ALGEBRE LINEAIRE M1202

BC

Ce support de cours n'est pas fait pour être imprimé mais pour être consulté.D'autre part, il ne contient que des définitions, une partie essentielle de ce cours est développée au tableau sous forme d'exercices et de démonstrations.

Plan

Plan

Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté $tr(A)$ égal à la somme des éléments diagonaux de A.

- $tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$

Propriétés

- $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
  $\forall \lambda \in R, \forall A, B \in M_n(R)$

Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté $tr(A)$ égal à la somme des éléments diagonaux de A.

- $tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$

Propriétés

- $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
  $\forall \lambda \in R, \forall A, B \in M_n(R)$

Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté $tr(A)$ égal à la somme des éléments diagonaux de A.

- $tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$

Propriétés

- $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
  $\forall \lambda \in R, \forall A, B \in M_n(R)$

Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté $tr(A)$ égal à la somme des éléments diagonaux de A.

- $tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$

Propriétés

- $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
  $\forall \lambda \in R, \forall A, B \in M_n(R)$

Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté $tr(A)$ égal à la somme des éléments diagonaux de A.

- $tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$

Propriétés

- $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
  $\forall \lambda \in R, \forall A, B \in M_n(R)$

Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté $tr(A)$ égal à la somme des éléments diagonaux de A.

- $tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$

Propriétés

- $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
  $\forall \lambda \in R, \forall A, B \in M_n(R)$

Matrice inverse

- Soit $A \in M_n(R)$ A est inversible si $\exists B \in M_n(R)$ telle que $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A^{-1}

Propriétés

- L'inverse de A, A^{-1} est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$)

Matrice inverse

- Soit $A \in M_n(R)$ A est inversible si $\exists B \in M_n(R)$ telle que $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A^{-1}

Propriétés

- L'inverse de A, A^{-1} est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$)

Matrice inverse

- Soit $A \in M_n(R)$ A est inversible si $\exists B \in M_n(R)$ telle que $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A^{-1}

Propriétés

- L'inverse de A, A^{-1} est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$)

Matrice inverse

- Soit $A \in M_n(R)$ A est inversible si $\exists B \in M_n(R)$ telle que $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A^{-1}

Propriétés

- L'inverse de A, A^{-1} est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$)

Matrice inverse

- Soit $A \in M_n(R)$ A est inversible si $\exists B \in M_n(R)$ telle que $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A^{-1}

Propriétés

- L'inverse de A, A^{-1} est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$)

Matrice inverse

- Soit $A \in M_n(R)$ A est inversible si $\exists B \in M_n(R)$ telle que $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A^{-1}

Propriétés

- L'inverse de A, A^{-1} est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$)

Matrice inverse

- Soit $A \in M_n(R)$ A est inversible si $\exists B \in M_n(R)$ telle que $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A^{-1}

Propriétés

- L'inverse de A, A^{-1} est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$)

Matrice inverse

- Soit $A \in M_n(R)$ A est inversible si $\exists B \in M_n(R)$ telle que $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A^{-1}

Propriétés

- L'inverse de A, A^{-1} est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$)

Matrice inverse

- Soit $A \in M_n(R)$ A est inversible si $\exists B \in M_n(R)$ telle que $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A^{-1}

Propriétés

- L'inverse de A, A^{-1} est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$)

Théorème

Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$,$T \in M_n(R)$,$F \in M_n(R)$, $K \in R^n$,$C \in R^n$ et soit le système $AX = K$
T est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss.
C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système $AX = K$ par la même méthode.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *A est inversible.*
2. *Le système AX=K admet une unique solution.*
3. *Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution.*
4. *Les coefficients diagonaux de T sont tous différents de 0, soit : $\forall 1 \leq i \leq n, t_{ii} \neq 0$*
5. *La matrice triangulaire T obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss est inversible.*

Théorème

Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$,$T \in M_n(R)$,$F \in M_n(R)$, $K \in R^n$,$C \in R^n$ et soit le système $AX = K$
T est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss.
C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système $AX = K$ par la même méthode.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *A est inversible.*
2. *Le système AX=K admet une unique solution.*
3. *Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution.*
4. *Les coefficients diagonaux de T sont tous différents de 0, soit : $\forall 1 \leq i \leq n, t_{ii} \neq 0$*
5. *La matrice triangulaire T obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss est inversible.*

