Algorithmische Mathematik I

Übungsblatt 3

Übungsgruppe 4

Jonas Lippert Maximilian Wiesmann

Aufgabe 1.

(a)

Behauptung:
Die Collatz-Folge mit `n=n+1;` terminiert und liegt in $\Theta(\log n)$.

Beweis.
Es sei $(a_k)_n$ die zu $n \in \mathbb{N}$ gehörige Collatz-Folge. Dabei bezeichne $|(a_k)_n|$ ihre jeweilige Länge. Da sich die Folge im schnellsten Fall stets halbiert, folgt dann aus

$$(a_k)_n = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2^k} = n \Leftrightarrow k = \log n,$$

dass

$$|(a_k)_n| \in \Omega(\log n) \text{ mit } \alpha = 1 \text{ und } n_0 = 1.$$

Wegen

$$(a_k)_n \leq 2(a_{k+4})_n$$

gilt außerdem

$$|(a_k)_n| \leq 4 \cdot \log n$$

und damit

$$|(a_k)_n| \in O(\log n) \text{ mit } \alpha = 4 \text{ und } n_0 = 1.$$

□

(b)

Behauptung:
Die Collatz-Folge mit `n=n+3;` terminiert genau dann, wenn $3 \nmid n$.

Beweis.
Hilfslemma.

$$3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid \frac{n}{2} \;\forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Beweis.

$$3 \mid \frac{n}{2} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : 3k = \frac{n}{2} \Rightarrow 6k = n \Rightarrow 3 \mid n.$$

$$3 \mid n \overset{n=2m}{\Rightarrow} 6 \mid m \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : 6k = m \Rightarrow 3 \mid \frac{n}{2}.$$

Hilfslemma.

$$3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid n+3 \;\forall\; n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Beweis.

$$3 \mid (n+3) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : 3k = n+3 \Rightarrow 3(k-1) = n \Rightarrow 3 \mid n.$$
$$3 \mid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^+ : 3(k-1) = n \Rightarrow 3k = n+3 \Rightarrow 3 \mid (n+1).$$

Beh.: Für jeden Startwert n gilt für die zugehörigen Folgeglieder $a(k)$ der Zusammenhang

$$3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid a(k) \;\forall k. \tag{3}$$

Beweis. Es gelte $3 \nmid a(k)$. Nach Definition von $a(k+1)$ folgt die Behauptung induktiv mit Hilfe von (1), bzw. (2).

Die Collatz-Folgen terminieren mit $n \in \{1,2,4,5\}$ und bilden mit $n \in \{3,6\}$ eine Endlosschleife. Man sieht außerdem leicht durch Induktion, dass

$$\frac{n+3}{2} < n \;\forall n \geq 7 \Rightarrow a(k+2) < a(k) \;\forall k.$$

Zusammen mit (3) folgt die Behauptung.

□

Aufgabe 2.

(a)

Sei n eine negative ganze Zahl und sei z die l-stellige 2-Komplementdarstellung von n. Nach Lemma 2.6 gilt

$$z = K_2^l(-n) = \sum_{i=0}^{l-1} (2-1-z_i)2^i \quad \text{für } -n-1 = \sum_{i=0}^{l-1} z_i 2^i$$

Stehen nun $2l$ Ziffern zur Verfügung, so gilt

$$-n-1 = \sum_{i=0}^{2l-1} z_i b^i \quad \text{mit } z_i = 0 \text{ für } l \leq i \leq 2l-1$$

$$\Rightarrow z = K_2^{2l}(-n) = \sum_{i=0}^{2l-1} (2-1-z_i)2^i = \sum_{i=0}^{l-1} (2-1-z_i)2^i + \sum_{i=l}^{2l-1} (2-1-0)2^i$$

D.h. bei $2l$ Ziffern sind in der Komplementdarstellung die ersten l Ziffern alle gleich 1 und die weiteren Ziffern genauso wie in $K_2^l(-n)$.

(b)

Wie in (a) gilt

$$z = K_2^l(-n) = \sum_{i=0}^{l-1} (2-1-z_i)2^i \quad \text{für } -n-1 = \sum_{i=0}^{l-1} z_i 2^i$$

Die i-te Ziffer von z ist also genau dann gleich 0, wenn $z_i = 1$, und gleich 1, wenn $z_i = 0$ ist. Vertauscht man nun also Nullen und Einsen miteinander, so erhält man an jeder Ziffer gerade z_i, also die i-te Ziffer der Binärdarstellung von $-n-1$, was nach Definition $-(z+1)$ entspricht.

Aufgabe 3.

