ALGEBRE LINEAIRE M1202

BC

Ce support de cours n'est pas fait pour être imprimé mais pour être consulté.D'autre part, il ne contient que des définitions, une partie essentielle de ce cours est développée au tableau sous forme d'exercices et de démonstrations.

Plan

Plan

Matrices de taille (n,p)

Soient n, p deux entiers naturels, on appelle matrice de taille (n,p) à coefficients réels, un tableau à n lignes et p colonnes

Matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notation : $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $a_{ij} \in R$

A est donc une matrice de type n.p, a_{ij} est le réel situé sur la iième ligne et la jième colonne de A.

Matrices de taille (n,p)

Soient n, p deux entiers naturels, on appelle matrice de taille (n,p) à coefficients réels, un tableau à n lignes et p colonnes

Matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notation : $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $a_{ij} \in R$

A est donc une matrice de type n.p, a_{ij} est le réel situé sur la iième ligne et la jième colonne de A.

Matrices de taille (n,p)

Soient n, p deux entiers naturels, on appelle matrice de taille (n,p) à coefficients réels, un tableau à n lignes et p colonnes

Matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notation : $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $a_{ij} \in R$

A est donc une matrice de type n.p, a_{ij} est le réel situé sur la iième ligne et la jième colonne de A.

Matrices de taille (n,p)

Soient n, p deux entiers naturels, on appelle matrice de taille (n,p) à coefficients réels, un tableau à n lignes et p colonnes

Matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notation : $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $a_{ij} \in R$

A est donc une matrice de type n.p, a_{ij} est le réel situé sur la iième ligne et la jième colonne de A.

$A \in M_{np}(R)$

A est une matrice de taille n lignes et p colonnes à coefficients réels.

$A \in M_{n1}(R)$

A est une matrice de taille n lignes et une colonne, on dit que A est un vecteur colonne.

$A \in M_{1p}(R)$

A est une matrice de taille 1 ligne et p colonnes, on dit que A est un vecteur ligne ou matrice ligne.

$A \in M_{np}(R)$

A est une matrice de taille n lignes et p colonnes à coefficients réels.

$A \in M_{n1}(R)$

A est une matrice de taille n lignes et une colonne, on dit que A est un vecteur colonne.

$A \in M_{1p}(R)$

A est une matrice de taille 1 ligne et p colonnes, on dit que A est un vecteur ligne ou matrice ligne.

$A \in M_{np}(R)$

A est une matrice de taille n lignes et p colonnes à coefficients réels.

$A \in M_{n1}(R)$

A est une matrice de taille n lignes et une colonne, on dit que A est un vecteur colonne.

$A \in M_{1p}(R)$

A est une matrice de taille 1 ligne et p colonnes, on dit que A est un vecteur ligne ou matrice ligne.

$A \in M_{np}(R)$

A est une matrice de taille n lignes et p colonnes à coefficients réels.

$A \in M_{n1}(R)$

A est une matrice de taille n lignes et une colonne, on dit que A est un vecteur colonne.

$A \in M_{1p}(R)$

A est une matrice de taille 1 ligne et p colonnes, on dit que A est un vecteur ligne ou matrice ligne.

Plan

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i, j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i, j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i, j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i, j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Somme de matrices $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

La somme de ces deux matrices est une matrice de même type (n,p) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est la somme des coefficients respectifs situés à la même place de chaque matrice.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{np}(R)$
- $S = A + B$ et $S \in M_{np}(R)$
- $S = (s_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$
- $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

A+B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Produit externe d'un réel λ par une matrice A ,$A \in M_{np}(R)$

on définit $\lambda.A$ comme la matrice de type (n, p) dont le coefficient général est le produit du réel λ par le coefficient général de A.

- $T = \lambda.A$
- $T \in M_{np}(R)$
- $t_{ij} = \lambda.a_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

$\lambda.A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 & y \\ 4 & y & 5 & x \\ x & y & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x & 3\lambda & \lambda y \\ 4\lambda & \lambda y & 5\lambda & \lambda x \\ \lambda x & \lambda y & 8\lambda & 9\lambda \end{pmatrix}$$

Produit externe d'un réel λ par une matrice A ,$A \in M_{np}(R)$

on définit $\lambda.A$ comme la matrice de type (n, p) dont le coefficient général est le produit du réel λ par le coefficient général de A.

- $T = \lambda.A$
- $T \in M_{np}(R)$
- $t_{ij} = \lambda.a_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

$\lambda.A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 & y \\ 4 & y & 5 & x \\ x & y & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x & 3\lambda & \lambda y \\ 4\lambda & \lambda y & 5\lambda & \lambda x \\ \lambda x & \lambda y & 8\lambda & 9\lambda \end{pmatrix}$$

Produit externe d'un réel λ par une matrice A ,$A \in M_{np}(R)$

on définit $\lambda.A$ comme la matrice de type (n, p) dont le coefficient général est le produit du réel λ par le coefficient général de A.

- $T = \lambda.A$
- $T \in M_{np}(R)$
- $t_{ij} = \lambda.a_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

$\lambda.A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 & y \\ 4 & y & 5 & x \\ x & y & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x & 3\lambda & \lambda y \\ 4\lambda & \lambda y & 5\lambda & \lambda x \\ \lambda x & \lambda y & 8\lambda & 9\lambda \end{pmatrix}$$

Produit externe d'un réel λ par une matrice A , $A \in M_{np}(R)$

on définit $\lambda.A$ comme la matrice de type (n, p) dont le coefficient général est le produit du réel λ par le coefficient général de A.

- $T = \lambda.A$
- $T \in M_{np}(R)$
- $t_{ij} = \lambda.a_{ij}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

$\lambda.A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 & y \\ 4 & y & 5 & x \\ x & y & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x & 3\lambda & \lambda y \\ 4\lambda & \lambda y & 5\lambda & \lambda x \\ \lambda x & \lambda y & 8\lambda & 9\lambda \end{pmatrix}$$

Produit externe d'un réel λ par une matrice A ,$A \in M_{np}(R)$

on définit $\lambda.A$ comme la matrice de type (n, p) dont le coefficient général est le produit du réel λ par le coefficient général de A.

- $T = \lambda.A$
- $T \in M_{np}(R)$
- $t_{ij} = \lambda.a_{ij}, \forall (i,j) \in \{1,\cdots n\} \times \{1,\cdots p\}$

$\lambda.A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 & y \\ 4 & y & 5 & x \\ x & y & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x & 3\lambda & \lambda y \\ 4\lambda & \lambda y & 5\lambda & \lambda x \\ \lambda x & \lambda y & 8\lambda & 9\lambda \end{pmatrix}$$

Produit externe d'un réel λ par une matrice A ,$A \in M_{np}(R)$

on définit $\lambda.A$ comme la matrice de type (n, p) dont le coefficient général est le produit du réel λ par le coefficient général de A.