Théorème

Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$,$T \in M_n(R)$,$F \in M_n(R)$, $K \in R^n$,$C \in R^n$ et soit le système $AX = K$
T est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss.
C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système $AX = K$ par la même méthode.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *A est inversible.*
2. *Le système AX=K admet une unique solution.*
3. *Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution.*
4. *Les coefficients diagonaux de T sont tous différents de 0, soit : $\forall 1 \leq i \leq n, t_{ii} \neq 0$*
5. *La matrice triangulaire T obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss est inversible.*

Théorème

Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$,$T \in M_n(R)$,$F \in M_n(R)$, $K \in R^n$,$C \in R^n$ et soit le système $AX = K$
T est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss.
C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système $AX = K$ par la même méthode.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *A est inversible.*
2. *Le système AX=K admet une unique solution.*
3. *Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution.*
4. *Les coefficients diagonaux de T sont tous différents de 0, soit : $\forall 1 \leq i \leq n, t_{ii} \neq 0$*
5. *La matrice triangulaire T obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss est inversible.*

Théorème

Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$,$T \in M_n(R)$,$F \in M_n(R)$, $K \in R^n$,$C \in R^n$ et soit le système $AX = K$
T est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss.
C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système $AX = K$ par la même méthode.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *A est inversible.*
2. *Le système AX=K admet une unique solution.*
3. *Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution.*
4. *Les coefficients diagonaux de T sont tous différents de 0, soit : $\forall 1 \leq i \leq n, t_{ii} \neq 0$*
5. *La matrice triangulaire T obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss est inversible.*

Théorème

Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$,$T \in M_n(R)$,$F \in M_n(R)$, $K \in R^n$,$C \in R^n$ et soit le système $AX = K$
T est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss.
C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système $AX = K$ par la même méthode.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *A est inversible.*
2. *Le système AX=K admet une unique solution.*
3. *Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution.*
4. *Les coefficients diagonaux de T sont tous différents de 0, soit : $\forall 1 \leq i \leq n, t_{ii} \neq 0$*
5. *La matrice triangulaire T obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss est inversible.*

Théorème

Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$,$T \in M_n(R)$,$F \in M_n(R)$, $K \in R^n$,$C \in R^n$ et soit le système $AX = K$
T est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss.
C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système $AX = K$ par la même méthode.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *A est inversible.*
2. *Le système AX=K admet une unique solution.*
3. *Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution.*
4. *Les coefficients diagonaux de T sont tous différents de 0, soit : $\forall 1 \leq i \leq n, t_{ii} \neq 0$*
5. *La matrice triangulaire T obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss est inversible.*

Démonstration

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ **(cf cours)**
Une étape $(4 \Rightarrow 5)$ Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\forall 1 \leq i \leq n, t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ le système $TX = C$ admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit $X = T'C$ où $T' \in M_n(R)$.
- $T(T'C) = (TT')C$ par associativité du produit d'une part et $T(T'C) = TX$ d'autre part, $\forall C \in M_n(R)$.
- On en déduit que $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que $T'T = I_n$

Démonstration

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ **(cf cours)**
Une étape $(4 \Rightarrow 5)$ Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\forall 1 \leq i \leq n$, $t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ le système $TX = C$ admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit $X = T'C$ où $T' \in M_n(R)$.
- $T(T'C) = (TT')C$ par associativité du produit d'une part et $T(T'C) = TX$ d'autre part, $\forall C \in M_n(R)$.
- On en déduit que $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que $T'T = I_n$

Démonstration

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ **(cf cours)**
Une étape $(4 \Rightarrow 5)$ Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\forall 1 \leq i \leq n$, $t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ le système $TX = C$ admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit $X = T'C$ où $T' \in M_n(R)$.
- $T(T'C) = (TT')C$ par associativité du produit d'une part et $T(T'C) = TX$ d'autre part, $\forall C \in M_n(R)$.
- On en déduit que $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que $T'T = I_n$

