TD1
MATRICES
Opérations et matrices carrées

Chapitre 1 Matrices à coefficients réels dans Moodle cours M1202 Algèbre

EXERCICE 1:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

1. *Quels sont les produits faisables ? Donner la taille des matrices « produit » et les calculer.*
2. *Soit le produit AB. Calculer* ${}^t(\boldsymbol{AB})$ *puis* ${}^t\boldsymbol{B}\times{}^t\boldsymbol{A}$ *, que remarque-t-on ?*
3. *En déduire un résultat plus général.*

(On pourra écrire le terme général du produit $\boldsymbol{AB}$ *puis celui de* ${}^t(\boldsymbol{AB})$ *enfin celui de* ${}^t\boldsymbol{B}\times{}^t\boldsymbol{A}$ *en prenant* $A\in M_{np}(R)$ *et* $B\in M_{pq}(R)$

EXERCICE 2: Le produit des matrices est non commutatif !!

$$\textbf{\textit{Soit}}\ A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\end{pmatrix}\ \textbf{\textit{et}}\ B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$$

Calculer AB puis BA.

EXERCICE 3: *Soit X le vecteur ligne suivant* $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\ldots\boldsymbol{x_n})$.

Déterminer les produits suivants :

1. $A = X.{}^tX$
2. $B={}^tX.X$
3. *Calculer* ${}^tB$ *et en déduire une propriété de B.*

EXERCICE 4:

On considère $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -4\\ 6 & 4 & 0\end{pmatrix}$ *et* $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$

1. *Déterminer AB puis BA*
2. *Déterminer tr(A), tr(B), tr(AB), tr(BA), tr(A).tr(B) (tr(A) signifie trace de A)*
3. *(facultatif) Généralisation des résultats remarqués en 2.*

EXERCICE 5:

Soient A et B, 2 éléments de $M_n(R)$.

1. *Développer* $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2, (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^3$, *...Que peut-on dire de* $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n$ *?*

2. *Montrer que les puissances d'une même matrice commutent en utilisant l'associativité du produit.*
3. *Développer alors* $(P_1 + P_2)^n$ *où* P_1 *et* P_2 *sont des puissances de A.*

EXERCICE 6:

Travail personnel des étudiants à corriger en TD. Exercice du cours diapo 84 du Chap1 sur moodle.

EXERCICE 7:

Soit la matrice scalaire $\Lambda = \boldsymbol{\lambda . I_n , n \in N}$ *et soit* $\boldsymbol{A \in M_n(R)}$

Montrer que $A \times \Lambda = \Lambda \times A = \lambda . A, \lambda \in R$

EXERCICE 8:

1. *Calculer* A^2, A^3 *:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Retrouver les différentes puissances de A et notamment* A^n *à l'aide d'une matrice nilpotente bien choisie.*

Indications :

La matrice B est nilpotente ie : $\exists p \in N / B^p = 0$ *et* $B^{p-1} \neq 0$ *(indice de nilpotence = p)*

$A = I_3 + B \Rightarrow A^2 = (I_3 + B)^2$ *etc..*

A la puissance n : formule du binôme de Newton appliquée aux matrices.

EXERCICE 9:

Soit $\boldsymbol{A \in M_n(R), B \in M_n(R)}$

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix}; B = {}^tA}$$

Calculer AB , BA.

EXERCICE 10: $\boxed{\begin{array}{l} \exists A \in M_n(R) \textbf{ et } \exists \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M_n}(R) \textbf{ tels que :} \\ \boldsymbol{AB = O_{M_n(R)} \text{ et } A \neq O_{M_n(R)} \text{ et } B \neq O_{M_n(R)}} \end{array}}$

$$A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ n-1 & 0 \\ n-2 & 0 \\ & \\ & \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 000.....0 \\ 123......n \end{pmatrix}$$, *Calculer AB et BA.*

Transformations élémentaires sur les matrices

EXERCICE 11 :

1. ***Permutation de 2 lignes ou de 2 colonnes***

On définit la matrice de permutation $P_{ij} = (p_{lm}), P_{ij} \in M_n(R)$ *suivante :*

$p_{ll} = 1, \forall l \neq i \text{ et } l \neq j \quad p_{ii} = 0 \text{ et } p_{jj} = 0$

$p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lm} = 0 \text{ sinon}$

- *Ecrire la matrice* P_{ij}
- *Montrer pour* $A \in M_3(R)$, $P_{ij}A$ *est la matrice où les lignes i et j de A ont été permutées.*
- *Montrer pour* $A \in M_3(R)$, AP_{ij} *est la matrice où les colonnes i et j de A ont été permutées.*

2. ***Multiplication par*** $\lambda \neq 0$ ***d'une ligne (ou d'une colonne)***

On définit la matrice de dilatation $D_i(\lambda) = (d_{lm}), D_i(\lambda) \in M_n(R)$ *suivante :*

$d_{ll} = 1, \forall l \neq i \text{ et } d_{ii} = \lambda, d_{lm} = 0 \text{ sinon}$

- *Ecrire* $D_i(\lambda)$ *pour i et* λ *fixés.*
- *Montrer que D est inversible et déterminer* D^{-1}
- *Déterminer DA pour* $A \in M_3(R)$

3. ***Addition à une ligne (ou colonne) du produit par*** $\lambda \neq 0$ ***d'une autre ligne (ou colonne)***

On définit la matrice de transvection $T_{ij}(\lambda) = (t_{lm}), i \neq j, T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ *suivante :*

$t_{ll} = 1, \forall l \in \{1, \ldots n\}, t_{ij} = \lambda \text{ et } t_{lm} = 0 \text{ sinon}$

- *Ecrire la matrice* $T_{ij}(\lambda)$
- *Montrer pour* $A \in M_3(R)$, $T_{ij}(\lambda)A$ *est la matrice où la ligne i de A est transformée en* $L_i + \lambda L_j$.