Notes de cours d’Analyse

M. Hickel

Table des matières

Chapitre 1

Suites de Nombres réels

1.1 Définitions et notations

Définition 1.1.1
Une suite de nombre réels ou suite numérique réelle est une application de $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *ou du complémentaire* I *d'une partie finie de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Cette application étant désignée par* u *à tout entier naturel correspond un nombre réel* $u(n)$*.*

Notations : Plutôt que d'utiliser des notations «fonctionnelles », on utilise des symboles tels que u_n, v_n, r_n, a_n pour désigner les images de n par des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note ainsi $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels, le nombre réel u_n est dit le terme de rang n. Ainsi par exemple on peut considérer les suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 1}$, $(w_n)_{n\geq 2}$ définies par $u_n = n$, $v_n = \frac{1}{n}$, $w_n = \frac{1}{ln(n)}$. Une suite numérique peut aussi être définie par une relation de récurrence. On peut par exemple considérer la suite définie par :

$$u_0 = 1, \ \ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

A partir d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, on peut en fabriquer d'autre en piochant une infinité de termes. On parle alors de suite extraite ou de sous-suite.

Définition 1.1.2
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite de nombre réels et* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \{n \in \mathbb{N}/n \geq n_0\}$ *une application strictement croissante. Alors la suite* $(v_n)_{n\geq 0}$ *définie par* $v_n = u_{\varphi(n)}$ *est appelée suite extraite ou sous-suite de* $(u_n)_{n\geq n_0}$*.*

Exemple 1.1.3
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite de nombres réels et* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\varphi(n) = 2n$ *et* $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\psi(n) = 2n + 1$*. Les suites* $(v_n)_{n\geq 0}$ *et* $(w_n)_{n\geq 0}$ *définies par* $v_n = u_{2n} = u_{\varphi(n)}$ *et* $w_n = u_{2n+1} = u_{\psi(n)}$ *sont des suites extraites de* $(u_n)_{n\geq 0}$*.*

Définition 1.1.4
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite de nombres réels. On dit que :*
1) $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est majorée s'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq M$.
2) $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est minorée s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \geq n_0,\ m \leq u_n$.
3) $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.*

Nous en venons maintenant à la définition centrale.

Définition 1.1.5
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ *de nombre réels converge vers le nombre réel* l *si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}/\forall n, n \geq N_\epsilon \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Une suite est dite convergente si il existe un nombre $l \in \mathbb{R}$ *vers lequel elle converge.*

Exemple 1.1.6
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *avec* $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *converge vers* 0. *Etant donné* $\epsilon > 0$, *on doit trouver un entier* N_ϵ *tel que pour* $n \geq N_\epsilon$ *on ait* $|(-1)^n/n| = 1/n < \epsilon$. *Or* $1/n < \epsilon$ *équivaut à* $n > 1/\epsilon$. *Tout entier* N_ϵ *superieur à* $1/\epsilon$ *conviendra. Par exemple* $N_\epsilon = [1/\epsilon] + 1$ *conviendra, où* $[-]$ *désigne la partie entière.*

Une suite qui n'est convergente vers aucun nombre réel est dite <u>divergente</u>.

Exemple 1.1.7
Les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ *définies par* $u_n = n$ *et* $u_n = (-1)^n$ *sont divergentes.*

Parmi les suites divergentes, on en distingue deux catégories plus simples.

Définition 1.1.8
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite de nombres réels. On dit que :*
1)$(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $+\infty$ *(lorsque* $n \longrightarrow +\infty$*) ssi*

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}/n \geq N \Longrightarrow u_n \geq M.$$

2)$(u_n)_{n\geq n_0}$ *tend vers* $-\infty$ *(lorsque* $n \longrightarrow +\infty$*) ssi*

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}/n \geq N \Longrightarrow u_n \leq m.$$

La première suite de l'exemple précédent tend vers $+\infty$, la seconde suite est divergente mais ne tend pas vers $+\infty$ (ni $-\infty$).

