

1 Mots sur un alphabet, langages

On considère l'alphabet $A = \{a, b\}$.

- Étant donnés les mots $u = aa$ et $v = bab$, écrire les mots uv , $(uv)^2$ et u^3v .
- Listez les mots du langage $L = A^3$ (mots de longueur 3 définis sur l'alphabet A).
- On considère les trois langages suivants :
 - $L_1 = \{u.v \mid u \in A^+, v \in A^+\}$ (A^+ : mots non-vides construits sur l'alphabet A)
 - $L_2 = \{u.v \mid u \in A, v \in A^*\}$
 - $L_3 = \{u.v \mid u \in A^*, v \in A^*\}$

À quoi correspondent ces langages ?

2 Opérations sur les langages

Les égalités suivantes sont-elles vérifiées pour tous langages L_1, L_2 et L_3 ?

- $L_1.(L_2 \cup L_3) = L_1.L_2 \cup L_1.L_3$
- $L_1.(L_2 \cap L_3) = L_1.L_2 \cap L_1.L_3$
- $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$
- $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$

Si la réponse est positive, une démonstration est nécessaire. Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on doit montrer deux propriétés : $x \in A \implies x \in B$, et $x \in B \implies x \in A$.

Par contre, si la réponse est négative, un contre-exemple suffit...

3 Relation « être préfixe de »

Montrez que la relation « être préfixe de » est une relation d'ordre partiel sur A^* , c'est-à-dire qu'elle est transitive, antisymétrique et réflexive. (Vous avez le droit de poser des questions.)

4 Propriété de la concaténation

Démontrez la propriété suivante :

Si u, v et w sont trois mots de A^* , alors $uw = vw \iff wu = wv \iff u = v$.

On pourra écrire les mots u, v et w sous la forme $u = u_1, \dots, u_p, v = v_1, \dots, v_q$ et $w = w_1, \dots, w_r$.

5 Lemme de Levi

Démontrez le lemme de Levi :

Si u et v sont tous deux préfixes de w , alors u est préfixe de v , ou v est préfixe de u .

On pourra considérer deux cas, (1) $|u| \geq |v|$ et (2) $|u| < |v|$.

6 Mots et langages rationnels

Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$. On considère les langages rationnels définis par des expressions rationnelles de la façon suivante : $L_1 = b^*a$, $L_2 = a^+b^+$ et $L_3 = a^*b^+(a + b)$.

- Les mots suivants appartiennent-ils à ces langages : $a, b, aba, abb, ba, baa, abab, abba$?
- Donnez une expression rationnelle pour les langages $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_3$, $L_2 \cap L_3$.
- Quelle forme ont les mots du langage L_1^* ? Et ceux de L_2^* ?

7 Langages rationnels

Sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$, donnez des expressions rationnelles décrivant les langages suivants (basés sur la représentation binaire des nombres) :

- les nombres pairs,
- les multiples de 8,
- les nombres congrus à 3 modulo 16,
- les mots contenant la séquence 011 (consécutifs),
- les mots sans 0, les mots sans 01, puis les mots sans 011,
- les mots ayant un nombre pair de 1,
- les mots ayant un nombre impair de 0,
- les mots ayant un nombre pair de 1 et impair de 0.