

Algorithmische Mathematik I

Übungsgruppe 04

Übungsblatt 3

Jonas Lippert

Maximilian Wiesmann

Aufgabe 1.

Behauptung:

Die Collatz-Folge mit $n=n+1$; im ungeraden Fall terminiert und liegt in $\Theta(\log n)$.

Beweis.

Es sei $(a_k)_n$ die zu $n \in \mathbb{N}$ gehörige Collatz-Folge. Dabei bezeichne $|(a_k)_n|$ ihre jeweilige Länge. Es gilt offenbar

$$2(a_{k+2})_n \leq (a_k)_n \leq \left\lceil \frac{(a_{k-2})_n}{2} \right\rceil \quad \forall k \quad \forall n.$$

Es folgt direkt

$$|(a_k)_n| \in \Omega(\log n) \text{ mit } \alpha = 1 \text{ und } n_0 = 1.$$

Da sich $|(a_k)_n|$ in mindestens jedem vierten Schritt halbiert, gilt außerdem

$$|(a_k)_n| \leq 4 \cdot \log n$$

und damit

$$|(a_k)_n| \in O(\log n) \text{ mit } \alpha = 4 \text{ und } n_0 = 1.$$

□

Behauptung:

Die Collatz-Folge mit $n=n+3$; im ungeraden Fall terminiert genau dann, wenn $3 \nmid n$.

Beweis.

Hilfslemma.

$$3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Beweis.

$$3 \mid \frac{n}{2} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : 3k = \frac{n}{2} \Rightarrow 6k = n \Rightarrow 3 \mid n.$$

$$3 \mid n \stackrel{n=2m}{\Rightarrow} 6 \mid m \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : 6k = m \Rightarrow 3 \mid \frac{n}{2}.$$

Hilfslemma.

$$3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Beweis.

$$3 \mid (n+3) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : 3k = n+3 \Rightarrow 3(k-1) = n \Rightarrow 3 \mid n.$$

$$3 \mid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^+ : 3(k-1) = n \Rightarrow 3k = n+3 \Rightarrow 3 \mid (n+1).$$

Beh.: Für jeden Startwert n gilt für die zugehörigen Folgeglieder $a(k)$ der Zusammenhang

$$3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid a(k) \quad \forall k. \quad (3)$$

Beweis. Es gelte $3 \nmid a(k)$. Nach Definition von $a(k+1)$ folgt die Behauptung induktiv mit Hilfe von (1), bzw. (2).

Die Collatz-Folgen terminieren mit $n \in \{1, 2, 4, 5\}$ und bilden mit $n \in \{3, 6\}$ eine Endlosschleife. Man sieht außerdem leicht durch Induktion, dass

$$\frac{n+3}{2} < n \quad \forall n \geq 7 \Rightarrow a(k+2) < a(k) \quad \forall k.$$

Zusammen mit (3) folgt die Behauptung.

□