1.2 Résultats de convergence

Proposition 1.2.1 *(Unicité de la limite)*
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres réels convergente alors il existe un et seul nombre réel l vers lequel $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge. Ce nombre réel est appelé la limite de $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Preuve :
Supposons que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers l et l', $l \neq l'$. Nous allons obtenir une contradiction. Par hypothèse, le nombre $\epsilon' = |l - l'|$ est strictement positif. Soit $\epsilon = \epsilon'/2 > 0$. Puisque $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers l, il existe N_1 tel que $n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon$. De même $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers l', il existe donc N_2 tel que $n \geq N_2 \Longrightarrow |u_n - l'| < \epsilon$. Soit alors un entier $n \geq N = Max(N_1, N_2)$. On a :

$$\epsilon' = |l - l'| = |(l - u_n) + (u_n - l')| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < \epsilon + \epsilon = \epsilon'.$$

Ainsi $\epsilon' < \epsilon'$, ce qui est absurde. $\square$

Proposition 1.2.2
Une suite convergente est bornée.

Notez que la réciproque est fausse. Par exemple les suites définies par $u_n = (-1)^n$ ou $u_n = sin(n)$ sont bornées mais pas convergentes.

Proposition 1.2.3 *(Opérations sur les suites convergentes)*
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites convergentes de limites respectives u et v.
1) Les suites $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ et $(u_n - v_n)_{n\geq n_0}$ convergent vers $u + v$ et $u - v$.
2) La suite $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers uv.
3) Si $u \neq 0$, il existe n'_0 tel que pour $n \geq n'_0$ on $u_n \neq 0$ et la suite $(1/u_n)_{n\geq n'_0}$ converge vers $1/u$.

Parmi les suites ayant un comportement plus sympathique que les suites générales figurent les suites monotones.

Définition 1.2.4
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres réels.
1) On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante ssi $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$.
2) On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante ssi $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.
Une suite est dite monotone si et seulement si elle croissante ou bien décroissante.

Proposition 1.2.5
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante (resp. décroissante) alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge si et seulement si elle est majorée (resp. minorée). Dans ce cas la limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est sa borne supérieure (resp. inférieure) c'est à dire le plus petit de ces majorants (resp. le plus grand de ces minorants).
Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ (resp. décroissante non minorée tend vers $-\infty$).

Attention ceci est spécifique aux suites monotones. Une suite non majorée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$. Par exemple la suite définie par $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{n}$ n'est pas majorée et ne tend pas vers $+\infty$.
Preuve :
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante majorée. Soit alors l le plus petit des majorants de tous les u_n (dont on admet l'existence). Montrons que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers l.
Soit $\epsilon > 0$. $l - \epsilon$ n'est pas un majorant de tous les u_n. Donc il existe un entier N tel que :

$$l - \epsilon < u_N \leq l.$$

Par conséquent puisque $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, on a pour $n \geq N$:

$$l - \epsilon < U_N \leq u_n \leq l < l + \epsilon$$

Ainsi $\forall n \geq N,\ l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$. Par suite $\forall n \geq N,\ |u_n - l| < \epsilon$. Donc $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers l.
Soit maintenant $(u_n)_{n\geq n_0}$ croissante non majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$, M n'est pas un majorant des u_n. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq M$. Par croissance de $(u_n)_{n\geq n_0}$ on a donc :

$$\forall n \geq N,\ u_n \geq u_N \geq M.$$

Ainsi $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N}/\forall n \geq N,\ u_n \geq M$, c'est à dire $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$.
□

Définition 1.2.6
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites de nombres réels. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont adjacentes si et seulement si :
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est croissante*
- $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est décroissante*
- $(v_n - u_n)_{n\geq n_0}$ *converge vers* 0.

Proposition 1.2.7
Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

Preuve :
Soit $w_n = v_n - u_n$. Alors :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}) \leq 0 + 0 = 0.$$

Donc $(w_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante. Comme sa limite est 0, 0 est le plus grand de ces minorants, donc en particulier un minorant. Ainsi $\forall n \geq n_0$, $w_n \geq 0$. Par suite $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Puisque $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq n_0}$ décroissante on a :

$$u_{n_0} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n_0}$$

Par conséquent $(v_n)_{n\geq n_0}$ est minorée par u_{n_0} et donc convergente alors que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par v_{n_0} et donc elle aussi convergente. Maintenant si l et l' désignent les limites respectives de $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ alors $(v_n - u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $l' - l$. Par unicité de la limite $l' - l = 0$. Donc $l = l'$. □

