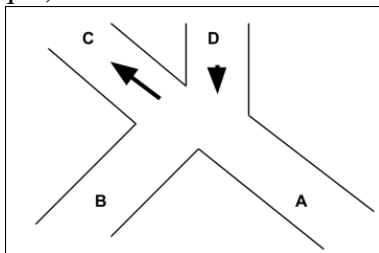


1 Un problème de carrefour.

On considère l'intersection représentée par le schéma suivant (une flèche indique une voie à sens unique).



On peut vérifier qu'il y a 7 façons différentes de traverser ce carrefour (les demi-tours sont naturellement interdits !...) : AB, AC, BA, etc.

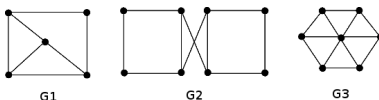
On souhaite mettre en place des feux de signalisation pour ce carrefour. On suppose qu'à chaque traversée possible est associée un feu. Ainsi, venant de A, nous avons deux possibilités : aller en B ou en C. Il y aura donc deux voies sur A menant au carrefour, chacune avec son feu indépendant.

On veut assurer que lorsqu'un feu est vert (pour une traversée donnée) toutes les traversées « en conflit de croisement » sont au rouge (deux traversées sont en conflit si les véhicules les empruntant sont amenés à se croiser). Une solution très simple consiste à faire passer au vert successivement et une à une chacune des traversées ; on obtient alors un « cycle de feux » de longueur 7 (lorsqu'un feu passe au rouge, il faut attendre 6 changements pour avoir le vert à nouveau). Ce n'est naturellement pas satisfaisant et l'on aimerait trouver un cycle de feux correct de longueur minimale !

Comment doit-on procéder pour cela ?

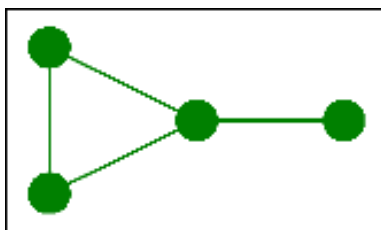
2 Nombre de clique et nombre de stabilité.

(1) Déterminez le nombre de clique (i.e. la taille maximale d'une clique) et le nombre de stabilité (i.e. la taille maximale d'un ensemble indépendant) des graphes suivants :



(2) Combien de cliques contient le graphe de droite ?

Dans ce qui suit, n désigne le nombre de sommets du graphe G . (3) Trouvez un graphe G pour lequel $\omega(G) > n / \alpha(G)$.



(4) Trouvez un graphe G pour lequel $\omega(G) < n / \alpha(G)$.

(5) Trouvez un graphe G pour lequel $\omega(G) = n / \alpha(G)$.

3 Nombre chromatique et degré maximum.

Montrez que pour tout graphe G , l'algorithme First-Fit produit une coloration de G utilisant au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs.

4 Algorithme First-Fit et nombre chromatique.

Montrez que pour tout graphe G , il existe un ordre de ses sommets pour lequel l'algorithme First-Fit produit une coloration optimale, c'est-à-dire utilisant $\chi(G)$ couleurs.

5 Algorithme de Welsh et Powell.

Appliquer l'algorithme de Welsh et Powell aux graphes de l'exercice 1.

6 Est-ce une bonne coloration ?

Écrire une fonction qui, à partir d'un graphe G sans boucle à N sommets et d'un tableau associant un entier à chaque sommet, détermine si ce tableau correspond à une coloration propre du graphe G .

7 Écriture de l'algorithme First-Fit

Écrire une action qui, à partir d'un graphe G sans boucle à N sommets, retourne la coloration obtenue par l'algorithme First-Fit (en traitant les sommets dans l'ordre $0, 1, \dots, N$) sous forme d'un tableau associant un entier à chaque sommet, ainsi que le nombre de couleurs utilisées. On pourra (on devra !) décomposer le problème et donc utiliser des actions ou fonctions auxiliaires...