Démonstration

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ **(cf cours)**
Une étape ($4 \Rightarrow 5$) Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\forall 1 \leq i \leq n$, $t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ le système $TX = C$ admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit $X = T'C$ où $T' \in M_n(R)$.
- $T(T'C) = (TT')C$ par associativité du produit d'une part et $T(T'C) = TX$ d'autre part, $\forall C \in M_n(R)$.
- On en déduit que $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que $T'T = I_n$

Démonstration

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ **(cf cours)**
Une étape $(4 \Rightarrow 5)$ Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\forall 1 \leq i \leq n$, $t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ le système $TX = C$ admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit $X = T'C$ où $T' \in M_n(R)$.
- $T(T'C) = (TT')C$ par associativité du produit d'une part et $T(T'C) = TX$ d'autre part, $\forall C \in M_n(R)$.
- On en déduit que $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que $T'T = I_n$

Démonstration

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ **(cf cours)**
Une étape $(4 \Rightarrow 5)$ Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\forall 1 \leq i \leq n, t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ le système $TX = C$ admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit $X = T'C$ où $T' \in M_n(R)$.
- $T(T'C) = (TT')C$ par associativité du produit d'une part et $T(T'C) = TX$ d'autre part, $\forall C \in M_n(R)$.
- On en déduit que $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que $T'T = I_n$

Démonstration

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ **(cf cours)**
Une étape ($4 \Rightarrow 5$) Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\forall 1 \leq i \leq n$, $t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ le système $TX = C$ admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit $X = T'C$ où $T' \in M_n(R)$.
- $T(T'C) = (TT')C$ par associativité du produit d'une part et $T(T'C) = TX$ d'autre part, $\forall C \in M_n(R)$.
- On en déduit que $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que $T'T = I_n$

Démonstration

1 $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3 $\Rightarrow$ 4 $\Rightarrow$ 5 $\Rightarrow$ 1 **(cf cours)**
Une étape (4 $\Rightarrow$ 5) Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\forall 1 \leq i \leq n$, $t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ le système $TX = C$ admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit $X = T'C$ où $T' \in M_n(R)$.
- $T(T'C) = (TT')C$ par associativité du produit d'une part et $T(T'C) = TX$ d'autre part, $\forall C \in M_n(R)$.
- On en déduit que $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que $T'T = I_n$

Démonstration

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$ **(cf cours)**
Une étape ($4 \Rightarrow 5$) Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\forall 1 \leq i \leq n, t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ le système $TX = C$ admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit $X = T'C$ où $T' \in M_n(R)$.
- $T(T'C) = (TT')C$ par associativité du produit d'une part et $T(T'C) = TX$ d'autre part, $\forall C \in M_n(R)$.
- On en déduit que $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que $T'T = I_n$

Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$ et soit $K_0 \in M_{n1}(R)$ Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution $X_0 \in M_{n1}(R)$
Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot de Gauss permet d'exprimer le vecteur X_0 en fonction du vecteur K_0 et ainsi permet de déterminer A^{-1}

Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$ et soit $K_0 \in M_{n1}(R)$ Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution $X_0 \in M_{n1}(R)$
Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot de Gauss permet d'exprimer le vecteur X_0 en fonction du vecteur K_0 et ainsi permet de déterminer A^{-1}

Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$ et soit $K_0 \in M_{n1}(R)$ Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution $X_0 \in M_{n1}(R)$
Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot de Gauss permet d'exprimer le vecteur X_0 en fonction du vecteur K_0 et ainsi permet de déterminer A^{-1}

Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$ et soit $K_0 \in M_{n1}(R)$ Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution $X_0 \in M_{n1}(R)$
Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot de Gauss permet d'exprimer le vecteur X_0 en fonction du vecteur K_0 et ainsi permet de déterminer A^{-1}

Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$ et soit $K_0 \in M_{n1}(R)$ Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution $X_0 \in M_{n1}(R)$
Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot de Gauss permet d'exprimer le vecteur X_0 en fonction du vecteur K_0 et ainsi permet de déterminer A^{-1}

Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$ et soit $K_0 \in M_{n1}(R)$ Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution $X_0 \in M_{n1}(R)$
Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot de Gauss permet d'exprimer le vecteur X_0 en fonction du vecteur K_0 et ainsi permet de déterminer A^{-1}

Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(R)$ et soit $K_0 \in M_{n1}(R)$ Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution $X_0 \in M_{n1}(R)$
Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot de Gauss permet d'exprimer le vecteur X_0 en fonction du vecteur K_0 et ainsi permet de déterminer A^{-1}

