Feuille de TD 0

1) Distanciel
Soit x un nombre réel, on désigne par valeur absolue de x et on note $|x|$ le nombre x si $x \geq 0$ et $-x$ si $x \leq 0$. Une manière (plus efficace) de le dire est que $|x|$ est le maximum des deux nombres x et $-x$, c'est à dire $|x| = Max(x, -x)$. Ainsi majorer $|x|$ c'est majorer à la fois x et $-x$. Si maintenant x et y sont deux nombres réels la quantité $|x - y|$ est la distance de x à y. Voici quelques propriétés de la valeur absolue.

Proposition 0.1 *(A connaitre)*
1) Si $x, y \in \mathbb{R}$, $|x.y| = |x|.|y|$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2}$.
3)$\forall \epsilon > 0$, $|x| < \epsilon \iff -\epsilon < x < \epsilon$. (Idem avec des inégalités larges).
4) $\forall \epsilon > 0$, $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \epsilon \iff y - \epsilon < x < y + \epsilon$. (idem pour des inégalités larges)
5) (L'inégalité triangulaire) $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Exercice 1 :
Démontrer Les propriétes 3) et 4) ci-dessus.

Exercice 2 :
1) Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation :

$$|x - 3| = |x + 5|.$$

On utilisera trois méthodes différentes :
a) Discussion suivant le signe de $x - 3$ et $x + 5$.
b) En observant que $|x - 3| = |x + 5| \iff f(|x - 3|) = f(|x + 5|)$ pour une fonction f très simple à déterminer.
c) En interprétant $|x - 3|$ et $|x + 5|$ comme des distances entre des points de $\mathbb{R}$.
2) Déterminez l'ensemble S des $x \in \mathbb{R}$ tels que :

$$|x - 3| \geq |x + 5|.$$

Exercice 3 :
Déterminez l'ensemble S des nombres réels x satisfaisant l'inégalité :

$$|2x + 1| \leq |x + 1|.$$

Travail 4 :
Réviser la définition et toutes les propriétés vues au lycée des fonctions exponentielle et logarithme. Graphe, limites, propriétés algébriques...

2) Présentiel

Exercice 4 :
1) Démontrez **l'inégalité triangulaire** :

$$\forall x, y \ \in \mathbb{R}, \ |x+y| \leq |x| + |y|.$$

On donnera un exemple où l'inégalité est stricte. (On écrira $|x+y| = Max(x+y, -(x+y))$ et on majorera chacun des deux nombres $x+y$ et $-(x+y)$ par $|x|+|y|$).
2) Montrez, en se ramenant à l'inégalité triangulaire (pour des nombres réels bien choisis), l'inégalité :

$$\forall x, y \ \in \mathbb{R}, \ |\,|x| - |y|\,| \leq |x-y|.$$

On pourra écrire $x = y + (x-y)$ et on appliquera l'inégalité triangulaire , de même $y = x + (y-x) \ldots$

Exercice 5 :
1) Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux nombres réels.
a) Que valent $Lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x}$ et $Lim_{x\to+\infty} (ln(x))^{\alpha}$
b) Que valent $Lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}}$, $Lim_{x\to+\infty} \frac{(ln(x))^{\alpha}}{x^{\beta}}$, $Lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{ln(x)^{\beta}}$.
2) Déterminez la limite (si elle existe) lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction $f(x) = e^{3x} - ln(x) + x^3$.
3) Déterminez la limite (si elle existe) lorsque x tend vers $-\infty$ de la fonction $g(x) = e^{-x}x^3 + (-x)^{0,2} ln^{-2}(-x)$. (On pourra poser $X = -x$ et se ramener à l'étude d'une limite en $+\infty$).
4) Déterminez la limite (si elle existe) lorsque x tend vers 0^+ de la fonction $h(x) = -x^7.ln(x).e^{4x+1}$ (On pourra poser $X = \frac{1}{x}$ et se ramener à l'étude d'une limite en $+\infty$)

Exercice 6 :
On considère la partie suivante de $\mathbb{R}$:

$$A = \{\frac{1}{n} + (-1)^n, \ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

1) Montrez que A est une partie bornée de $\mathbb{R}$ (i.e. A est une partie majorée et minorée de $\mathbb{R}$).
2) Déterminez la borne supérieure et inférieure de A. A admet-il un plus petit élément, un plus grand élément.

Exercice 7 :
On considère la partie suivante de $\mathbb{R}$:

$$A = \{\frac{(-1)^n.n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Répondre aux mêmes questions qu'à l'exercice précédent.