Algorithmische Mathematik I

3. Übung

Jonas Lippert Maximilian Wiesmann

28. Oktober 2018

1

(a)

2

(a)

Sei n eine negative ganze Zahl und sei z die l-stellige 2-Komplementdarstellung von n. Nach Lemma 2.6 gilt

$$z = K_2^l(-n) = \sum_{i=0}^{l-1}(2-1-z_i)2^i \quad \text{für } -n-1 = \sum_{i=0}^{l-1} z_i 2^i$$

Stehen nun $2l$ Ziffern zur Verfügung, so gilt

$$-n-1 = \sum_{i=0}^{2l-1} z_i b^i \quad \text{mit } z_i = 0 \text{ für } l \leq i \leq 2l-1$$

$$\Rightarrow z = K_2^{2l}(-n) = \sum_{i=0}^{2l-1}(2-1-z_i)2^i = \sum_{i=0}^{l-1}(2-1-z_i)2^i + \sum_{i=l}^{2l-1}(2-1-0)2^i$$

D.h. bei $2l$ Ziffern sind in der Komplementdarstellung die ersten l Ziffern alle gleich 1 und die weiteren Ziffern genauso wie in $K_2^l(-n)$.

(b)

Wie in (a) gilt

$$z = K_2^l(-n) = \sum_{i=0}^{l-1}(2-1-z_i)2^i \quad \text{für } -n-1 = \sum_{i=0}^{l-1} z_i 2^i$$

Die i-te Ziffer von z ist also genau dann gleich 0, wenn $z_i = 1$, und gleich 1, wenn $z_i = 0$ ist. Vertauscht man nun also Nullen und Einsen miteinander, so erhält man an jeder Ziffer gerade z_i, also die i-te Ziffer der Binärdarstellung von $-n-1$, was nach Definition $-(z+1)$ entspricht.

3

(a)

Ausmultiplizieren und Aufsummieren liefert:

$$(19375573910)_{-10} = 0\cdot(-10)^0 + 1\cdot(-10)^1 + 9\cdot(-10)^2 + 3\cdot(-10)^3 + 7\cdot(-10)^4 + 5\cdot(-10)^5$$
$$+5\cdot(-10)^6 + 7\cdot(-10)^7 + 3\cdot(-10)^8 + 9\cdot(-10)^9 + 1\cdot(-10)^{10}$$
$$= 0\cdot 10^0 + 9\cdot 10^2 + 7\cdot 10^4 + 5\cdot 10^6 + 3\cdot 10^8 + 1\cdot 10^{10}$$
$$-(1\cdot 10^1 + 3\cdot 10^3 + 5\cdot 10^5 + 7\cdot 10^7 + 9\cdot 10^9)$$
$$= (10305070900)_{10} - (9070503010)_{10} = (1234567890)_{10}$$

(b)

Eine Darstellung von $(9230753)_{10}$ zur Basis -10 ist $(-11371367)_{-10}$. Wir überprüfen dies durch Nachrechnen:

$$(-11371367)_{-10} = -(7\cdot(-10)^0 + 6\cdot(-10)^1 + 3\cdot(-10)^2 + 1\cdot(-10)^3$$
$$+7\cdot(-10)^4 + 3\cdot(-10)^5 + 1\cdot(-10)^6 + 1\cdot(-10)^7)$$
$$= -(7\cdot 10^0 + 3\cdot 10^2 + 7\cdot 10^4 + 1\cdot 10^6 - (6\cdot 10^1 + 1\cdot 10^3 + 3\cdot 10^5 + 1\cdot 10^7))$$
$$= (10301060)_{10} - (1070307)_{10} = (9230753)_{10}$$

(c) & (d)