Définition 1.2.8 *(Suites de Cauchy)*
Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite une suite de Cauchy si et seulement si elle possède la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} / \forall p, q \in \mathbb{N},\ \ p \geq N_\epsilon \ \textit{et}\ q \geq N_\epsilon \Longrightarrow |u_p - u_q| < \epsilon.$$

Théorème 1.2.9
Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

Ainsi décider si une suite est de Cauchy permet de décider si celle-ci est convergente. Par contre cela ne calcule pas la limite.
Preuve :
Le sens facile est qu'une suite convergente est de Cauchy. Soit en effet $\epsilon > 0$. Posons $\epsilon' = \epsilon/2$. Puisque $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers un nombre l, on peut trouver un entier $N_{\epsilon'}$ tel que $n \geq N_{\epsilon'} \Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon'$. Soient alors $p, q \geq N_{\epsilon'}$ on a :

$$|u_p - u_q| = |(u_p - l) + (l - u_q)| \leq |u_p - l| + |l - u_q| < \epsilon' + \epsilon' = \epsilon.$$

Donc $(u_n)_{n\geq n_0}$ est de Cauchy.
La réciproque, $(u_n)_{n\geq n_0}$ de Cauchy implique $(u_n)_{n\geq n_0}$ convergente, est une conséquence de la construction de $\mathbb{R}$. Cette construction est largement hors programme.
□

Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente comme nous l'avons vu sur des exemples. Cependant pour les plus curieux d'entre vous, on a le théorème suivant.

Théorème 1.2.10 *(Bolzano-Weierstrass)*
De toute suite de nombres réels bornée on peut extraire une sous suite convergente.

Preuve :
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite bornée, nous allons construire par récurrence $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \{n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ soit de Cauchy (et don convergente). La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ étant bornée, elle est incluse dans un segment borné $J_0 = [a_0, b_0]$. On pose $\varphi(0) = p_0$ où p_0 est un entier quelconque supérieur à n_0. Coupons l'intervalle J_0 en deux moitiés par son milieu. Nécessairement une de ces deux moitiés contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$. Notons $J_1 = [a_1, b_1]$ une telle moitié. On pose $\varphi(1) = p_1$ où $p_1 \geq n_0$ est tel que $p_1 > p_0$ et $u_{p_1} \in J_1$. On recommence le procédé. On coupe J_1 en deux moitiés par son milieu. Nécessairement une moitié $J_2 = [a_2, b_2]$ contient une infinité de termes de la suite. On pose $\varphi(2) = p_2$ où $p_2 > p_1 > p_0$ est tel que $u_{p_2} \in J_2$. Etc...
L'application construite φ est strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est une sous suite de $(u_n)_{n\geq n_0}$. Pour tout n la longueur de l'intervalle J_{n+1} est la moitié de la longueur de l'intervalle J_n. Ainsi la longueur de J_n est $\frac{b_0-a_0}{2^n}$ et tend donc vers zéro avec n. Par construction, puisque les segments J_k sont emboités, si $m \geq n$ on a $u_{\varphi(m)} \in J_m \subset J_n$. Soit $\epsilon > 0$ donné, il existe N_ϵ tel que :

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{N_\epsilon}} < \epsilon.$$

Par suite pour $p, q \geq N_\epsilon$, puisque $u_{\varphi(p)}$, $u_{\varphi(q)}$ sont dans J_{N_ϵ} on a :

$$|u_{\varphi(p)} - u_{\varphi(q)}| \leq \frac{a_0 - b_0}{2^{N_\epsilon}} < \epsilon.$$

Ainsi la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy et donc convergente □

1.3 Suites récurrentes

Définition 1.3.1
Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite récurrente d'ordre p, avec $p \in \mathbb{N}^*$, si chaque terme de la suite ne dépend que des p précédents.

Exemple 1.3.2
Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq_0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ les suites vérifiants :
1) $u_{n+1} = cos(u_n)$, la suite est récurrente d'ordre 1 ;
2) $v_{n+3} = 3v_{n+2}^2 - 7v_{n+1} + v_n$ est récurrente d'ordre 3 ;
3) $w_{n+p} = w_{n+p-1} + w_{n+p-2} + \cdots + w_n$ la suite est récurrente d'ordre p.