Exercices

- *Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que la matrice D est l'inverse de la matrice C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices

- *Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que la matrice D est l'inverse de la matrice C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices

- *Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que la matrice D est l'inverse de la matrice C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices

- *Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que la matrice D est l'inverse de la matrice C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices

- *Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que la matrice D est l'inverse de la matrice C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices

- *Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que la matrice D est l'inverse de la matrice C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices

- En utilisant la méthode du pivot de Gauss, retrouver que la matrice C est inversible et déterminer son inverse D
- Justifier par la même méthode que la matrice E n'est pas inversible

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercices

- En utilisant la méthode du pivot de Gauss, retrouver que la matrice C est inversible et déterminer son inverse D
- Justifier par la même méthode que la matrice E n'est pas inversible

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercices

- En utilisant la méthode du pivot de Gauss, retrouver que la matrice C est inversible et déterminer son inverse D
- Justifier par la même méthode que la matrice E n'est pas inversible

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercices

- En utilisant la méthode du pivot de Gauss, retrouver que la matrice C est inversible et déterminer son inverse D
- Justifier par la même méthode que la matrice E n'est pas inversible

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercices

- En utilisant la méthode du pivot de Gauss, retrouver que la matrice C est inversible et déterminer son inverse D
- Justifier par la même méthode que la matrice E n'est pas inversible

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Plan

Déterminant d'une matrice A de taille 2 ou 3

Soit $A \in M_n(R)$, Le déterminant de la matrice A est un réel associé à cette matrice noté $det(A)$. Le calcul de ce réel se fait de manière itérative selon la taille de la matrice.

cas n=2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Déterminant d'une matrice A de taille 2 ou 3

Soit $A \in M_n(R)$, Le déterminant de la matrice A est un réel associé à cette matrice noté $det(A)$. Le calcul de ce réel se fait de manière itérative selon la taille de la matrice.

cas n=2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Déterminant d'une matrice A de taille 2 ou 3

Soit $A \in M_n(R)$, Le déterminant de la matrice A est un réel associé à cette matrice noté $det(A)$. Le calcul de ce réel se fait de manière itérative selon la taille de la matrice.

cas n=2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Déterminant d'une matrice A de taille 2 ou 3

Soit $A \in M_n(R)$, Le déterminant de la matrice A est un réel associé à cette matrice noté $det(A)$. Le calcul de ce réel se fait de manière itérative selon la taille de la matrice.

cas n=2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

cas n=3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calcul selon la première ligne de A

$$det(A) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selon n'importe quelle ligne ou colonne de A.

Notation

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

cas n=3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calcul selon la première ligne de A

$$det(A) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selon n'importe quelle ligne ou colonne de A.

Notation

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

cas n=3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calcul selon la première ligne de A

$$det(A) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selon n'importe quelle ligne ou colonne de A.

Notation

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

cas n=3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calcul selon la première ligne de A

$$det(A) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selon n'importe quelle ligne ou colonne de A.

Notation

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

cas n=3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calcul selon la première ligne de A

$$det(A) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selon n'importe quelle ligne ou colonne de A.

Notation

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

cas n=3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calcul selon la première ligne de A

$$det(A) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selon n'importe quelle ligne ou colonne de A.

Notation

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Exemple n=2

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $det(A)$

Exemple n=3

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer det(A)

Exemple n=2

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $det(A)$

Exemple n=3

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer det(A)

Exemple n=2

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $det(A)$

Exemple n=3

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer det(A)

Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$

1. $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$
2. $det(A) = det({}^tA)$
3. Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.
4. On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.
5. Si on multiplie une colonne(resp. une ligne)de A par k, le déterminant devient $k.det(A)$
6. Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient $-det(A)$

Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$

1. $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$
2. $det(A) = det({}^tA)$
3. Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.
4. On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.
5. Si on multiplie une colonne(resp. une ligne)de A par k, le déterminant devient $k.det(A)$
6. Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient $-det(A)$

Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$

1. $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$
2. $det(A) = det({}^tA)$
3. Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.
4. On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.
5. Si on multiplie une colonne(resp. une ligne)de A par k, le déterminant devient $k.det(A)$
6. Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient $-det(A)$

Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$

1. $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$
2. $det(A) = det({}^tA)$
3. Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.
4. On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.
5. Si on multiplie une colonne(resp. une ligne)de A par k, le déterminant devient $k.det(A)$
6. Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient $-det(A)$

Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$

1. $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$
2. $det(A) = det({}^tA)$
3. Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.
4. On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.
5. Si on multiplie une colonne(resp. une ligne)de A par k, le déterminant devient $k.det(A)$
6. Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient $-det(A)$

Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$

1. $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$
2. $det(A) = det({}^tA)$
3. Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.
4. On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.
5. Si on multiplie une colonne(resp. une ligne)de A par k, le déterminant devient $k.det(A)$
6. Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient $-det(A)$

Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$

1. $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$
2. $det(A) = det({}^tA)$
3. Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.
4. On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.
5. Si on multiplie une colonne(resp. une ligne)de A par k, le déterminant devient $k.det(A)$
6. Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient $-det(A)$

Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$

1. $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$
2. $det(A) = det({}^tA)$
3. Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.
4. On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.
5. Si on multiplie une colonne(resp. une ligne)de A par k, le déterminant devient $k.det(A)$
6. Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient $-det(A)$

Plan

Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit $A \in M_n(R)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de A si :
$\exists v \in R^n /$

1. $v \neq O_{R^n}$
2. $Av = \lambda.v$

v est vecteur propre associé à la valeur propre λ

Exemple

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\lambda = 1$. Montrer que v est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit $A \in M_n(R)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de A si :
$\exists v \in R^n /$

1. $v \neq O_{R^n}$
2. $Av = \lambda.v$

v est vecteur propre associé à la valeur propre λ

Exemple

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\lambda = 1$. Montrer que v est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit $A \in M_n(R)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de A si :
$\exists v \in R^n /$

1. $v \neq O_{R^n}$
2. $Av = \lambda.v$

v est vecteur propre associé à la valeur propre λ

Exemple

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\lambda = 1$. Montrer que v est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit $A \in M_n(R)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de A si :
$\exists v \in R^n /$

1. $v \neq O_{R^n}$
2. $Av = \lambda.v$

v est vecteur propre associé à la valeur propre λ

Exemple

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\lambda = 1$. Montrer que v est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit $A \in M_n(R)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de A si :
$\exists v \in R^n /$

1. $v \neq O_{R^n}$
2. $Av = \lambda . v$

v est vecteur propre associé à la valeur propre λ

Exemple

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\lambda = 1$. Montrer que v est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit $A \in M_n(R)$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de A si :
$\exists v \in R^n /$

1. $v \neq O_{R^n}$
2. $Av = \lambda.v$

v est vecteur propre associé à la valeur propre λ

Exemple

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\lambda = 1$. Montrer que v est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté $P(\lambda)$ est défini par : $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Valeur propre simple, valeur propre multiple

1. Si λ est solution simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre simple de A.
2. Si λ est solution multiple (double, triple, etc) de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine multiple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre multiple de A

Avec l'exemple précédent

$\lambda = 1$ et $\lambda = 3$ sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que 2 est valeur propre triple.

Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté $P(\lambda)$ est défini par : $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Valeur propre simple, valeur propre multiple

1. Si λ est solution simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre simple de A.
2. Si λ est solution multiple (double, triple, etc) de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine multiple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre multiple de A

Avec l'exemple précédent

$\lambda = 1$ et $\lambda = 3$ sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que 2 est valeur propre triple.

Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté $P(\lambda)$ est défini par : $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Valeur propre simple, valeur propre multiple

1. Si λ est solution simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre simple de A.
2. Si λ est solution multiple (double, triple, etc) de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine multiple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre multiple de A

Avec l'exemple précédent

$\lambda = 1$ et $\lambda = 3$ sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que 2 est valeur propre triple.

Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté $P(\lambda)$ est défini par : $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Valeur propre simple, valeur propre multiple

1. Si λ est solution simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre simple de A.
2. Si λ est solution multiple (double, triple, etc) de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine multiple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre multiple de A

Avec l'exemple précédent

$\lambda = 1$ et $\lambda = 3$ sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que 2 est valeur propre triple.

Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté $P(\lambda)$ est défini par : $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Valeur propre simple, valeur propre multiple

1. Si λ est solution simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre simple de A.
2. Si λ est solution multiple (double, triple, etc) de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine multiple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre multiple de A

Avec l'exemple précédent

$\lambda = 1$ et $\lambda = 3$ sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que 2 est valeur propre triple.

Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté $P(\lambda)$ est défini par : $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Valeur propre simple, valeur propre multiple

1. Si λ est solution simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre simple de A.
2. Si λ est solution multiple (double, triple, etc) de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine multiple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre multiple de A

Avec l'exemple précédent

$\lambda = 1$ et $\lambda = 3$ sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que 2 est valeur propre triple.

Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté $P(\lambda)$ est défini par : $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Valeur propre simple, valeur propre multiple

1. Si λ est solution simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre simple de A.
2. Si λ est solution multiple (double, triple, etc) de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine multiple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre multiple de A

Avec l'exemple précédent

$\lambda = 1$ et $\lambda = 3$ sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que 2 est valeur propre triple.

Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté $P(\lambda)$ est défini par : $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Valeur propre simple, valeur propre multiple

1. Si λ est solution simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre simple de A.
2. Si λ est solution multiple (double, triple, etc) de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine multiple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre multiple de A

Avec l'exemple précédent

$\lambda = 1$ et $\lambda = 3$ sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que 2 est valeur propre triple.

Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté $P(\lambda)$ est défini par : $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$.

Valeur propre simple, valeur propre multiple

1. Si λ est solution simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine simple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre simple de A.
2. Si λ est solution multiple (double, triple, etc) de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = 0$ on dit que λ est racine multiple de $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ ou valeur propre multiple de A

Avec l'exemple précédent

$\lambda = 1$ et $\lambda = 3$ sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que 2 est valeur propre triple.

Plan

Théorème

Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit $A \in M_n(R)$, $B \in R^n$, $X \in R^n$ et soit le système $AX = B$
Nous avons les équivalences suivantes.

1. $det(A) \neq 0$
2. *A est inversible.*
3. *Le système AX=B admet une unique solution.*

De plus

1. *Si $det(A) \neq 0$ le vecteur solution X est donné par $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$ où $det_i(A)$ est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.*
2. *Si $det(A) = 0$ Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.*

Théorème

Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit $A \in M_n(R)$, $B \in R^n$, $X \in R^n$ et soit le système $AX = B$
Nous avons les équivalences suivantes.

1. $det(A) \neq 0$
2. *A est inversible.*
3. *Le système AX=B admet une unique solution.*

De plus

1. *Si $det(A) \neq 0$ le vecteur solution X est donné par $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$ où $det_i(A)$ est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.*
2. *Si $det(A) = 0$ Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.*

Théorème

Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit $A \in M_n(R)$, $B \in R^n$, $X \in R^n$ et soit le système $AX = B$
Nous avons les équivalences suivantes.

1. $det(A) \neq 0$
2. *A est inversible.*
3. *Le système AX=B admet une unique solution.*

De plus

1. *Si $det(A) \neq 0$ le vecteur solution X est donné par $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$ où $det_i(A)$ est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.*
2. *Si $det(A) = 0$ Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.*

Théorème

Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit $A \in M_n(R)$, $B \in R^n$, $X \in R^n$ et soit le système $AX = B$
Nous avons les équivalences suivantes.

1. $det(A) \neq 0$
2. *A est inversible.*
3. *Le système AX=B admet une unique solution.*

De plus

1. *Si $det(A) \neq 0$ le vecteur solution X est donné par $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$ où $det_i(A)$ est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.*
2. *Si $det(A) = 0$ Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.*

Théorème

Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit $A \in M_n(R)$, $B \in R^n$, $X \in R^n$ et soit le système $AX = B$
Nous avons les équivalences suivantes.

1. $det(A) \neq 0$
2. *A est inversible.*
3. *Le système AX=B admet une unique solution.*

De plus

1. *Si $det(A) \neq 0$ le vecteur solution X est donné par $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$ où $det_i(A)$ est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.*
2. *Si $det(A) = 0$ Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.*

Théorème

Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit $A \in M_n(R)$, $B \in R^n$, $X \in R^n$ et soit le système $AX = B$
Nous avons les équivalences suivantes.