- $T = \lambda.A$
- $T \in M_{np}(R)$
- $t_{ij} = \lambda.a_{ij}, \forall(i,j) \in \{1,\cdots n\} \times \{1,\cdots p\}$

$\lambda.A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 & y \\ 4 & y & 5 & x \\ x & y & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x & 3\lambda & \lambda y \\ 4\lambda & \lambda y & 5\lambda & \lambda x \\ \lambda x & \lambda y & 8\lambda & 9\lambda \end{pmatrix}$$

Produit externe d'un réel λ par une matrice A ,$A \in M_{np}(R)$

on définit $\lambda.A$ comme la matrice de type (n, p) dont le coefficient général est le produit du réel λ par le coefficient général de A.

- $T = \lambda.A$
- $T \in M_{np}(R)$
- $t_{ij} = \lambda.a_{ij}, \forall(i,j) \in \{1,\cdots n\} \times \{1,\cdots p\}$

$\lambda.A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 & y \\ 4 & y & 5 & x \\ x & y & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x & 3\lambda & \lambda y \\ 4\lambda & \lambda y & 5\lambda & \lambda x \\ \lambda x & \lambda y & 8\lambda & 9\lambda \end{pmatrix}$$

Produit externe d'un réel λ par une matrice A ,$A \in M_{np}(R)$

on définit $\lambda.A$ comme la matrice de type (n, p) dont le coefficient général est le produit du réel λ par le coefficient général de A.

- $T = \lambda.A$
- $T \in M_{np}(R)$
- $t_{ij} = \lambda.a_{ij}, \forall (i, j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots p\}$

$\lambda.A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 & y \\ 4 & y & 5 & x \\ x & y & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda x & 3\lambda & \lambda y \\ 4\lambda & \lambda y & 5\lambda & \lambda x \\ \lambda x & \lambda y & 8\lambda & 9\lambda \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$, $a_{ij} \in R$ et $b_{ij} \in R$

Le produit de ces deux matrices est une matrice de type (n,m) dont le coefficient situé sur la ième ligne et la jème colonne est calculé à partir de la ième ligne de A et de la jème colonne de B.

- $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pm}(R)$
- $P = A \times B$ et $P \in M_{nm}(R)$
- $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$
- $p_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots n\} \times \{1, \cdots m\}$

$A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 18 & 35 \\ 11 & 22 \\ 51 & 90 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$$

Propriétés

- Il est facile de remarquer que le produit des matrices $A \times B$ n'est pas toujours possible. Le nombre de colonnes de A doit être égal aux nombres de lignes de B.
- Le produit de matrices n'est pas commutatif

$$A \times B \neq B \times A$$

.

- Le produit de matrices est associatif

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

.

- Le produit est distributif par rapport à l'addition

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

-

$$A \times (\lambda.B) = \lambda.(A \times B)$$

Propriétés

- Il est facile de remarquer que le produit des matrices $A \times B$ n'est pas toujours possible. Le nombre de colonnes de A doit être égal aux nombres de lignes de B.
- Le produit de matrices n'est pas commutatif
$$A \times B \neq B \times A$$
.
- Le produit de matrices est associatif
$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
.
- Le produit est distributif par rapport à l'addition
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
-
$$A \times (\lambda.B) = \lambda.(A \times B)$$

Propriétés

- Il est facile de remarquer que le produit des matrices $A \times B$ n'est pas toujours possible. Le nombre de colonnes de A doit être égal aux nombres de lignes de B.
- Le produit de matrices n'est pas commutatif

$$A \times B \neq B \times A$$

.

- Le produit de matrices est associatif

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

.

- Le produit est distributif par rapport à l'addition

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

-

$$A \times (\lambda . B) = \lambda . (A \times B)$$

Propriétés

- Il est facile de remarquer que le produit des matrices $A \times B$ n'est pas toujours possible. Le nombre de colonnes de A doit être égal aux nombres de lignes de B.
- Le produit de matrices n'est pas commutatif

$$A \times B \neq B \times A$$

.

- Le produit de matrices est associatif

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

.

- Le produit est distributif par rapport à l'addition

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

-

$$A \times (\lambda.B) = \lambda.(A \times B)$$

Propriétés

- Il est facile de remarquer que le produit des matrices $A \times B$ n'est pas toujours possible. Le nombre de colonnes de A doit être égal aux nombres de lignes de B.
- Le produit de matrices n'est pas commutatif

$$A \times B \neq B \times A$$

.

- Le produit de matrices est associatif

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

.

- Le produit est distributif par rapport à l'addition

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

-

$$A \times (\lambda.B) = \lambda.(A \times B)$$

Propriétés

- Il est facile de remarquer que le produit des matrices $A \times B$ n'est pas toujours possible. Le nombre de colonnes de A doit être égal aux nombres de lignes de B.
- Le produit de matrices n'est pas commutatif

$$A \times B \neq B \times A$$

.

- Le produit de matrices est associatif

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

.

- Le produit est distributif par rapport à l'addition

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

-

$$A \times (\lambda.B) = \lambda.(A \times B)$$

Propriétés

- Il est facile de remarquer que le produit des matrices $A \times B$ n'est pas toujours possible. Le nombre de colonnes de A doit être égal aux nombres de lignes de B.
- Le produit de matrices n'est pas commutatif

$$A \times B \neq B \times A$$

  .
- Le produit de matrices est associatif

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

  .
- Le produit est distributif par rapport à l'addition

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

- $$A \times (\lambda.B) = \lambda.(A \times B)$$

La matrice 0

- Si A=0 alors $A \times B = 0$ et $B \times A = 0$
- L'implication réciproque est fausse : contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A \times B = 0$$

Nombre d'opérations dans un calcul de matrices : Complexité arithmétique

Il est intéressant de calculer le nombre d'opérations sur des réels pour effectuer un calcul matriciel, en général on établit un ordre de grandeur de ce nombre là appelé aussi complexité. Cette notion est largement développée en algorithmique et fait partie de l'évaluation d'un algorithme (complexité, coût, performance). Ce sujet sera défini et développé dans le chapître suivant relatif au Pivot de Gauss.

