COURS SEMESTRE I

M1201 Math discrètes

Logique – Arithmétique – Relations binaires

CHAPITRE 2

LES ENSEMBLES

I ENSEMBLE, APPARTENANCE

La notion d'ensemble est une notion intuitive, cependant voici quelques règles concernant les ensembles.

<u>Règles sur les ensembles</u>

*Un **ensemble** E est une collection d'objets, appelés éléments de E. Cette collection vérifiera deux propositions:*

- ***« $a \in E$ » ou « a appartient à E » est une proposition**, pour tout objet a.*
- ***On ne peut écrire $a \in a$** ou **$E \in E$,** un même être mathématique ne peut être à la fois élément et ensemble auquel il appartient.*
- *Un ensemble peut cependant être élément d'un autre ensemble!*

Exemples d'ensemble:

Nous connaissons déjà:

- *L'ensemble des entiers naturels N*
- *L'ensemble des entiers relatifs Z*
- *L'ensemble des décimaux D*
- *L'ensemble des nombres rationnels Q*
- *L'ensemble des nombres réels R*
- *L'ensemble des nombres complexes C*

Les ensembles usuels de variables

Alphabet : de alpha et bêta les deux premières lettres de l'alphabet grec.

L'alphabet latin en minuscules : a b c d etc.

L'alphabet latin en majuscules : A B C D etc.

L'alphabet grec en minuscules : **α β γ δ ε** ζ **η θ** ι κ **λ μ ν ξ** ο **π ρ** ς **σ τ υ φ χ ψ ω**

L'alphabet grec en majuscules : Α Β Γ **Δ** Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο **Π** Ρ **Σ** Τ Υ **Φ Χ Ψ Ω**

Les plus utilisés

D'autres exemples d'ensemble:

- $E = \{1, 2, 3\}$ *ensemble défini en* ***extension***

- $E = \{n \in N \text{ t.q } 1 \leq n \leq 3\}$

E est le même ensemble défini en ***compréhension***
à l'aide d'un prédicat défini sur N, $1 \leq n \leq 3$.

Définition :
Egalité d'ensembles

Deux ensembles E et F sont égaux s' ils sont constitués des mêmes éléments.

- *Pour tout objet a*

$$\boldsymbol{a \in E \Leftrightarrow a \in F} \quad \textit{est vraie}$$

Définition:
Ensemble fini, ensemble vide

1. *Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments. On peut dire aussi qu'il est en bijection avec {1,2,….,n} où n est un entier naturel.*

Exemple d'ensemble fini: L'ensemble des lettres de « logique »

Exemples d'ensemble infini: ***N, Z, Q, R, C*** *,* $[0,2[$ *, l'ensemble des points d'un cercle.*

2. *L'ensemble qui ne possède aucun élément est l'ensemble vide noté* $\phi = \left\{ x \in E \ t.q \ \overline{P(x)} \right\}$

Où P est un théorème défini sur E, E ensemble donné.

ou $\phi = \left\{ x \in R \ tel \ que \sqrt{x^2} < 0 \right\}$

ou encore

$\phi = \{ x / x \text{ est une consonne du mot oui} \}$

II ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

III1. Inclusion:

Soient E et F, 2 ensembles donnés, F est un sous-ensemble de E si:

tout élément de F est élément de E

notation : $\boldsymbol{F \subset E}$

De plus:

$$F \subset E \quad \Leftrightarrow \quad \{\text{pour tout objet } x,\ x \in F \Rightarrow x \in E\}$$

Remarques:

1. Lorsque $F \subset E$ et $F \neq E$

l'inclusion est stricte et $F \subsetneq E$

2. $F \subset E$ signifie l'inclusion « au sens large » et peut donc signifier $F = E$

3. Un sous-ensemble de E est aussi appelé une ***partie de E***

Une partie non vide et distincte de E est appelée

partie propre de E

EXERCICES

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

Utiliser l'algèbre des propositions pour démontrer les résultats suivants:

1. *L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble*
2. $E = F \Leftrightarrow E \subset F \wedge F \subset E$
3. $E \subset E$
4. $E \subset F \wedge F \subset G \Rightarrow E \subset G$

