

# Algorithmische Mathematik I

## 3. Übung

### Übungsgruppe 4

Jonas Lippert

Maximilian Wiesmann

28. Oktober 2018

**1**

**(a)**

**2**

**(a)**

Sei  $n$  eine negative ganze Zahl und sei  $z$  die  $l$ -stellige 2-Komplementdarstellung von  $n$ . Nach Lemma 2.6 gilt

$$z = K_2^l(-n) = \sum_{i=0}^{l-1} (2 - 1 - z_i)2^i \quad \text{für} \quad -n - 1 = \sum_{i=0}^{l-1} z_i 2^i$$

Stehen nun  $2l$  Ziffern zur Verfügung, so gilt

$$\begin{aligned} -n - 1 &= \sum_{i=0}^{2l-1} z_i 2^i \quad \text{mit} \quad z_i = 0 \quad \text{für} \quad l \leq i \leq 2l - 1 \\ \Rightarrow z &= K_2^{2l}(-n) = \sum_{i=0}^{2l-1} (2 - 1 - z_i)2^i = \sum_{i=0}^{l-1} (2 - 1 - z_i)2^i + \sum_{i=l}^{2l-1} (2 - 1 - 0)2^i \end{aligned}$$

D.h. bei  $2l$  Ziffern sind in der Komplementdarstellung die ersten  $l$  Ziffern alle gleich 1 und die weiteren Ziffern genauso wie in  $K_2^l(-n)$ .

**(b)**

Wie in (a) gilt

$$z = K_2^l(-n) = \sum_{i=0}^{l-1} (2 - 1 - z_i)2^i \quad \text{für} \quad -n - 1 = \sum_{i=0}^{l-1} z_i 2^i$$

Die  $i$ -te Ziffer von  $z$  ist also genau dann gleich 0, wenn  $z_i = 1$ , und gleich 1, wenn  $z_i = 0$  ist. Vertauscht man nun also Nullen und Einsen miteinander, so erhält man an jeder Ziffer gerade  $z_i$ , also die  $i$ -te Ziffer der Binärdarstellung von  $-n - 1$ , was nach Definition  $-(z + 1)$  entspricht.

### 3

#### (a)

Ausmultiplizieren und Aufsummieren liefert:

$$\begin{aligned}(19375573910)_{-10} &= 0 \cdot (-10)^0 + 1 \cdot (-10)^1 + 9 \cdot (-10)^2 + 3 \cdot (-10)^3 + 7 \cdot (-10)^4 + 5 \cdot (-10)^5 \\ &\quad + 5 \cdot (-10)^6 + 7 \cdot (-10)^7 + 3 \cdot (-10)^8 + 9 \cdot (-10)^9 + 1 \cdot (-10)^{10} \\ &= 0 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^8 + 1 \cdot 10^{10} \\ &\quad - (1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^9) \\ &= (10305070900)_{10} - (9070503010)_{10} = (1234567890)_{10}\end{aligned}$$

#### (b)

Eine Darstellung von  $(9230753)_{10}$  zur Basis  $-10$  ist  $(-11371367)_{-10}$ . Wir überprüfen dies durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}(-11371367)_{-10} &= -(7 \cdot (-10)^0 + 6 \cdot (-10)^1 + 3 \cdot (-10)^2 + 1 \cdot (-10)^3 \\ &\quad + 7 \cdot (-10)^4 + 3 \cdot (-10)^5 + 1 \cdot (-10)^6 + 1 \cdot (-10)^7) \\ &= -(7 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^6 - (6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^7)) \\ &= (10301060)_{10} - (1070307)_{10} = (9230753)_{10}\end{aligned}$$

#### (c) & (d)

Wir geben zwei Darstellungen einer beliebigen Zahl  $x \in \mathbb{Z}$  zur Basis  $-10$  an, von denen wir beweisen, dass sie i.A. verschieden sind, und zeigen so, dass stets eine solche Darstellung existiert und diese nicht immer eindeutig ist.