Complexité d'un produit de matrices

- Soit $X \in M_{1n}(R)$, $X \times X^t$ nécessite 2n-1 opérations, c'est une complexité linéaire de type n.
- Soit $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pq}(R)$ $A \times B$ nécessite $n(2p-1)q$ opérations, c'est une complexité de type npq.
- $A \in M_n(R)$ et $B \in M_n(R)$ $A \times B$ a une complexité de type n^3

La matrice 0

- Si A=0 alors $A \times B = 0$ et $B \times A = 0$
- L'implication réciproque est fausse : contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A \times B = 0$$

Nombre d'opérations dans un calcul de matrices : Complexité arithmétique

Il est intéressant de calculer le nombre d'opérations sur des réels pour effectuer un calcul matriciel, en général on établit un ordre de grandeur de ce nombre là appelé aussi complexité. Cette notion est largement développée en algorithmique et fait partie de l'évaluation d'un algorithme (complexité, coût, performance). Ce sujet sera défini et développé dans le chapître suivant relatif au Pivot de Gauss.

Complexité d'un produit de matrices

- Soit $X \in M_{1n}(R)$, $X \times X^t$ nécessite 2n-1 opérations, c'est une complexité linéaire de type n.
- Soit $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pq}(R)$ $A \times B$ nécessite $n(2p-1)q$ opérations, c'est une complexité de type npq.
- $A \in M_n(R)$ et $B \in M_n(R)$ $A \times B$ a une complexité de type n^3

La matrice 0

- Si A=0 alors $A \times B = 0$ et $B \times A = 0$
- L'implication réciproque est fausse : contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A \times B = 0$$

Nombre d'opérations dans un calcul de matrices : Complexité arithmétique

Il est intéressant de calculer le nombre d'opérations sur des réels pour effectuer un calcul matriciel, en général on établit un ordre de grandeur de ce nombre là appelé aussi complexité. Cette notion est largement développée en algorithmique et fait partie de l'évaluation d'un algorithme (complexité, coût, performance). Ce sujet sera défini et développé dans le chapître suivant relatif au Pivot de Gauss.

Complexité d'un produit de matrices

- Soit $X \in M_{1n}(R)$, $X \times X^t$ nécessite 2n-1 opérations, c'est une complexité linéaire de type n.
- Soit $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pq}(R)$ $A \times B$ nécessite $n(2p-1)q$ opérations, c'est une complexité de type npq.
- $A \in M_n(R)$ et $B \in M_n(R)$ $A \times B$ a une complexité de type n^3

La matrice 0

- Si A=0 alors $A \times B = 0$ et $B \times A = 0$
- L'implication réciproque est fausse : contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A \times B = 0$$

Nombre d'opérations dans un calcul de matrices : Complexité arithmétique

Il est intéressant de calculer le nombre d'opérations sur des réels pour effectuer un calcul matriciel, en général on établit un ordre de grandeur de ce nombre là appelé aussi complexité. Cette notion est largement développée en algorithmique et fait partie de l'évaluation d'un algorithme (complexité, coût, performance). Ce sujet sera défini et développé dans le chapître suivant relatif au Pivot de Gauss.

Complexité d'un produit de matrices

- Soit $X \in M_{1n}(R)$, $X \times X^t$ nécessite 2n-1 opérations, c'est une complexité linéaire de type n.
- Soit $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pq}(R)$ $A \times B$ nécessite $n(2p-1)q$ opérations, c'est une complexité de type npq.
- $A \in M_n(R)$ et $B \in M_n(R)$ $A \times B$ a une complexité de type n^3

La matrice 0

- Si A=0 alors $A \times B = 0$ et $B \times A = 0$
- L'implication réciproque est fausse : contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A \times B = 0$$

Nombre d'opérations dans un calcul de matrices : Complexité arithmétique

Il est intéressant de calculer le nombre d'opérations sur des réels pour effectuer un calcul matriciel, en général on établit un ordre de grandeur de ce nombre là appelé aussi complexité. Cette notion est largement développée en algorithmique et fait partie de l'évaluation d'un algorithme (complexité, coût, performance). Ce sujet sera défini et développé dans le chapître suivant relatif au Pivot de Gauss.

Complexité d'un produit de matrices

- Soit $X \in M_{1n}(R)$, $X \times X^t$ nécessite 2n-1 opérations, c'est une complexité linéaire de type n.
- Soit $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pq}(R)$ $A \times B$ nécessite $n(2p-1)q$ opérations, c'est une complexité de type npq.
- $A \in M_n(R)$ et $B \in M_n(R)$ $A \times B$ a une complexité de type n^3

La matrice 0

- Si A=0 alors $A \times B = 0$ et $B \times A = 0$
- L'implication réciproque est fausse : contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A \times B = 0$$

Nombre d'opérations dans un calcul de matrices : Complexité arithmétique

Il est intéressant de calculer le nombre d'opérations sur des réels pour effectuer un calcul matriciel, en général on établit un ordre de grandeur de ce nombre là appelé aussi complexité. Cette notion est largement développée en algorithmique et fait partie de l'évaluation d'un algorithme (complexité, coût, performance). Ce sujet sera défini et développé dans le chapître suivant relatif au Pivot de Gauss.

Complexité d'un produit de matrices

- Soit $X \in M_{1n}(R)$, $X \times X^t$ nécessite 2n-1 opérations, c'est une complexité linéaire de type n.
- Soit $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pq}(R)$ $A \times B$ nécessite $n(2p-1)q$ opérations, c'est une complexité de type npq.
- $A \in M_n(R)$ et $B \in M_n(R)$ $A \times B$ a une complexité de type n^3

La matrice 0

- Si A=0 alors $A \times B = 0$ et $B \times A = 0$
- L'implication réciproque est fausse : contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A \times B = 0$$

Nombre d'opérations dans un calcul de matrices : Complexité arithmétique

Il est intéressant de calculer le nombre d'opérations sur des réels pour effectuer un calcul matriciel, en général on établit un ordre de grandeur de ce nombre là appelé aussi complexité. Cette notion est largement développée en algorithmique et fait partie de l'évaluation d'un algorithme (complexité, coût, performance). Ce sujet sera défini et développé dans le chapître suivant relatif au Pivot de Gauss.

Complexité d'un produit de matrices

- Soit $X \in M_{1n}(R)$, $X \times X^t$ nécessite 2n-1 opérations, c'est une complexité linéaire de type n.
- Soit $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pq}(R)$ $A \times B$ nécessite $n(2p-1)q$ opérations, c'est une complexité de type npq.
- $A \in M_n(R)$ et $B \in M_n(R)$ $A \times B$ a une complexité de type n^3

La matrice 0

- Si A=0 alors $A \times B = 0$ et $B \times A = 0$
- L'implication réciproque est fausse : contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A \times B = 0$$

Nombre d'opérations dans un calcul de matrices : Complexité arithmétique

Il est intéressant de calculer le nombre d'opérations sur des réels pour effectuer un calcul matriciel, en général on établit un ordre de grandeur de ce nombre là appelé aussi complexité. Cette notion est largement développée en algorithmique et fait partie de l'évaluation d'un algorithme (complexité, coût, performance). Ce sujet sera défini et développé dans le chapître suivant relatif au Pivot de Gauss.