II2. Ensemble des parties d'un ensemble

E est un ensemble donné, l'ensemble de tous les sous-ensembles de E est appelé

ensemble des parties de E *et noté* **P(E)**

Soit la proposition:

$$A \subset E \Leftrightarrow A \in P(E)$$

Remarques:

$\emptyset \subset E$, pour tout E, ce qui est équivalent à $\emptyset \in P(E)$

P(E) admet donc toujours au moins un élément

D'où le résultat,

Pour tout E, P(E) est non vide

$$P(E) \neq \emptyset$$

Exercices:

*1.Déterminer P(E) pour un ensemble à **1** élément.*

*2.Déterminer P(E) pour un ensemble à **2** éléments.*

*3.Déterminer P(E) pour un ensemble à **3** éléments.*

III OPERATIONS DANS P(E)

E est défini une fois pour toute dans tout le § ***III*** *comme un ensemble non vide.*

III1. Complémentaire:

A est une partie de E, le ***complémentaire*** *de A dans E est la partie de E constituée des éléments de E qui n'appartiennent pas à A*

Notation: $C_E A$ ou $\underbrace{\mathrm{CA} \text{ ou } \overline{\mathrm{A}}}_{\text{sans ambigüité sur E}}$

$$\text{pour tout } x \in E, x \in C_E A \Leftrightarrow x \in E \wedge x \notin A$$

EXERCICES

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

1. $B = C_E A \Leftrightarrow A = C_E B$
2. $C_E(C_E A) = A$
3. $C_E \varphi = E \;\; et \; C_E E = \varphi$

III2. Intersection:

1. *Soient A et B deux parties de E, l'intersection de A et de B est formée des éléments communs à A et B.*

Notation: $\boldsymbol{A \cap B}$

pour tout $x \in E, x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

2. *A et B sont* ***disjoints*** *si leur intersection est vide soit* $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$

III3. Réunion:

Reprenons A et B. La réunion de A et de B est formé des éléments appartenant à A ou à B.

Notation: $A \cup B$

pour tout $x \in E$, $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

Remarque:

Le « ou » cité est le « ou » logique (non exclusif)

III4. Différence ensembliste:

Soit à nouveau A et B. La différence ensembliste de A et de B est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Notation: $A - B$ *ou* $A \setminus B$

pour tout $x \in E, x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

Il suit l'écriture ensembliste:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

III5. Différence symétrique:

La différence symétrique de A et B , noté $A \,\Delta\, B$, est l'ensemble suivant:

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$$

Proposition :

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$$

(à démontrer)

$$\text{pour tout } x \in E, x \in A \Delta B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

III6. Propriétés de l'intersection, de la réunion et de la complémentation:

Soient A, B, C des ensembles donnés:

1. $A \cap A = A$ $\qquad A \cap E = A$

   $A \cup A = A$ $\qquad A \cup \phi = A$

2. Commutativité:

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad A \cup B = B \cup A$

3. Associativité:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4. *Distributivité de* $\cap$ *sur* $\cup$, *de* $\cup$ *sur* $\cap$.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. *Lois de De Morgan.*

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$$

Exercices

•1 $A \Delta A = \phi$, *pour tout* $A \in P(E)$

•2 $A \cap \left(B \Delta C\right) = \left(A \cap B\right) \Delta \left(A \cap C\right)$

pour tout $A, B, C \in P(E)$

IV PREDICAT DEFINI SUR UN ENSEMBLE QUANTIFICATEURS

IV1. Prédicat défini sur un ensemble:

E est un ensemble donné, prenons un prédicat, si sa variable est un élément de E , alors il s'agit d'un **prédicat défini sur E**.

Exemple:

« Le nombre réel x > 10 »

est un prédicat défini sur R.

Notation: **$A(x), x \in E$**

IV2. Prédicat et sous-ensemble de E:

Soit A(x), un prédicat défini sur E, on peut alors lui associer une partie de E formée de tous les éléments pour lesquels A(x) est vraie. Soit F

$$F = \{x \in E \text{ t.q } A(x)\}$$

Exemple:

Soit le prédicat A(x) défini sur R par :

« $x^2 - 4x + 3 = 0$ »

$F = \{1, 3\}$

<u>*IV3. Quantificateur existentiel:*</u>

A(x) est un prédicat défini sur E.

