X y su fda aparece a la derecha

y	0	1	2	3
p(y)	1/64	9/64	27/64	27/64

$$f(y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ 1/64 & 0\le y<1 \\ 10/64 & 1\le y<2 \\ 37/64 & 2\le y<3 \\ 1 & y\ge 3 \end{cases}$$

7) a) X~B(4, 1/5)

x	0	1	2	3	4
p(x)	0.4096	0.4096	0.1536	0.0256	0.0016

b) X~H(4,5,25)

x	0	1	2	3	4
p(x)	0.3830	0.4506	0.1502	0.0158	0.0004

c) Los son pues ambas tienen valores >=0 y la suma da 1.

d)

$$F(X)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.4096 & 0\le x<1 \\ 0.8192 & 1\le x<2 \\ 0.9728 & 2\le x<3 \\ 0.9984 & 3\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$

***fda* de a)**

$$F(X)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.3830 & 0\le x<1 \\ 0.8336 & 1\le x<2 \\ 0.9838 & 2\le x<3 \\ 0.9996 & 3\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$

***fda* de b)**

e) Calcular las esperanzas y varianzas de ambas variables aleatorias.
X~B(4, 1/5) ⇒ E(X)=4*1/5= 0.8 ; V(X)=4*1/5*4/5=0.64
X~H(4,5,25) ⇒ E(X)=4*5/25= 0.8 ; V(X)=4*(5/25)*(20/25)*(21/24)=0.56

8) $X \sim B(25, 0.6)$ por lo tanto $E(X) = np = 25 * 0.6 = 15$
$h(X) = 1 * X + 2.5 * (25 - X) = X + 62.50 - 2.5\,X = 62.50 - 1.5X$
$E(h(X)) = 62.50 - 1.5 * E(X) = 62.50 - 1.5 * 15 = 40\ u\$s$

9) $X \sim B(15, 0.6)$ por lo tanto $E(X) = 15 * 0.6 = 9$ y $V(X) = 15 * 0.6 * 0.4 = 3.6$ por lo tanto $\sigma = \sqrt{3.6} = 1.8974.$
Se pide calcular $P(7.1026 \leq X \leq 10.8974) = P(8 \leq X \leq 10) = F(10) - F(7) = 0.783 - 0.213 = 0.57$

10) El departamento de control de calidad de una empresa automotriz sabe que el 25% de los automóviles de cierto tipo es resistente a las pruebas de colisión a 20 km/h.

a) X="Nro. de autos que resisten la colisión entre los 15 seleccionados"
X~B(15, 0.3)
$P(X = 1) = \binom{15}{1} 0.30^1 0.70^{14} = 0.0305$

b) X="Nro. de autos que resisten la colisión entre los 20 seleccionados"
X~B(20, 0.3)
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.000797 - 0.0068$
$= 0.9924$
También podríamos haber calculado
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.0076 = 0.9924$

c) X="Nro. de autos que deben probarse hasta encontrar 2 que resistan la colisión"
X~BN(2,0.3)
$P(X = 10) = \binom{9}{1} 0.3^2 0.7^{10-2} = 0.0467$

d) X="Nro. de pruebas hasta encontrar el primero que resista". **X~G(0.3)**
$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.3} = 3.33$
Es de esperar que deban realizarse entre 3 y 4 pruebas para hallar el primero que resista a la colisión.

11) Ejercicio referido a la donación de libros de la biblioteca

Las pruebas son independientes entre si. Que un libro deba ser reparado no implica que otro también deba serlo. Sea R="El libro extraído debe ser reparado", P(R)=0.4

X="Cant. de libros extraídos hasta encontrar 1 que deba ser reparado"; **X~ G(0.4)**

a) $P(X = 4) = 0.6^3 * 0.4 = 0.0864$
b) $E(X) = 1/p = 1/0.4 = 2.5$
c) X~B(20,0.4), $P(X = 0) = 0.000036562$
d) X~BN(3,0.4), $P(X = 15) = \binom{15-1}{3-1} 0.4^3 0.6^{15-3} = 0.0092$