Complexité d'un produit de matrices

- Soit $X \in M_{1n}(R)$, $X \times X^t$ nécessite 2n-1 opérations, c'est une complexité linéaire de type n.
- Soit $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pq}(R)$ $A \times B$ nécessite $n(2p-1)q$ opérations, c'est une complexité de type npq.
- $A \in M_n(R)$ et $B \in M_n(R)$ $A \times B$ a une complexité de type n^3

La matrice 0

- Si A=0 alors $A \times B = 0$ et $B \times A = 0$
- L'implication réciproque est fausse : contre-exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A \times B = 0$$

Nombre d'opérations dans un calcul de matrices : Complexité arithmétique

Il est intéressant de calculer le nombre d'opérations sur des réels pour effectuer un calcul matriciel, en général on établit un ordre de grandeur de ce nombre là appelé aussi complexité. Cette notion est largement développée en algorithmique et fait partie de l'évaluation d'un algorithme (complexité, coût, performance). Ce sujet sera défini et développé dans le chapître suivant relatif au Pivot de Gauss.

Complexité d'un produit de matrices

- Soit $X \in M_{1n}(R)$, $X \times X^t$ nécessite 2n-1 opérations, c'est une complexité linéaire de type n.
- Soit $A \in M_{np}(R)$ et $B \in M_{pq}(R)$ $A \times B$ nécessite $n(2p-1)q$ opérations, c'est une complexité de type npq.
- $A \in M_n(R)$ et $B \in M_n(R)$ $A \times B$ a une complexité de type n^3

Transposition d'une matrice $A \in M_{np}(R)$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ La transposée de A est la matrice B

- $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$
- $b_{ij} = a_{ji}, \forall (i, j) \in \{1, \cdots p\} \times \{1, \cdots n\}$
- Notation : $B = ^t A$

Transposition d'une matrice $A \in M_{np}(R)$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ La transposée de A est la matrice B

- $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$
- $b_{ij} = a_{ji}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots p\} \times \{1, \cdots n\}$
- Notation : $B = ^t A$

Transposition d'une matrice $A \in M_{np}(R)$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ La transposée de A est la matrice B

- $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$
- $b_{ij} = a_{ji}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots p\} \times \{1, \cdots n\}$
- Notation : $B = ^t A$

Transposition d'une matrice $A \in M_{np}(R)$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ La transposée de A est la matrice B

- $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$
- $b_{ij} = a_{ji}, \forall (i,j) \in \{1, \cdots p\} \times \{1, \cdots n\}$
- Notation : $B =^t A$

Transposition d'une matrice $A \in M_{np}(R)$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ La transposée de A est la matrice B

- $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$
- $b_{ij} = a_{ji}, \forall (i, j) \in \{1, \cdots p\} \times \{1, \cdots n\}$
- Notation : $B =^t A$

Les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ {}^t(\lambda.A) &= \lambda.{}^tA \\ {}^t(A \times B) &= {}^tB \times {}^tA \end{aligned}$$

Les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ {}^t(\lambda.A) &= \lambda.{}^tA \\ {}^t(A \times B) &= {}^tB \times {}^tA \end{aligned}$$

Les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ {}^t(\lambda.A) &= \lambda.{}^tA \\ {}^t(A \times B) &= {}^tB \times {}^tA \end{aligned}$$

Les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ {}^t(\lambda.A) &= \lambda.{}^tA \\ {}^t(A \times B) &= {}^tB \times {}^tA \end{aligned}$$

Les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\begin{array}{rcl} {}^t(A+B) & = & {}^tA + {}^tB \\ {}^t(\lambda.A) & = & \lambda.{}^tA \\ {}^t(A \times B) & = & {}^tB \times {}^tA \end{array}$$

Les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ {}^t(\lambda.A) &= \lambda.{}^tA \\ {}^t(A \times B) &= {}^tB \times {}^tA \end{aligned}$$

Calculer AB et AC, que conclure?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On ne peut pas *simplifier*

Il existe des matrices A, B, C telles que $AB = AC$ et $B \neq C$
On ne peut pas "simplifier" par A.
Ce problème est lié au fait que deux matrices non nulles peuvent avoir un produit égal à la matrice nulle. La règle bien connue dans $\mathbb{R}$ ne s'applique pas dans l'ensemble des matrices!

Calculer AB et AC, que conclure?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On ne peut pas *simplifier*

Il existe des matrices A, B, C telles que $AB = AC$ et $B \neq C$
On ne peut pas "simplifier" par A.
Ce problème est lié au fait que deux matrices non nulles peuvent avoir un produit égal à la matrice nulle. La règle bien connue dans $\mathbb{R}$ ne s'applique pas dans l'ensemble des matrices!

Calculer AB et AC, que conclure?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On ne peut pas *simplifier*

Il existe des matrices A, B, C telles que $AB = AC$ et $B \neq C$
On ne peut pas "simplifier" par A.
Ce problème est lié au fait que deux matrices non nulles peuvent avoir un produit égal à la matrice nulle. La règle bien connue dans $\mathbb{R}$ ne s'applique pas dans l'ensemble des matrices!

Calculer AB et AC, que conclure?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On ne peut pas *simplifier*

Il existe des matrices A, B, C telles que $AB = AC$ et $B \neq C$
On ne peut pas "simplifier" par A.
Ce problème est lié au fait que deux matrices non nulles peuvent avoir un produit égal à la matrice nulle. La règle bien connue dans $\mathbb{R}$ ne s'applique pas dans l'ensemble des matrices!

Calculer AB et AC, que conclure?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On ne peut pas *simplifier*

Il existe des matrices A, B, C telles que $AB = AC$ et $B \neq C$
On ne peut pas "simplifier" par A.
Ce problème est lié au fait que deux matrices non nulles peuvent avoir un produit égal à la matrice nulle. La règle bien connue dans $\mathbb{R}$ ne s'applique pas dans l'ensemble des matrices!

Rappels: Formule du Binôme et coefficient binomial

1. La formule du binôme de Newton permet le développement de $(a+b)^n$ où a et b sont des réels et où n est un entier naturel.

$$(a+b)^n = \Sigma_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

2. $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ est un coefficient binomial et $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$

Matrices et commutativité

1. Le produit de matrices n'est pas commutatif, mais les puissances d'une même matrice commutent. Soit $\forall M \in M_{np}(\mathbb{R}), M^{\alpha} \times M^{\beta} = M^{\beta} \times M^{\alpha}, \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
2. Dans ce cas là, on peut appliquer la formule du binôme au produit de matrices.