Une suite récurrente d'ordre p est entièrement déterminée par la connaissance de ses p premiers termes.
Parmi les suites récurrentes, une classe plus simple est la classe des suites récurrentes linéaires à coefficients constants. Si $p \geq 1$, une suite récurrente linéaire à coeeficients constants d'ordre p est une suite vérifiant une relation :

$$(E) \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + a_{p-2}u_{n+p-2} + \cdots + a_0 u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

où $a_{p-1}, a_{p-2}, \cdots, a_0$ sont des constantes fixées dans $\mathbb{R}$. Ainsi dans les exemples ci-dessus, la troisième suite est une suite récurrente linéaire à coefficents constants d'ordre p (c'est le cas où l'on a pris tous les a_i égaux à 1). Les suites récurrentes linéaires à coefficients constants d'ordre 1 sont les suites vérifiants une relation : $u_{n+1} = au_n$, c'est à dire les progressions géométriques.
Le cas des suites récurrentes linéaires à coefficients constants est favorable pour la raison suivante.
L'ensemble des suites de nombres réels est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'addition est l'addition terme à terme et la multiplication par un scalaire est la multiplication par ce scalaire terme à terme :
- $(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0}$
- $\lambda \cdot (u_n)_{n\geq 0} = (\lambda u_n)_{n\geq 0}$.

Le vecteur nul est alors la suite constante égal à 0. Il est alors facile de vérifier que l'ensemble des suites vérifiant l'équation (E) est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.
La suite nulle vérifie (E). En effet :

$$0 = a_{p-1}.0 + a_{p-2}.0 + \cdots + a_0.0.$$

Donc l'ensemble des solutions est non vide.
Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est solution de (E) alors $\lambda \cdot (u_n)_{n\geq 0}$ est solution de (E). En effet :

$$a_{p-1}(\lambda u_{n+p-1}) + \cdots a_0(\lambda u_n) = \lambda(a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n) = \lambda u_{n+p}.$$

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont solutions de (E) alors $(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0}$ est solution de (E). En effet :

$$a_{p-1}(u_{n+p-1} + v_{n+p-1}) + a_{p-2}(u_{n+p-2} + v_{n+p-2}) + \cdots + a_0(u_n + v_n) =$$
$$(a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n) + (a_{p-1}v_{n+p-1} + \cdots + a_0 v_n) = u_{n+p} + v_{n+p}$$

On peut de plus déterminer la dimension de ce sous-espace de solutions : p. En effet, on a remarqué précédemment que le choix des p premiers termes fixe la suite. Il y a donc intuitivement p degrés de liberté, c'est à dire p dimensions. Pour trouver l'ensemble des solutions de (E), il suffit de trouver une base de l'ensemble des solutions, c'est à dire p solutions linéairement indépendantes. Toute solution s'écrira comme combinaison linéaire de ces dernières. Voici la résolution complète de ce problème pour $p = 2$.

Proposition et définition 1.3.3
Soit (E) l'équation de récurrence suivante :

$$(E) \qquad u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n.$$

où α et β sont deux réels fixés.
On appelle équation caractéristique de (E) l'équation :

$$x^2 - \alpha x - \beta = 0 \qquad (*).$$

1) Si $(*)$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, alors $(x_1^n)_{n\geq 0}$ et $(x_2^n)_{n\geq 0}$ sont deux solutions indépendantes de (E). L'ensemble des solutions de (E) est donc constitué par les suites de la forme $(ax_1^n + bx_2^n)_{n\geq 0}$ où a, b sont des constantes réelles arbitraires.
2) Si $(*)$ admet une racine double x_1, alors $(x_1^n)_{n\geq 0}$ et $(nx_1^n)_{n\geq 0}$ sont deux solutions indépendantes de (E). Les solutions de (E) sont donc de la forme $((an+b)x_1^n)_{n\geq 0}$ où a et b sont des constantes réelles arbitraires.

On peut également traiter le cas où $(*)$ n'admet pas de solutions réelles en considérant les parties réelles des solutions complexes.

Exemple 1.3.4 *(Suite de Fibonacci)*
Cette suite très connue due au mathématicien Leonardo Fibonacci (1175-1250) sert à modéliser l'évolution d'une population. Dans le cas de Fibonacci une population de lapins qui ne meurent pas et qui suit le modèle suivant : chaque mois tout couple ayant au moins deux mois engendre un nouveau couple.
1) En notant u_n le nombre de couples au n^{ieme} mois exprimer u_{n+2} en fonction des termes précédents.
2) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation de récurrence précédente.
3) On commence l'observation avec la naissance d'un premier couple et on pose $u_0 = 1$. Quelles sont les conditions initiales ?
4) Déterminer les solutions vérifiant ces conditions initiales.