(a)

Ausmultiplizieren und Aufsummieren liefert:

$$
\begin{aligned}
(19375573910)_{-10} &= 0\cdot(-10)^0+1\cdot(-10)^1+9\cdot(-10)^2+3\cdot(-10)^3+7\cdot(-10)^4+5\cdot(-10)^5\\
&\quad +5\cdot(-10)^6+7\cdot(-10)^7+3\cdot(-10)^8+9\cdot(-10)^9+1\cdot(-10)^{10}\\
&= 0\cdot 10^0+9\cdot 10^2+7\cdot 10^4+5\cdot 10^6+3\cdot 10^8+1\cdot 10^{10}\\
&\quad -(1\cdot 10^1+3\cdot 10^3+5\cdot 10^5+7\cdot 10^7+9\cdot 10^9)\\
&= (10305070900)_{10}-(9070503010)_{10}=(1234567890)_{10}
\end{aligned}
$$

(b)

Eine Darstellung von $(9230753)_{10}$ zur Basis -10 ist $(-11371367)_{-10}$. Wir überprüfen dies durch Nachrechnen:

$$
\begin{aligned}
(-11371367)_{-10} &= -(7\cdot(-10)^0+6\cdot(-10)^1+3\cdot(-10)^2+1\cdot(-10)^3\\
&\quad +7\cdot(-10)^4+3\cdot(-10)^5+1\cdot(-10)^6+1\cdot(-10)^7)\\
&= -(7\cdot 10^0+3\cdot 10^2+7\cdot 10^4+1\cdot 10^6-(6\cdot 10^1+1\cdot 10^3+3\cdot 10^5+1\cdot 10^7))\\
&= (10301060)_{10}-(1070307)_{10}=(9230753)_{10}
\end{aligned}
$$

(c) & (d)

Wir geben zwei Darstellungen einer beliebigen Zahl $x\in\mathbb{Z}$ zur Basis -10 an, von denen wir beweisen, dass sie i.A. verschieden sind, und zeigen so, dass stets eine solche Darstellung existiert und diese nicht immer eindeutig ist.
Sei $x=\pm\sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i,\ \ z_i\in\{0,\dots,9\}$ die Darstellung von x zur Basis 10. Für den Fall, dass x negativ ist, müssen in den folgenden Darstellungen nur die Vorzeichen gewechselt werden, wir betrachten deshalb im Folgenden nur den Fall, dass x positiv ist.
1. Darstellung:
Fall 1: l ist gerade.
Wir zeigen, dass die Darstellung

$$x=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1} z'_{2i+1}10^{2i+1}-\sum_{i=0}^{\lceil\frac{l}{2}\rceil-1} z'_{2i}10^{2i}=-\sum_{i=0}^{l-1} z'_i(-10)^i$$

mit

$$z'_j=\begin{cases}10-z_j\ , & \text{wenn } j \text{ gerade}\\ z_j+1\ , & \text{wenn } j \text{ ungerade}\end{cases}$$

eine korrekte Darstellung von x zur Basis -10 ist. Anmerkung: Ist $z_j=9$ und befinden wir uns im zweiten Fall der Darstellungsvorschrift, kommt es zu einem „Übertrag“. Dies stört uns aber nicht, wenn wir die z_j formal als Koeffizienten in der Summe auffassen. Sollte der Fall eintreten, dass man z.B. als erste „Ziffer“ -1 erhält, kann man diese durch 19 ersetzen.
Fall 2: l ist ungerade.
Wir wählen die Darstellung wie in Fall 1, nur ist dies in diesem Fall eine korrekte Darstellung von $x-10^l$ zur Basis -10. Es ist klar, dass wir dann auch eine Darstellung für x

erhalten, indem wir am Ende des Umwandlungsprozesses noch 10^l subtrahieren, d.h. eine 1 als erste Ziffer in der Darstellung zur Basis -10 ergänzen.
Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor -1} z'_{2i+1}10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil -1} z'_{2i}10^{2i} &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor -1} (z_{2i+1}+1)10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil -1} (10-z_{2i})10^{2i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor -1} z_{2i+1}10^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor -1} 10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil -1} 10^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil -1} z_{2i}10^{2i} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i - 10^l = x - 10^l & \text{für ungerades } l \\ \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i = x & \text{für gerades } l \end{cases}
\end{aligned}$$

<u>2. Darstellung:</u>
Wir zeigen, dass die Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil -1} z'_{2i}10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor -1} z'_{2i+1}10^{2i+1} = \sum_{i=0}^{l-1} z'_i(-10)^i$$

mit

$$z'_j = \begin{cases} z_j + 1\ , & \text{wenn } j \text{ gerade} \\ 10 - z_j\ , & \text{wenn } j \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine korrekte Darstellung von $x+1$ zur Basis -10 ist, wenn l ungerade ist, und eine korrekte Darstellung von $x+1-10^l$, wenn l gerade ist (analog zu oben; entsprechend muss dann von der -10-adischen Darstellung noch 1 subtrahiert respektive 1 subtrahiert und 10^l addiert werden).
Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil -1} z'_{2i}10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor -1} z'_{2i+1}10^{2i+1} &= \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil -1} (z_{2i}+1)10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor -1} (10-z_{2i+1})10^{2i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil -1} z_{2i}10^{2i} + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil -1} 10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor -1} 10^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor -1} z_{2i+1}10^{2i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil -1} 10^{2i} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} 10^{2i} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + 10^0 = x+1 & \text{für ungerades } l \\ \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + 10^0 - 10^l = x+1-10^l & \text{für gerades } l \end{cases}
\end{aligned}$$

Diese beiden Darstellungen sind i.A. nicht gleich. Um dies zu zeigen, betrachten wir das Beispiel aus Teil (b):

$$(9230753)_{10} \overset{\text{1. Darst.}}{=} (-11371367)_{-10} \overset{\text{2. Darst.}}{=} (190830854)_{-10}$$

Folglich ist die Darstellung einer Zahl zur Basis -10 nicht immer eindeutig, solche Darstellungen existieren aber. □