Rappels: Formule du Binôme et coefficient binomial

1. La formule du binôme de Newton permet le développement de $(a+b)^n$ où a et b sont des réels et où n est un entier naturel.

$$(a+b)^n = \Sigma_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

2. $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ est un coefficient binomial et $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$

Matrices et commutativité

1. Le produit de matrices n'est pas commutatif, mais les puissances d'une même matrice commutent. Soit $\forall M \in M_{np}(\mathbb{R}),\ M^{\alpha} \times M^{\beta} = M^{\beta} \times M^{\alpha},\ \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
2. Dans ce cas là, on peut appliquer la formule du binôme au produit de matrices.

Rappels: Formule du Binôme et coefficient binomial

1. La formule du binôme de Newton permet le développement de $(a+b)^n$ où a et b sont des réels et où n est un entier naturel.

$$(a+b)^n = \Sigma_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

2. $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ est un coefficient binomial et $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$

Matrices et commutativité

1. Le produit de matrices n'est pas commutatif, mais les puissances d'une même matrice commutent. Soit $\forall M \in M_{np}(\mathbb{R}),\ M^{\alpha} \times M^{\beta} = M^{\beta} \times M^{\alpha},\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$
2. Dans ce cas là, on peut appliquer la formule du binôme au produit de matrices.

Rappels: Formule du Binôme et coefficient binomial

1. La formule du binôme de Newton permet le développement de $(a+b)^n$ où a et b sont des réels et où n est un entier naturel.

$$(a+b)^n = \Sigma_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

2. $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ est un coefficient binomial et $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$

Matrices et commutativité

1. Le produit de matrices n'est pas commutatif, mais les puissances d'une même matrice commutent. Soit $\forall M \in M_{np}(\mathbb{R}), M^{\alpha} \times M^{\beta} = M^{\beta} \times M^{\alpha}, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
2. Dans ce cas là, on peut appliquer la formule du binôme au produit de matrices.

Rappels: Formule du Binôme et coefficient binomial

1. La formule du binôme de Newton permet le développement de $(a+b)^n$ où a et b sont des réels et où n est un entier naturel.

$$(a+b)^n = \Sigma_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p}$$

2. $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ est un coefficient binomial et $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$

Matrices et commutativité

1. Le produit de matrices n'est pas commutatif, mais les puissances d'une même matrice commutent. Soit $\forall M \in M_{np}(\mathbb{R})$, $M^{\alpha} \times M^{\beta} = M^{\beta} \times M^{\alpha}$, $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$
2. Dans ce cas là, on peut appliquer la formule du binôme au produit de matrices.

Calculer A^n

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $M = A - I_2$
2. Déterminer M^2 en fonction de M
3. Montrer par récurrence que $M^n = 3^{n-1}M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
4. Déterminer A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
5. Montrer que
$$A^n = I_2 + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right].M$$
6. Montrer que
$$3\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right] + 1 = 4^n$$
7. En déduire que $A^n = I_2 + \frac{4^n-1}{3}.M$

Calculer A^n

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $M = A - I_2$
2. Déterminer M^2 en fonction de M
3. Montrer par récurrence que $M^n = 3^{n-1}M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
4. Déterminer A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
5. Montrer que
$$A^n = I_2 + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right].M$$
6. Montrer que
$$3\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right] + 1 = 4^n$$
7. En déduire que $A^n = I_2 + \frac{4^n-1}{3}.M$

Calculer A^n

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $M = A - I_2$
2. Déterminer M^2 en fonction de M
3. Montrer par récurrence que $M^n = 3^{n-1}M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
4. Déterminer A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
5. Montrer que
$$A^n = I_2 + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right].M$$
6. Montrer que
$$3\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right] + 1 = 4^n$$
7. En déduire que $A^n = I_2 + \frac{4^n-1}{3}.M$

Calculer A^n

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $M = A - I_2$
2. Déterminer M^2 en fonction de M
3. Montrer par récurrence que $M^n = 3^{n-1}M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
4. Déterminer A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
5. Montrer que
$$A^n = I_2 + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} \right] .M$$
6. Montrer que
$$3 \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} \right] + 1 = 4^n$$
7. En déduire que $A^n = I_2 + \frac{4^n - 1}{3} .M$

Utilisation de matrices nilpotentes

$$Soit\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2,A^3,A^4.
Indications :
La matrice B est nilpotente ie :

$$\exists p \in N / B^p = O \text{ et } B^{p-1} \neq O(\text{indice de nilpotence} = p) \text{ et } A = I_3 + B.$$

On utilise ensuite la formule du binôme de Newton appliquée aux matrices quand elles commutent.

Utilisation de matrices nilpotentes

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2,A^3,A^4.
Indications :
La matrice B est nilpotente ie :

$$\exists p \in N / B^p = O \text{ et } B^{p-1} \neq O(\text{indice de nilpotence} = p) \text{ et } A = I_3 + B.$$

On utilise ensuite la formule du binôme de Newton appliquée aux matrices quand elles commutent.

Utilisation de matrices nilpotentes

$$Soit\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2,A^3,A^4.
Indications :
La matrice B est nilpotente ie :

$$\exists p \in N / B^p = O \text{ et } B^{p-1} \neq O(\text{indice de nilpotence} = p) \text{ et } A = I_3 + B.$$

On utilise ensuite la formule du binôme de Newton appliquée aux matrices quand elles commutent.

Utilisation de matrices nilpotentes

$$Soit\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2,A^3,A^4.
Indications :
La matrice B est nilpotente ie :

$$\exists p \in N / B^p = O \text{ et } B^{p-1} \neq O (\text{indice de nilpotence} = p) \text{ et } A = I_3 + B.$$

On utilise ensuite la formule du binôme de Newton appliquée aux matrices quand elles commutent.

Utilisation de matrices nilpotentes

$$Soit\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2,A^3,A^4.
Indications :
La matrice B est nilpotente ie :

$$\exists p \in N / B^p = O \text{ et } B^{p-1} \neq O(\text{indice de nilpotence = } p) \text{ et } A = I_3 + B.$$

On utilise ensuite la formule du binôme de Newton appliquée aux matrices quand elles commutent.

Utilisation de matrices nilpotentes

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2,A^3,A^4.
Indications :
La matrice B est nilpotente ie :

$$\exists p \in N / B^p = O \text{ et } B^{p-1} \neq O(\text{indice de nilpotence} = p) \text{ et } A = I_3 + B.$$

On utilise ensuite la formule du binôme de Newton appliquée aux matrices quand elles commutent.