Chapitre 2

Continuité et Dérivation

2.1 Continuité : Définitions et premières propriétés

Définition 2.1.1
Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si et seulement si :

$$\lim_{x \in A,\, x \to a} f(x) = f(a).$$

Ce qui signifie que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/(x \in A \text{ et } |x-a| < \alpha) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point a de A.

Exemple 2.1.2
Les fonctions $x \longrightarrow x$ et $x \longrightarrow |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

On peut caractériser la continuité en termes de suites.

Proposition 2.1.3 *(Continuité en termes de suites)*
Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
1) f est continue en a.
2) Pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de points de A qui converge vers a la suite des $(f(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.

Grâce aux opérations sur les suites convergentes, on en déduit des propriétés similaires pour les fonctions continues.

Proposition 2.1.4 *(Opérations sur les fonctions continues)*
1)Soient $f,\ g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en un point $a \in A$ alors :
a) $f + g$ et $f - g$ sont continues en a

b) $f \times g$ est continue en a
c) si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ est définie au voisinage de a dans A et $\frac{g}{f}$ est continue en a.
2) Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(A) \subset B$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Preuve :
Prouvons 2). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de A qui converge vers a. Il s'agit de voir que la suite $(g\circ f(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers $g\circ f(a)$. Par continuité de f en a, la suite de points de B, $(v_n)_{n\geq 0} = (f(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$. La continuité de g en $f(a)$ donne que la suite $(g(v_n))_{n\geq 0}$ converge vers $g(f(a))$. Mais :

$$g(v_n) = g(f(u_n)) = g \circ f(u_n) \text{ et } g(f(a)) = g \circ f(a).$$

Ainsi $(g \circ f(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers $g \circ f(a)$ comme souhaité. □

Exemple 2.1.5
1) Montrer qu'un polynôme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en a alors la fonction $|f|$ est continue en a.

2.2 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 2.2.1
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée sur $[a, b]$. C'est à dire, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in [a, b],\ m \leq f(x) \leq M.$$

Preuve :
On raisonne par l'absurde. Supposons que f n'est pas majorée sur $[a, b]$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in [a, b]/f(u_n) \geq n$. Puisque $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée (par a et b) le théorème de Bolzano-Weierstrass assure qu'on peut extraire de $(u_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite convergente. Il existe ainsi $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(v_n)_{n\geq 0} = (u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ soit convergente vers un point x_0 de $[a, b]$. Par continuité de f en x_0, on aurait :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(x_0).$$

Or ceci est absurde car par construction :

$$f(u_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n.$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = +\infty$ □

Théorème 2.2.2 *(Th. des valeurs intermédiaires première forme)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. Alors f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$, c'est à dire il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que :

$$f(x_1) = m = Inf_{x\in[a,b]}f(x) \text{ et } f(x_2) = M = Sup_{x\in[a,b]}f(x).$$

De plus f prend toutes les valeurs comprises entre m et M, c'est à dire $f([a, b]) = [m, M]$ ou encore $\forall y \in [m, M]$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Autrement dit f prend toutes les valeurs *intermédiaires* à m et M. Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.) implique que l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné, donc un intervalle du même type. Ceci est faux pour tout autre type d'intervalle.

Corollaire 2.2.3 *(T.V.I. deuxième forme)*
Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Soient $x_1 \leq x_2 \in [a, b]$, alors $\forall y \in [f(x_1), f(x_2)]$ (ou $[f(x_2), f(x_1)]$) il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit toute valeur intermédiaire à deux valeurs prises par la fonction est encore une valeur prise par la fonction.

Preuve :
Soient m et M le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. On a $[f(x_1), f(x_2)] \subset [m, M]$ ou $[f(x_2), f(x_1)] \subset [m, M]$. Il suffit alors d'appliquer le T.V.I. première forme à f sur l'intervalle $[x_1, x_2]$. $\square$

Corollaire 2.2.4 *(T.V.I. troisième forme)*
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I (de n'importe quel type). Alors l'ensemble $f(I)$:

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R}/\exists x \in I,\ y = f(x)\}$$

de toutes les valeurs prises par f lorsque x parcourt I est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$ (mais pas nécessairement du même type).