Supposons que la proposition A(x) est vraie pour au moins une valeur de $x \in E$, soit:

Il existe, au moins, $x \in E$ t.q A(x) est vraie

$\Leftrightarrow \boldsymbol{F \neq \varnothing}$

$\Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{\exists x \in E \,/\, A(x)}}$

$\exists$ *est le* ***quantificateur existentiel***

IV4.Quantificateur universel:

Cette fois , la proposition est vraie pour toutes valeurs x de E, soit:

Quelque soit $x \in E$, $A(x)$ est vraie

$$\Leftrightarrow \forall x \in E , A(x)$$

$$\Leftrightarrow F = E$$

$\forall$ *est le* ***quantificateur universel.***

Exemples:

1. $A(x)$: « $x^2 - 4x + 3 = 0$ », $x \in R$.

2. $B(x)$: « $x^2 + x + 1 > 0$ », $x \in R$.

<u>Remarques:</u>

Les quantificateurs $\exists$ *et* $\forall$, *agissent sur un prédicat comme des opérateurs logiques.*

« $\exists x \in E \,/\, A(x)$ » ; « $\forall x \in E\ ,\ A(x)$ »

sont des propositions dont la valeur de vérité est à déterminer.

IV5. Quantificateurs en « cascade »

Lorsqu'un prédicat dépend de plusieurs variables, il peut être nécessaire d'utiliser plusieurs quantificateurs. Soit $P(x, y, z)$ un prédicat défini pour $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$. L'utilisation des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ permet d'écrire une proposition à partir du prédicat $P(x, y, z)$.

Exemple:

« $\forall x \in E, \exists y \in F, \exists z \in G$ t.q $P(x, y, z)$ »

IV6. Relations entre ∃ et ∀

Soit A un prédicat défini sur E, Considérons la proposition:

« $\boldsymbol{\forall x \in E , A(x)}$ » $\Leftrightarrow \boldsymbol{F = E}$

Nous pouvons écrire sa négation :

« $\overline{\forall x \in E , A(x)}$ »

$\Leftrightarrow F \neq E \Leftrightarrow C_E F \neq C_E E \Leftrightarrow C_E F \neq \varnothing$

$\Leftrightarrow$ « $\exists x \in E \,/\, \overline{A}(x)$ » *donc:*

« $\boldsymbol{\overline{\forall x \in E , A(x)}}$ » $\Leftrightarrow$ « $\boldsymbol{\exists x \in E \,/\, \overline{A}(x)}$ »

De même, considérons la proposition:

« $\exists x \in E \,/\, A(x)$ » $\Leftrightarrow F \neq \emptyset$

Nous pouvons écrire sa négation:

$\overline{\exists\, x \in E \text{ t.q } A(x)} \Leftrightarrow F = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \in E, \overline{A(x)}$

Donc,

$$\boldsymbol{\overline{\text{« } \exists\, x \in E \,/\, A(x) \text{ »}} \Leftrightarrow \text{« } \forall x \in E, \overline{A(x)} \text{ »}}$$

Exercices:

Soient A(x), B(x) deux prédicats définis sur E.

$$F = \{x \in E \ t.q \ A(x)\} \quad G = \{x \in E \ t.q \ B(x)\}$$

Montrer que :

1. $F \subset G \Leftrightarrow [\forall x \in E, A(x) \Rightarrow B(x)]$
2. $F = G \Leftrightarrow [\forall x \in E, A(x) \Leftrightarrow B(x)]$
3. $(F \cap G = \phi \wedge F \cup G = E) \Leftrightarrow [\forall x \in E, A(x) \Leftrightarrow \overline{B}(x)]$
4. *Ecrire la négation de la proposition suivante:*

$$\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C \ t.q \ \forall t \in D \quad P(x, y, z, t)$$

EXERCICE

(travail personnel à rendre suivant les indications données en cours)

Soit $n \geq 1$ *un entier naturel. On se donne n + 1 réels*

$x_0, x_1, \ldots x_n$ *de [0, 1] vérifiant*

$0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1$

. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante :

Il existe deux de ces réels distants de moins de 1/n.

1. Ecrire a l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ *une formule logique équivalente à cette propriété.*

2. Ecrire la négation de cette formule logique.

3. Rédiger une démonstration par l'absurde de cette propriété (on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$ *) et conclure.*

4. Démontrer le même résultat en énonçant l'exercice des tiroirs

(cf raisonnement par l'absurde)