

Algorithmische Mathematik I

3. Übung

Jonas Lippert

Maximilian Wiesmann

27. Oktober 2018

1

(a)

2

(a)

Sei n eine negative ganze Zahl und sei z die 2-Komplementdarstellung von n . Nach Lemma 2.6 gilt

$$z = K_2^l(-n) = \sum_{i=0}^{l-1} (2 - 1 - z_i)2^i \quad \text{für} \quad -n - 1 = \sum_{i=0}^{l-1} z_i 2^i$$

Stehen nun $2l$ Ziffern zur Verfügung, so gilt

$$-n - 1 = \sum_{i=0}^{2l-1} z_i 2^i \quad \text{mit} \quad z_i = 0 \quad \text{für} \quad l \leq i \leq 2l - 1$$

$$\Rightarrow z = K_2^{2l}(-n) = \sum_{i=0}^{2l-1} (2 - 1 - z_i)2^i = \sum_{i=0}^{l-1} (2 - 1 - z_i)2^i + \sum_{i=l}^{2l-1} (2 - 1 - 0)2^i$$

D.h. bei $2l$ Ziffern sind in der Komplementdarstellung die ersten l Ziffern alle gleich 1 und die weiteren Ziffern genauso wie in $K_2^l(-n)$.

(b)

Wie in (a) gilt

$$z = K_2^l(-n) = \sum_{i=0}^{l-1} (2 - 1 - z_i)2^i \quad \text{für} \quad -n - 1 = \sum_{i=0}^{l-1} z_i 2^i$$

Die i -te Ziffer von z ist also genau dann gleich 0, wenn $z_i = 1$, und gleich 1, wenn $z_i = 0$ ist. Vertauscht man nun also Nullen und Einsen miteinander, so erhält man an jeder Ziffer gerade z_i , also die i -te Ziffer der Binärdarstellung von $-n - 1$. Es entsteht also genau die Binärdarstellung von $-n - 1$.

3

(a)

Ausmultiplizieren und Aufsummieren liefert:

$$\begin{aligned}(19375573910)_{-10} &= 0 \cdot (-10)^0 + 1 \cdot (-10)^1 + 9 \cdot (-10)^2 + 3 \cdot (-10)^3 + 7 \cdot (-10)^4 + 5 \cdot (-10)^5 \\ &\quad + 5 \cdot (-10)^6 + 7 \cdot (-10)^7 + 3 \cdot (-10)^8 + 9 \cdot (-10)^9 + 1 \cdot (-10)^{10} \\ &= 0 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^8 + 1 \cdot 10^{10} \\ &\quad - (1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^9) \\ &= (10305070900)_{10} - (9070503010)_{10} = (1234567890)_{10}\end{aligned}$$

(b)

Eine Darstellung von $(9230753)_{10}$ zur Basis -10 ist $(-11371367)_{-10}$. Wir überprüfen dies durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}(-11371367)_{-10} &= -(7 \cdot (-10)^0 + 6 \cdot (-10)^1 + 3 \cdot (-10)^2 + 1 \cdot (-10)^3 \\ &\quad + 7 \cdot (-10)^4 + 3 \cdot (-10)^5 + 1 \cdot (-10)^6 + 1 \cdot (-10)^7) \\ &= -(7 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^6 - (6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^7)) \\ &= (10301060)_{10} - (1070307)_{10} = (9230753)_{10}\end{aligned}$$

(c) & (d)

Wir geben zwei konkrete, i.A. verschiedene Darstellungen einer beliebigen Zahl $x \in \mathbb{Z}$ zur Basis -10 an und zeigen so, dass es stets eine solche Darstellung gibt und diese nicht immer eindeutig ist.

Sei $x = \pm \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i$, $z_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Darstellung von x zur Basis 10. Für den Fall, dass x negativ ist, müssen in den folgenden Darstellungen einfach nur die Vorzeichen geändert werden, wir betrachten deshalb im Folgenden nur den Fall, dass x positiv ist.

1. Darstellung:

Fall 1: l ist gerade.

Wir zeigen, dass die Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z'_{2i+1} 10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z'_{2i} 10^{2i} = - \sum_{i=0}^{l-1} z'_i (-10)^i$$

mit

$$z'_j = \begin{cases} 10 - z_j, & \text{wenn } j \text{ gerade} \\ z_j + 1, & \text{wenn } j \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine korrekte Darstellung von x zur Basis -10 ist. Anmerkung: Ist $z_j = 9$ und befinden wir uns im zweiten Fall der Darstellungsvorschrift, kommt es zu einem „Übertrag“. Dies stört uns aber nicht, wenn wir die z_j einfach formal als Koeffizienten in der Summe auffassen. Sollte der Fall eintreten, dass man z.B. als erste „Ziffer“ -1 erhält, kann man diese durch 19 ersetzen.

Fall 2: l ist ungerade.

Wir wählen die Darstellung wie in Fall 1, nur ist dies in diesem Fall eine korrekte Darstellung von $x - 10^l$ zur Basis -10 . Es ist klar, dass wir dann auch eine Darstellung für x

erhalten, indem wir am Ende des Umwandlungsprozesses noch 10^l subtrahieren, d.h. eine 1 als erste Ziffer in der Darstellung zur Basis -10 ergänzen.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z'_{2i+1} 10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z'_{2i} 10^{2i} &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} (z_{2i+1} + 1) 10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} (10 - z_{2i}) 10^{2i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z_{2i+1} 10^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} 10^{2i+1} - \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} 10^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z_{2i} 10^{2i} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i - 10^l = x - 10^l & \text{für ungerades } l \\ \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i = x & \text{für gerades } l \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Darstellung:

Wir zeigen, dass die Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z'_{2i} 10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z'_{2i+1} 10^{2i+1} = \sum_{i=0}^{l-1} z'_i (-10)^i$$

mit

$$z'_j = \begin{cases} z_j + 1, & \text{wenn } j \text{ gerade} \\ 10 - z_j, & \text{wenn } j \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine korrekte Darstellung von $x + 1$ zur Basis -10 ist, wenn l ungerade ist, und eine korrekte Darstellung von $x + 1 - 10^l$, wenn l gerade ist (analog zu oben; entsprechend muss dann von der -10 -adischen Darstellung noch 1 subtrahiert respektive 1 subtrahiert und 10^l addiert werden).

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z'_{2i} 10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z'_{2i+1} 10^{2i+1} &= \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} (z_{2i} + 1) 10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} (10 - z_{2i+1}) 10^{2i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} z_{2i} 10^{2i} + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} 10^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} 10^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1} z_{2i+1} 10^{2i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + \sum_{i=0}^{\lceil \frac{l}{2} \rceil - 1} 10^{2i} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} 10^{2i} \\
&= \begin{cases} \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + 10^0 = x + 1 & \text{für ungerades } l \\ \sum_{i=0}^{l-1} z_i 10^i + 10^0 - 10^l = x + 1 - 10^l & \text{für gerades } l \end{cases}
\end{aligned}$$

Diese beiden Darstellungen sind i.A. nicht gleich. Um dies zu zeigen, betrachten wir das Beispiel aus Teil (b):

$$(9230753)_{10} \stackrel{1. \text{ Darst.}}{=} (-11371367)_{-10} \stackrel{2. \text{ Darst.}}{=} (190830854)_{-10}$$

Folglich ist die Darstellung einer Zahl zur Basis -10 i.A. nicht eindeutig, solche Darstellungen existieren aber. \square