Plan

Définition

Lorsque le nombre de lignes de la matrice A est égal à son nombre de colonnes, soit $n = p$, la matrice A est alors une matrice carrée de taille $n \times n$

Notations

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $a_{ij} \in R$
- $A \in M_n(R)$
- $M_n(R)$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels de taille $n \times n$

Définition

Lorsque le nombre de lignes de la matrice A est égal à son nombre de colonnes, soit $n = p$, la matrice A est alors une matrice carrée de taille $n \times n$

Notations

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $a_{ij} \in R$
- $A \in M_n(R)$
- $M_n(R)$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels de taille $n \times n$

Définition

Lorsque le nombre de lignes de la matrice A est égal à son nombre de colonnes, soit $n = p$, la matrice A est alors une matrice carrée de taille $n \times n$

Notations

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $a_{ij} \in R$
- $A \in M_n(R)$
- $M_n(R)$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels de taille $n \times n$

Définition

Lorsque le nombre de lignes de la matrice A est égal à son nombre de colonnes, soit $n = p$, la matrice A est alors une matrice carrée de taille $n \times n$

Notations

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $a_{ij} \in R$
- $A \in M_n(R)$
- $M_n(R)$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels de taille $n \times n$

Définition

Lorsque le nombre de lignes de la matrice A est égal à son nombre de colonnes, soit $n = p$, la matrice A est alors une matrice carrée de taille $n \times n$

Notations

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $a_{ij} \in R$
- $A \in M_n(R)$
- $M_n(R)$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels de taille $n \times n$

Définition

Lorsque le nombre de lignes de la matrice A est égal à son nombre de colonnes, soit $n = p$, la matrice A est alors une matrice carrée de taille $n \times n$

Notations

- $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $a_{ij} \in R$
- $A \in M_n(R)$
- $M_n(R)$ est l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels de taille $n \times n$

Diagonale d'une matrice carrée

Soit la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, la diagonale de A est le n-uplet de réels constitués des éléments diagonaux de A.

- $(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$
- Les a_{ii} s'appellent les éléments diagonaux de A.

Diagonale d'une matrice carrée

Soit la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, la diagonale de A est le n-uplet de réels constitués des éléments diagonaux de A.

- $(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$
- Les a_{ii} s'appellent les éléments diagonaux de A.

Diagonale d'une matrice carrée

Soit la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, la diagonale de A est le n-uplet de réels constitués des éléments diagonaux de A.

- $(a_{11}\,,\, a_{22}\,,\, \cdots\ ,\, a_{nn})$
- Les a_{ii} s'appellent les éléments diagonaux de A.

Diagonale d'une matrice carrée

Soit la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, la diagonale de A est le n-uplet de réels constitués des éléments diagonaux de A.

- $(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$
- Les a_{ii} s'appellent les éléments diagonaux de A.

Plan

Matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- I_n est la matrice identité de taille $n \times n$.
- $I_n \in M_n(R)$

I_n élément neutre du produit des matrices dans $M_n(R)$

$$\forall A \in M_n(R), A \times I_n = I_n \times A = A$$

Matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- I_n est la matrice identité de taille $n \times n$.
- $I_n \in M_n(R)$

I_n élément neutre du produit des matrices dans $M_n(R)$

$$\forall A \in M_n(R), A \times I_n = I_n \times A = A$$

Matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- I_n est la matrice identité de taille $n \times n$.
- $I_n \in M_n(R)$

I_n élément neutre du produit des matrices dans $M_n(R)$

$$\forall A \in M_n(R), A \times I_n = I_n \times A = A$$

Matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- I_n est la matrice identité de taille $n \times n$.
- $I_n \in M_n(R)$

I_n élément neutre du produit des matrices dans $M_n(R)$

$$\forall A \in M_n(R), A \times I_n = I_n \times A = A$$

Matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- I_n est la matrice identité de taille $n \times n$.
- $I_n \in M_n(R)$

I_n élément neutre du produit des matrices dans $M_n(R)$

$$\forall A \in M_n(R), A \times I_n = I_n \times A = A$$

Matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- I_n est la matrice identité de taille $n \times n$.
- $I_n \in M_n(R)$

I_n élément neutre du produit des matrices dans $M_n(R)$

$$\forall A \in M_n(R), A \times I_n = I_n \times A = A$$

‘

Matrice diagonale

Une matrice est diagonale si seuls les éléments diagonaux sont susceptibles d'être non nuls.

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

- $D_n \in M_n(R)$
- $d_{ij} = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$
- $d_{ii} \in R$

Matrice diagonale

Une matrice est diagonale si seuls les éléments diagonaux sont susceptibles d'être non nuls.

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

- $D_n \in M_n(R)$
- $d_{ij} = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$
- $d_{ii} \in R$

Matrice diagonale

Une matrice est diagonale si seuls les éléments diagonaux sont susceptibles d'être non nuls.

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

- $D_n \in M_n(R)$
- $d_{ij} = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$
- $d_{ii} \in R$

Matrice diagonale

Une matrice est diagonale si seuls les éléments diagonaux sont susceptibles d'être non nuls.

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

- $D_n \in M_n(R)$
- $d_{ij} = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$
- $d_{ii} \in R$

Matrice diagonale

Une matrice est diagonale si seuls les éléments diagonaux sont susceptibles d'être non nuls.

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

- $D_n \in M_n(R)$
- $d_{ij} = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$
- $d_{ii} \in R$

Matrice diagonale

Une matrice est diagonale si seuls les éléments diagonaux sont susceptibles d'être non nuls.

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

- $D_n \in M_n(R)$
- $d_{ij} = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$
- $d_{ii} \in R$

Matrice scalaire : cas particulier de matrice diagonale

Lorsque tous les coefficients diagonaux sont égaux au même réel λ dans une matrice diagonale, la matrice est alors scalaire.

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

- $\Lambda_n \in M_n(R)$
- $\Lambda_n = \lambda . I_n$

Matrice scalaire : cas particulier de matrice diagonale

Lorsque tous les coefficients diagonaux sont égaux au même réel λ dans une matrice diagonale, la matrice est alors scalaire.

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

- $\Lambda_n \in M_n(R)$
- $\Lambda_n = \lambda . I_n$

Matrice scalaire : cas particulier de matrice diagonale

Lorsque tous les coefficients diagonaux sont égaux au même réel λ dans une matrice diagonale, la matrice est alors scalaire.

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

- $\Lambda_n \in M_n(R)$
- $\Lambda_n = \lambda.I_n$

Matrice scalaire : cas particulier de matrice diagonale

Lorsque tous les coefficients diagonaux sont égaux au même réel λ dans une matrice diagonale, la matrice est alors scalaire.

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

- $\Lambda_n \in M_n(R)$
- $\Lambda_n = \lambda.I_n$

Matrice scalaire : cas particulier de matrice diagonale

Lorsque tous les coefficients diagonaux sont égaux au même réel λ dans une matrice diagonale, la matrice est alors scalaire.

