Algorithmische Mathematik I
Übungsgruppe 04

Übungsblatt 3

Jonas Lippert   Maximilian Wiesmann

Aufgabe 1.

Behauptung:
Die Collatz-Folge mit `n=n+1;` im ungeraden Fall terminiert und liegt in $\Theta(\log n)$.

Beweis.
Es sei $(a_k)_n$ die zu $n \in \mathbb{N}$ gehörige Collatz-Folge. Dabei bezeichne $|(a_k)_n|$ ihre jeweilige Länge. Es gilt offenbar

$$2(a_{k+2})_n \leq (a_k)_n \leq \left\lceil \frac{(a_{k-2})_n}{2} \right\rceil \ \forall\, k\ \forall\, n.$$

Es folgt direkt

$$|(a_k)_n| \in \Omega(\log n) \text{ mit } \alpha = 1 \text{ und } n_0 = 1.$$

Da sich $|(a_k)_n|$ in mindestens jedem vierten Schritt halbiert, gilt außerdem

$$|(a_k)_n| \leq 4 \cdot \log n$$

und damit

$$|(a_k)_n| \in O(\log n) \text{ mit } \alpha = 4 \text{ und } n_0 = 1.$$

$\square$

Behauptung:
Die Collatz-Folge mit `n=n+3;` im ungeraden Fall terminiert genau dann, wenn $3 \nmid n$.

Beweis.
Hilfslemma.

$$3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid \frac{n}{2} \; \forall \; n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Beweis.

$$3 \mid \frac{n}{2} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : 3k = \frac{n}{2} \Rightarrow 6k = n \Rightarrow 3 \mid n.$$

$$3 \mid n \overset{n=2m}{\Rightarrow} 6 \mid m \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : 6k = m \Rightarrow 3 \mid \frac{n}{2}.$$

Hilfslemma.

$$3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid n + 3 \; \forall \; n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Beweis.

$$3 \mid (n+3) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : 3k = n + 3 \Rightarrow 3(k-1) = n \Rightarrow 3 \mid n.$$

$$3 \mid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^{+} : 3(k-1) = n \Rightarrow 3k = n + 3 \Rightarrow 3 \mid (n+1).$$

Beh.: Für jeden Startwert n gilt für die zugehörigen Folgeglieder $a(k)$ der Zusammenhang

$$3 \nmid n \Leftrightarrow 3 \nmid a(k) \; \forall k. \tag{3}$$

Beweis. Es gelte $3 \nmid a(k)$. Nach Definition von $a(k+1)$ folgt die Behauptung induktiv mit Hilfe von (1), bzw. (2).

Die Collatz-Folgen terminieren mit $n \in \{1, 2, 4, 5\}$ und bilden mit $n \in \{3, 6\}$ eine Endlosschleife. Man sieht außerdem leicht durch Induktion, dass

$$\frac{n+3}{2} < n \; \forall n \geq 7 \Rightarrow a(k+2) < a(k) \; \forall k.$$

Zusammen mit (3) folgt die Behauptung.

$\square$