Preuve :
Il suffit de voir que si y_1, y_2 sont deux points de $f(I)$ alors tout point de $[y_1, y_2]$ est encore dans $f(I)$. Or si $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in I$. Ainsi $[x_1, x_2] \subset I$ et f est continue sur $[x_1, x_2]$. Il ne reste plus qu'à appliquer le T.V.I. deuxième forme. $\square$

2.3 Dérivation, définitions et premières propriétés

Définition 2.3.1
Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x_1, x_2 deux points de A. Le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 est le nombre

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Ce nombre n'est autre que le coefficient directeur de la droite passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.

Définition 2.3.2
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si les taux d'accroissement $\Delta_f(x, x_0)$ de f entre x et x_0 admettent une limite finie lorsque x tend vers x_0. Autrement dit f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \neq x_0,\, x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est un nombre l. Dans ce cas le nombre l est noté $f'(x_0)$ et appelé le nombre dérivé de f en x_0.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Définition 2.3.3
La droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est appelée la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$.

Proposition 2.3.4
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Preuve :
Par définition

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right)$$

tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Comme $f'(x_0)(x - x_0)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0, on en déduit que $f(x) - f(x_0)$ tend vers zéro lorsque x tend vers x_0. Ainsi $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. □

Remarque 2.3.5
La réciproque est évidemment fausse. Par exemple $x \longrightarrow |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Proposition 2.3.6
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant un extremum local en $x_0 \in I$ (maximum ou minimum). Si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve :
Supposons que f admet un maximum local en x_0. Alors au voisinage de x_0, $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Par suite pour $x < x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ et pour $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \to (x_0)^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ et } \lim_{x \to (x_0)^+} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} \leq 0.$$

Mais puisque f est dérivable en x_0, ces deux nombres sont égaux à $f'(x_0)$. Donc $f'(x_0) \leq 0$ et $f'(x_0) \geq 0$ i.e. $f'(x_0) = 0$. □

Proposition 2.3.7 *(Règles de Calcul)*
1) Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0 alors :
a) $f + g$ est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) + g'(x_0)$ (idem pour $f - g$) ;
b) $f \times g$ est dérivable en x_0 et

$$(f \times g)'(x_0) = f(x_0) \times g'(x_0) + g(x_0) \times f'(x_0);$$

c) si $g(x_0) =\neq 0$ alors f/g est dérivable en x_0 et

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

2) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0)).$$

2.4 Théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème 2.4.1 *(Théorème de Rolle)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
a) f est continiue sur $[a, b]$;
b) f est dérivable sur $]a, b[$;
c) $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve :
On peut supposer que f n'est pas constante sur $[a, b]$, sans quoi $f'(c) = 0$ pour tout c. Puisque f est continue sur $[a, b]$, f admet un maximum $M = Sup_{x \in [a,b]} f(x)$ et

un minimum $m = Inf_{x\in[a,b]} f(x)$. On a alors $M \neq m$ (sans quoi f est constante). Soit $x_1 \in [a,b]$ tel que $M = f(x_1)$ et $x_2 \in [a,b]$ tel que $f(x_2) = m$. Puisque $f(a) = f(b)$, on a $x_1 \neq a, b$ ou $x_2 \neq a, b$ (sans quoi $f(x_1) = f(x_2)$ et donc $M = m$). Ainsi par exemple $x_1 \in]a,b[$, mais f est dérivable en x_1 et a un extremum local en x_1. Par suite $f'(x_1) = 0$. $\square$

Théorème 2.4.2 *(Théorème des Accroissements Finis)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
1) f est continue sur $[a,b]$;
2) f est dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou encore $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$.

Preuve :
On considère la fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

La fonction $x \longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc continue sur $\mathbb{R}$) la fonction g est :
- continue sur $[a,b]$
- dérivable sur $]a,b[$

comme somme de deux fonctions dérivables (resp. continues). De plus :

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0$$

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

Ainsi $g(a) = g(b)$. On est donc dans les hypothèses du théorème de Rolle. Ainsi, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

Remarque 2.4.3
Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont en fait équivalents. On a déduit le T.A.F. du théorème de Rolle. Si dans le T.A.F. on suppose $f(a) = f(b)$, on obtient $f'(c) = 0$, c'est à dire le thórème de Rolle.