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

- $\Lambda_n \in M_n(R)$
- $\Lambda_n = \lambda.I_n$

Matrice triangulaire supérieure

La matrice T est triangulaire supérieure si tous les termes situés au dessous de la diagonale sont nuls.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $T \in M_n(R)$
- $t_{ij} = 0, \forall i > j, 1 \leq i, j \leq n$

Matrice triangulaire inférieure

La matrice T est triangulaire inférieure si tous les termes situés au dessus de la diagonale sont nuls.
Travail personnel : Ecrire les conditions sur t_{ij} pour que T soit triangulaire inférieure.

Matrice triangulaire supérieure

La matrice T est triangulaire supérieure si tous les termes situés au dessous de la diagonale sont nuls.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $T \in M_n(R)$
- $t_{ij} = 0, \forall i > j, 1 \leq i, j \leq n$

Matrice triangulaire inférieure

La matrice T est triangulaire inférieure si tous les termes situés au dessus de la diagonale sont nuls.
Travail personnel : Ecrire les conditions sur t_{ij} pour que T soit triangulaire inférieure.

Matrice triangulaire supérieure

La matrice T est triangulaire supérieure si tous les termes situés au dessous de la diagonale sont nuls.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $T \in M_n(R)$
- $t_{ij} = 0, \forall i > j, 1 \leq i, j \leq n$

Matrice triangulaire inférieure

La matrice T est triangulaire inférieure si tous les termes situés au dessus de la diagonale sont nuls.
Travail personnel : Ecrire les conditions sur t_{ij} pour que T soit triangulaire inférieure.

Matrice triangulaire supérieure

La matrice T est triangulaire supérieure si tous les termes situés au dessous de la diagonale sont nuls.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $T \in M_n(R)$
- $t_{ij} = 0, \forall i > j, 1 \leq i, j \leq n$

Matrice triangulaire inférieure

La matrice T est triangulaire inférieure si tous les termes situés au dessus de la diagonale sont nuls.
Travail personnel : Ecrire les conditions sur t_{ij} pour que T soit triangulaire inférieure.

Matrice triangulaire supérieure

La matrice T est triangulaire supérieure si tous les termes situés au dessous de la diagonale sont nuls.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $T \in M_n(R)$
- $t_{ij} = 0, \forall i > j, 1 \leq i, j \leq n$

Matrice triangulaire inférieure

La matrice T est triangulaire inférieure si tous les termes situés au dessus de la diagonale sont nuls.
Travail personnel : Ecrire les conditions sur t_{ij} pour que T soit triangulaire inférieure.

Matrice triangulaire supérieure

La matrice T est triangulaire supérieure si tous les termes situés au dessous de la diagonale sont nuls.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $T \in M_n(R)$
- $t_{ij} = 0, \forall i > j, 1 \leq i, j \leq n$

Matrice triangulaire inférieure

La matrice T est triangulaire inférieure si tous les termes situés au dessus de la diagonale sont nuls.
Travail personnel : Ecrire les conditions sur t_{ij} pour que T soit triangulaire inférieure.

Matrice triangulaire stricte

Une matrice est triangulaire stricte si elle est triangulaire et si de plus les éléments diagonaux sont nuls.

- T est triangulaire supérieure stricte $\Leftrightarrow t_{ij} = 0, \forall i \geq j, 1 \leq i, j \leq n$
- *Travail personnel : Ecrire les conditions sur t_{ij} pour que T soit triangulaire inférieure stricte.*

Matrice triangulaire stricte

Une matrice est triangulaire stricte si elle est triangulaire et si de plus les éléments diagonaux sont nuls.

- T est triangulaire supérieure stricte $\Leftrightarrow t_{ij} = 0, \forall i \geq j, 1 \leq i, j \leq n$
- *Travail personnel : Ecrire les conditions sur t_{ij} pour que T soit triangulaire inférieure stricte.*

Matrice triangulaire stricte

Une matrice est triangulaire stricte si elle est triangulaire et si de plus les éléments diagonaux sont nuls.

- T est triangulaire supérieure stricte $\Leftrightarrow t_{ij} = 0, \forall i \geq j, 1 \leq i, j \leq n$
- *Travail personnel : Ecrire les conditions sur t_{ij} pour que T soit triangulaire inférieure stricte.*

Matrice triangulaire stricte

Une matrice est triangulaire stricte si elle est triangulaire et si de plus les éléments diagonaux sont nuls.

- T est triangulaire supérieure stricte $\Leftrightarrow t_{ij} = 0, \forall i \geq j, 1 \leq i, j \leq n$
- *Travail personnel : Ecrire les conditions sur t_{ij} pour que T soit triangulaire inférieure stricte.*

Matrice symétrique, matrice antisymétrique

1. Soit une matrice $A \in M_n(R)$, A est une matrice symétrique si
   - ${}^tA = A$
   - Au niveau des éléments : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
2. Soit une matrice $B \in M_n(R)$, B est une matrice antisymétrique si
   - ${}^tB = -B$
   - Au niveau des éléments : $b_{ij} = -b_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
   - dans ce cas là : $b_{ii} = 0$, $\forall i, 1 \leq i \leq n$

Matrice symétrique, matrice antisymétrique

1. Soit une matrice $A \in M_n(R)$, A est une matrice symétrique si
   - ${}^tA = A$
   - Au niveau des éléments : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
2. Soit une matrice $B \in M_n(R)$, B est une matrice antisymétrique si
   - ${}^tB = -B$
   - Au niveau des éléments : $b_{ij} = -b_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
   - dans ce cas là : $b_{ii} = 0 \ , \forall i, 1 \leq i \leq n$

Matrice symétrique, matrice antisymétrique

1. Soit une matrice $A \in M_n(R)$, A est une matrice symétrique si
   - ${}^tA = A$
   - Au niveau des éléments : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
2. Soit une matrice $B \in M_n(R)$, B est une matrice antisymétrique si
   - ${}^tB = -B$
   - Au niveau des éléments : $b_{ij} = -b_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
   - dans ce cas là : $b_{ii} = 0$, $\forall i, 1 \leq i \leq n$

Matrice symétrique, matrice antisymétrique

1. Soit une matrice $A \in M_n(R)$, A est une matrice symétrique si
   - ${}^tA = A$
   - Au niveau des éléments : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i,j, 1 \leq i,j \leq n$
2. Soit une matrice $B \in M_n(R)$, B est une matrice antisymétrique si
   - ${}^tB = -B$
   - Au niveau des éléments : $b_{ij} = -b_{ji}, \forall i,j, 1 \leq i,j \leq n$
   - dans ce cas là : $b_{ii} = 0$, $\forall i, 1 \leq i \leq n$