Sei  $x = \pm \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i$ ,  $z_i \in \{0, \dots, 9\}$  die Darstellung von  $x$  zur Basis 10. Für den Fall, dass  $x$  negativ ist, müssen in den folgenden Darstellungen nur die Vorzeichen gewechselt werden, wir betrachten deshalb im Folgenden nur den Fall, dass  $x$  positiv ist.

1. Darstellung:

Fall 1:  $l$  ist gerade.

Wir zeigen, dass die Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z'_{2i+1} 10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z'_{2i} 10^{2i} = - \sum_{i=0}^{l-1} z'_i (-10)^i$$

mit

$$z'_j = \begin{cases} 10 - z_j, & \text{wenn } j \text{ gerade} \\ z_j + 1, & \text{wenn } j \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine korrekte Darstellung von  $x$  zur Basis  $-10$  ist. Anmerkung: Ist  $z_j = 9$  und befinden wir uns im zweiten Fall der Darstellungsvorschrift, kommt es zu einem „Übertrag“. Dies stört uns aber nicht, wenn wir die  $z_j$  formal als Koeffizienten in der Summe auffassen. Sollte der Fall eintreten, dass man z.B. als erste „Ziffer“  $-1$  erhält, kann man diese durch 19 ersetzen.

Fall 2:  $l$  ist ungerade.

Wir wählen die Darstellung wie in Fall 1, nur ist dies in diesem Fall eine korrekte Darstellung von  $x - 10^l$  zur Basis  $-10$ . Es ist klar, dass wir dann auch eine Darstellung für  $x$

erhalten, indem wir am Ende des Umwandlungsprozesses noch  $10^l$  subtrahieren, d.h. eine 1 als erste Ziffer in der Darstellung zur Basis  $-10$  ergänzen.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z'_{2i+1} 10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z'_{2i} 10^{2i} &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} (z_{2i+1} + 1) 10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} (10 - z_{2i}) 10^{2i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z_{2i+1} 10^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} 10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} 10^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z_{2i} 10^{2i} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i - 10^l = x - 10^l & \text{für ungerades } l \\ \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i = x & \text{für gerades } l \end{cases}
\end{aligned}$$

## 2. Darstellung:

Wir zeigen, dass die Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z'_{2i} 10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z'_{2i+1} 10^{2i+1} = \sum_{i=0}^{l-1} z'_i (-10)^i$$

mit

$$z'_j = \begin{cases} z_j + 1, & \text{wenn } j \text{ gerade} \\ 10 - z_j, & \text{wenn } j \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine korrekte Darstellung von  $x + 1$  zur Basis  $-10$  ist, wenn  $l$  ungerade ist, und eine korrekte Darstellung von  $x + 1 - 10^l$ , wenn  $l$  gerade ist (analog zu oben; entsprechend muss dann von der  $-10$ -adischen Darstellung noch 1 subtrahiert respektive 1 subtrahiert und  $10^l$  addiert werden).

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z'_{2i} 10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z'_{2i+1} 10^{2i+1} &= \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} (z_{2i} + 1) 10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} (10 - z_{2i+1}) 10^{2i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z_{2i} 10^{2i} + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} 10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} 10^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z_{2i+1} 10^{2i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} 10^{2i} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} 10^{2i} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + 10^0 = x + 1 & \text{für ungerades } l \\ \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + 10^0 - 10^l = x + 1 - 10^l & \text{für gerades } l \end{cases}
\end{aligned}$$

Diese beiden Darstellungen sind i.A. nicht gleich. Um dies zu zeigen, betrachten wir das Beispiel aus Teil (b):

$$(9230753)_{10} \stackrel{1. \text{ Darst.}}{=} (-11371367)_{-10} \stackrel{2. \text{ Darst.}}{=} (190830854)_{-10}$$

Folglich ist die Darstellung einer Zahl zur Basis  $-10$  nicht immer eindeutig, solche Darstellungen existieren aber.  $\square$