Feuille de TD 2
S2Analyse
Continuité et Dérivation

Exercice 1
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *une fonction continue. Montrer que* f *admet au moins un point fixe, c'est à dire un point* x_0 *tel que* $f(x_0) = x_0$. *(on pourra considérer la fonction* $g(x) = f(x) - x$ *et discuter du signe de* $g(0)$ *et* $g(1)$*).*

Exercice 2
On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \frac{sin(x)}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^*, \ f(0) = 1.$$

1) Justifiez que $Lim_{x \to 0} f(x) = 1$.*(On pourra exprimer* $\frac{sin(x)}{x}$ *comme un taux d'accroissement)*
2) Que peut-on dire de la fonction f *?*
3) Montrer que $f(x) - x$ *s'annule sur le segment* $[0, 3\Pi/2]$.
4) Montrer qi'il existe $c \in [\Pi, 2\Pi]$ *tel que :*

$$\frac{c \cdot cos(c) - sin(c)}{c^2} = 0.$$

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, vérifiant* $f(x + y) = f(x).f(y)$. *On pose* $a = f(1)$*et on suppose* $a \neq 0$.

1. *Montrer que* $a > 0$ *(On pourra écrire* $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$*).*
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a^n$.
3. *Montrer que c'est encore valable pour* $n \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Q}$.
4. *En utilisant que tout nombre réel* x *est limite d'une suite* $(r_n)_{n \geq 0}$ *de nombres rationnels et la continuité de* f *en* x, *Montrer que* $f(x) = a^x$ *pour tout nombre réel* x.
5. *Que dire d'une fonction* f *vérifiant les hypothèses de l'énoncé ?*

Exercice 4
Soient p *et* q *deux nombres réels et soit* n *un entier strictement positif. On considère le polynôme :*

$$P(x) = x^n + px + q.$$

1. *On suppose n pair. Montrer que P ne peut avoir plus de deux racines réelles. (Indication : on pourra raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de Rolle, puis en dénombrant les racines de P'.)*
2. *On suppose n impair. Montrer que P ne peut avoir plus de trois racines réelles (même méthode).*

Exercice 5

1. *Soit $x > 0$ fixé. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto e^{\frac{1}{t}}$ sur l'intervalle $[x, x+1]$, obtenir un encadrement de $|e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}|$.*
2. *En déduire que $x^2(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}})$ admet une limite en $+\infty$ et donner cette limite.*

Exercice 6

Soit f une fonction dérivable sur $]0,1]$ et telle que $|f'(x)| < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = f(1/n)$.

1. *Donner une majoration de $|u_n - u_m|$ ne dépendant que de m et de n (On pourra utiliser le théorème des accroissements fini sur un intervalle convenable).*
2. *En déduire que cette suite est convergente. (On pourra constater que celle-ci est de Cauchy).*

Exercice 7

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $|f'(x)| < 1$.

1. *Montrer que f admet au maximum un seul point fixe.*
2. *On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ de la forme : $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Décrire les comportements possibles de ces suites en fonction du nombre de point fixe de f.*