12) Para que la moneda sea honesta, la probabilidad de que salga cara tiene que ser 0,5.
Nos dicen que la moneda se tiró n veces, y que la cantidad de veces que salió cara fue una variable binomial cuya media es 5 y su varianza es 2,5.
Entonces si X es esa variable binomial, E(X) = 5 y $\sigma^2(X) = 2,5$

Con lo cual

$$\begin{cases} n * p * (1 - p) = 2{,}5 \\ n * p = 5 \end{cases}$$

Nos queda un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Si lo resolvemos
Obtenemos que n = 10 y que p = 0,5
Como p = 0,5 concluimos que la moneda es honesta. (y que se tiró 10 veces)

13) a) X ~P(36) λ=12t=12*3=36 *(t es la cantidad de horas que se observará el experimento)*

$$P(X = 30) = \frac{e^{-36}36^{30}}{30!} = 0.0427$$

b) X~P(3) λ=12*0.25=3 *(porque sale un cuarto de hora)*

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} = 0.0498$$

c) X~P(3) ; E(X)=3

14) Un circuito falla, en promedio, 2 veces por hora.

a) Calcular cuál es el tiempo que podrá funcionar tal que la probabilidad de que no falle sea de 0,88.

Rta

Si X es una variable distribuida según Poisson que consista en la cantidad de fallas que tiene el circuito en un determinado período, entonces estamos buscando: P(X = 0)

Si la variable está distribuida según Poisson, tendrá su parámetro (λt). Si nos preguntaran cuál es la media tal que la probabilidad de que no falle sea de 0,88 haríamos:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{0}}{0!} = 0.88 \Rightarrow e^{-\lambda t} = 0.88 \Rightarrow -\lambda t = \ln(0.88) \Rightarrow \lambda t = 0.1278$$

El valor 0.1278 corresponde a la cantidad de fallas esperadas durante el período que dure el experimento.

Se sabe que la tasa de fallas es de 2 por unidad de tiempo, es decir que λ=2, luego

$$t = \frac{0.1278}{\lambda} = \frac{0.1278}{2} = 0.0639\ hs$$

Esto nos dice que haciendo andar el circuito durante 0,063917 horas, hay una probabilidad de 0,88 de que no haya ninguna falla.

b) Nos piden un número entero de minutos.

Si 1hora son 60 minutos, 0.0639 horas equivalen a 0.0639*60 = 3.8340 minutos.

Nos piden una cantidad entera de minutos. Deberíamos responder 3 porque si eligiéramos 4, el período de tiempo sería mayor y la probabilidad de no cometer error sería inferior a 0.88.

La respuesta es 3 minutos.

15) a) X tiene una distribución B(500, 0.0005) que como n = 500 es grande y p=0.005 es chica, se puede aproximar por una distribución de Poisson con parámetro λ=500*0.005 = 2.5. Es decir que **X~P(2.5)**

b) P(X=5) = 0.066731

c) P(X≥5)=0.10975

16) a) Rta: 7 niños ; b) 0.00 ; c) 0.5266

17) Sea X ~ B(n,p); para n fija:

a) Hay valores de p ($0 \leq p \leq 1$) para los cuales V(X)=0? Explique por qué esto es así.
La varianza es cero para p=0 y p=1. Si p=0, el evento no ocurre nunca y si p=1 ocurre siempre. En ambos casos, el resultado del experimento siempre coincide con el valor esperado y por lo tanto la varianza es cero.

b) Para que valores de p se maximiza la V(X)? para p=0.5. Esto puede obtener derivando la expresión de la varianza respecto de p.

18) a) La distribución hipergeométrica. Y ~ H(20, 40, 100) $\Rightarrow$ P(Y=10)=0.1192

b) la distribución binomial. Y ~ B(20,0.4) $\Rightarrow$ P(Y=10)=0.1171

¿Es N suficientemente grande para que la distribución binomial sea una buena aproximación para la distribución hipergeometrica? Si. Puede verse gráficamente.