Wir geben zwei Darstellungen einer beliebigen Zahl $x \in \mathbb{Z}$ zur Basis -10 an, von denen wir beweisen, dass sie i.A. verschieden sind, und zeigen so, dass stets eine solche Darstellung existiert und diese nicht immer eindeutig ist.
Sei $x = \pm\sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i,\ z_i \in \{0,\ldots,9\}$ die Darstellung von x zur Basis 10. Für den Fall, dass x negativ ist, müssen in den folgenden Darstellungen nur die Vorzeichen gewechselt werden, wir betrachten deshalb im Folgenden nur den Fall, dass x positiv ist.
1. Darstellung:
Fall 1: l ist gerade.
Wir zeigen, dass die Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2}\rfloor -1} z'_{2i+1}10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2}\rceil -1} z'_{2i}10^{2i} = -\sum_{i=0}^{l-1} z'_i(-10)^i$$

mit

$$z'_j = \begin{cases} 10 - z_j\ , & \text{wenn } j \text{ gerade} \\ z_j + 1\ , & \text{wenn } j \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine korrekte Darstellung von x zur Basis -10 ist. Anmerkung: Ist $z_j = 9$ und befinden wir uns im zweiten Fall der Darstellungsvorschrift, kommt es zu einem „Übertrag“. Dies stört uns aber nicht, wenn wir die z_j formal als Koeffizienten in der Summe auffassen. Sollte der Fall eintreten, dass man z.B. als erste „Ziffer“ -1 erhält, kann man diese durch 19 ersetzen.
Fall 2: l ist ungerade.
Wir wählen die Darstellung wie in Fall 1, nur ist dies in diesem Fall eine korrekte Darstellung von $x - 10^l$ zur Basis -10. Es ist klar, dass wir dann auch eine Darstellung für x

erhalten, indem wir am Ende des Umwandlungsprozesses noch 10^l subtrahieren, d.h. eine 1 als erste Ziffer in der Darstellung zur Basis -10 ergänzen.
Beweis:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1} z'_{2i+1}10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} z'_{2i}10^{2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1} (z_{2i+1}+1)10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} (10-z_{2i})10^{2i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1} z_{2i+1}10^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1} 10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} 10^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} z_{2i}10^{2i}$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i - 10^l = x - 10^l & \text{für ungerades } l \\ \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i = x & \text{für gerades } l \end{cases}$$

2. Darstellung:
Wir zeigen, dass die Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} z'_{2i}10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1} z'_{2i+1}10^{2i+1} = \sum_{i=0}^{l-1} z'_i(-10)^i$$

mit

$$z'_j = \begin{cases} z_j + 1\ , & \text{wenn } j \text{ gerade} \\ 10 - z_j\ , & \text{wenn } j \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine korrekte Darstellung von $x+1$ zur Basis -10 ist, wenn l ungerade ist, und eine korrekte Darstellung von $x+1-10^l$, wenn l gerade ist (analog zu oben; entsprechend muss dann von der -10-adischen Darstellung noch 1 subtrahiert respektive 1 subtrahiert und 10^l addiert werden).
Beweis:

$$\sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} z'_{2i}10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1} z'_{2i+1}10^{2i+1} = \sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} (z_{2i}+1)10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1} (10-z_{2i+1})10^{2i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} z_{2i}10^{2i} + \sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} 10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1} 10^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1} z_{2i+1}10^{2i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + \sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} 10^{2i} - \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor} 10^{2i}$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + 10^0 = x + 1 & \text{für ungerades } l \\ \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + 10^0 - 10^l = x + 1 - 10^l & \text{für gerades } l \end{cases}$$

Diese beiden Darstellungen sind i.A. nicht gleich. Um dies zu zeigen, betrachten wir das Beispiel aus Teil (b):

$$(9230753)_{10} \overset{\text{1. Darst.}}{=} (-11371367)_{-10} \overset{\text{2. Darst.}}{=} (190830854)_{-10}$$

Folglich ist die Darstellung einer Zahl zur Basis -10 nicht immer eindeutig, solche Darstellungen existieren aber. $\square$