Matrice symétrique, matrice antisymétrique

1. Soit une matrice $A \in M_n(R)$, A est une matrice symétrique si
   - ${}^tA = A$
   - Au niveau des éléments : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
2. Soit une matrice $B \in M_n(R)$, B est une matrice antisymétrique si
   - ${}^tB = -B$
   - Au niveau des éléments : $b_{ij} = -b_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
   - dans ce cas là : $b_{ii} = 0$, $\forall i, 1 \leq i \leq n$

Matrice symétrique, matrice antisymétrique

1. Soit une matrice $A \in M_n(R)$, A est une matrice symétrique si
   - ${}^tA = A$
   - Au niveau des éléments : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
2. Soit une matrice $B \in M_n(R)$, B est une matrice antisymétrique si
   - ${}^tB = -B$
   - Au niveau des éléments : $b_{ij} = -b_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
   - dans ce cas là : $b_{ii} = 0$, $\forall i, 1 \leq i \leq n$

Matrice symétrique, matrice antisymétrique

1. Soit une matrice $A \in M_n(R)$, A est une matrice symétrique si
   - ${}^tA = A$
   - Au niveau des éléments : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
2. Soit une matrice $B \in M_n(R)$, B est une matrice antisymétrique si
   - ${}^tB = -B$
   - Au niveau des éléments : $b_{ij} = -b_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
   - dans ce cas là : $b_{ii} = 0$, $\forall i, 1 \leq i \leq n$

Matrice symétrique, matrice antisymétrique

1. Soit une matrice $A \in M_n(R)$, A est une matrice symétrique si
   - ${}^tA = A$
   - Au niveau des éléments : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
2. Soit une matrice $B \in M_n(R)$, B est une matrice antisymétrique si
   - ${}^tB = -B$
   - Au niveau des éléments : $b_{ij} = -b_{ji}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$
   - dans ce cas là : $b_{ii} = 0 , \forall i, 1 \leq i \leq n$

Matrice symétrique, matrice antisymétrique

1. Soit une matrice $A \in M_n(R)$, A est une matrice symétrique si
   - ${}^tA = A$
   - Au niveau des éléments : $a_{ij} = a_{ji}, \forall i,j,\ 1 \leq i,j \leq n$
2. Soit une matrice $B \in M_n(R)$, B est une matrice antisymétrique si
   - ${}^tB = -B$
   - Au niveau des éléments : $b_{ij} = -b_{ji}, \forall i,j,\ 1 \leq i,j \leq n$
   - dans ce cas là : $b_{ii} = 0\ , \forall i,\ 1 \leq i \leq n$

Dire quelle matrice est symétrique, quelle matrice est antisymétrique

- $$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
  $$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
- *Travail personnel : Vérifier que, pour toute matrice A, le produit $A^t A$ est une matrice carrée symétrique.*

Dire quelle matrice est symétrique, quelle matrice est antisymétrique

-
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
- *Travail personnel : Vérifier que, pour toute matrice A, le produit $A^t A$ est une matrice carrée symétrique.*

Dire quelle matrice est symétrique, quelle matrice est antisymétrique

- $$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
  $$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
- *Travail personnel : Vérifier que, pour toute matrice A, le produit $A^t A$ est une matrice carrée symétrique.*

Dire quelle matrice est symétrique, quelle matrice est antisymétrique

- $$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

  $$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- *Travail personnel : Vérifier que, pour toute matrice A, le produit $A^t A$ est une matrice carrée symétrique.*

Dire quelle matrice est symétrique, quelle matrice est antisymétrique

- $$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
  $$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
- *Travail personnel : Vérifier que, pour toute matrice A, le produit $A^t A$ est une matrice carrée symétrique.*

Dire quelle matrice est symétrique, quelle matrice est antisymétrique

- $$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
  $$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
- *Travail personnel : Vérifier que, pour toute matrice A, le produit $A^t A$ est une matrice carrée symétrique.*

Plan

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk})$, $P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
  $p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk})$, $D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i, d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
  $T_{ij}(\lambda) = (t_{lk})$, $T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
  $t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}$, $t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk})$, $P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
  $p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk})$, $D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i$, $d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
  $T_{ij}(\lambda) = (t_{lk})$, $T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
  $t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}$, $t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk}), P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
$p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk}), D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i, d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
$T_{ij}(\lambda) = (t_{lk}), T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
$t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}, t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk}), P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
  $p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk}), D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i, d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
  $T_{ij}(\lambda) = (t_{lk}), T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
  $t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}, t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk}), P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
  $p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk}), D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i, d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
  $T_{ij}(\lambda) = (t_{lk}), T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
  $t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}, t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk})$, $P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
  $p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk})$, $D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i$, $d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
  $T_{ij}(\lambda) = (t_{lk})$, $T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
  $t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}$, $t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk})$, $P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
  $p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk})$, $D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i$, $d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
  $T_{ij}(\lambda) = (t_{lk})$, $T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
  $t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}$, $t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk}), P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
  $p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk}), D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i, d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
  $T_{ij}(\lambda) = (t_{lk}), T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
  $t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}, t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk})$, $P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
  $p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk})$, $D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i, d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
  $T_{ij}(\lambda) = (t_{lk})$, $T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
  $t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}, t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk})$, $P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
  $p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk})$, $D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i, d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
  $T_{ij}(\lambda) = (t_{lk})$, $T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
  $t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}, t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur les lignes(resp. les colonnes) d'une matrice $A \in M_n(R)$

- La transposition de deux lignes de A, nommée permutation.
- Le produit par λ de la ligne i, nommée dilatation.
- l'addition à la ligne i de A de λ fois la ligne j de A, nommée transvection.

Matrice associées à ses opérations élémentaires

En multipliant à gauche par la matrice de transformation, la transformation s'opère sur les lignes de la matrice A et en multipliant à droite la transformation s'opère sur les colonnes.

- La matrice de permutation des lignes(resp.colonnes) i et j est définie par : $P_{ij} = (p_{lk})$, $P_{ij} \in M_n(R)$ telle que
  $p_{ll} = 1 \forall l \neq i, l \neq j, p_{ii} = p_{jj} = 0, p_{ij} = p_{ji} = 1, p_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de dilatation de la ligne(resp.colonne) i est définie par : $D_i(\lambda) = (d_{lk})$, $D_i(\lambda) \in M_n(R)$ telle que $d_{ll} = 1 \forall l \neq i, d_{ii} = \lambda$ et $d_{lk} = 0$ sinon.
- La matrice de transvection qui ajoute à la ligne(resp.colonne) i, λ fois la ligne(resp.colonne) j est définie par :
  $T_{ij}(\lambda) = (t_{lk})$, $T_{ij}(\lambda) \in M_n(R)$ telle que
  $t_{ll} = 1 \forall l \in \{1, 2 \cdots n\}, t_{ij} = \lambda$ et $t_{lk} = 0$ sinon.