1. $det(A) \neq 0$
2. *A est inversible.*
3. *Le système AX=B admet une unique solution.*

De plus

1. *Si $det(A) \neq 0$ le vecteur solution X est donné par $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$ où $det_i(A)$ est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.*
2. *Si $det(A) = 0$ Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.*

Théorème

Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit $A \in M_n(R)$, $B \in R^n$, $X \in R^n$ *et soit le système* $AX = B$
Nous avons les équivalences suivantes.

1. $det(A) \neq 0$
2. *A est inversible.*
3. *Le système AX=B admet une unique solution.*

De plus

1. *Si* $det(A) \neq 0$ *le vecteur solution X est donné par* $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$ *où* $det_i(A)$ *est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.*
2. *Si* $det(A) = 0$ *Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.*

Théorème

Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit $A \in M_n(R)$, $B \in R^n$, $X \in R^n$ et soit le système $AX = B$
Nous avons les équivalences suivantes.

1. $det(A) \neq 0$
2. *A est inversible.*
3. *Le système AX=B admet une unique solution.*

De plus

1. *Si $det(A) \neq 0$ le vecteur solution X est donné par $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$ où $det_i(A)$ est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.*
2. *Si $det(A) = 0$ Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.*

Théorème

Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit $A \in M_n(R)$, $B \in R^n$, $X \in R^n$ *et soit le système* $AX = B$
Nous avons les équivalences suivantes.

1. $det(A) \neq 0$
2. *A est inversible.*
3. *Le système AX=B admet une unique solution.*

De plus

1. *Si* $det(A) \neq 0$ *le vecteur solution X est donné par* $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$ *où* $det_i(A)$ *est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.*
2. *Si* $det(A) = 0$ *Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.*

Comparaison entre Cramer et pivot de Gauss

La méthode de Cramer a l'air beaucoup plus facile à utiliser que la méthode du pivot de Gauss et pourtant!!

- Le nombre d'opérations pour Cramer ou complexité est de type $(n+1)!$
- La complexité pour le pivot de Gauss est de type n^3, donc beaucoup plus intéressante.

Utilisation de la règle de Cramer

Résoudre par la méthode de Cramer

$$\left(\begin{array}{ccc} 2x-3y & = & 7 \\ 3x+5y & = & 1 \end{array}\right.$$

Comparaison entre Cramer et pivot de Gauss

La méthode de Cramer a l'air beaucoup plus facile à utiliser que la méthode du pivot de Gauss et pourtant!!

- Le nombre d'opérations pour Cramer ou complexité est de type $(n+1)!$
- La complexité pour le pivot de Gauss est de type n^3, donc beaucoup plus intéressante.

Utilisation de la règle de Cramer

Résoudre par la méthode de Cramer

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y & = & 7 \\ 3x+5y & = & 1 \end{array}\right.$$

Comparaison entre Cramer et pivot de Gauss

La méthode de Cramer a l'air beaucoup plus facile à utiliser que la méthode du pivot de Gauss et pourtant!!

- Le nombre d'opérations pour Cramer ou complexité est de type $(n+1)!$
- La complexité pour le pivot de Gauss est de type n^3, donc beaucoup plus intéressante.

Utilisation de la règle de Cramer

Résoudre par la méthode de Cramer

$$\left(\begin{array}{lcl} 2x - 3y & = & 7 \\ 3x + 5y & = & 1 \end{array} \right.$$

Application du déterminant : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(R)$ inversible ie $det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{C^t}{det(A)}$$

C est la matrice des cofacteurs de A.

C la matrice des cofacteurs de A est définie par : $C = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

M_{ij} est la matrice obtenue en barrant la ième ligne et la jème colonne de A.

Calcul d'inverse

Montrer que cette matrice est inversible et déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Application du déterminant : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(R)$ inversible ie $det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{C^t}{det(A)}$$

C est la matrice des cofacteurs de A.

C la matrice des cofacteurs de A est définie par : $C = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

M_{ij} est la matrice obtenue en barrant la ième ligne et la jème colonne de A.

Calcul d'inverse

Montrer que cette matrice est inversible et déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Application du déterminant : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(R)$ inversible ie $det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{C^t}{det(A)}$$

C est la matrice des cofacteurs de A.

C la matrice des cofacteurs de A est définie par : $C = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

M_{ij} est la matrice obtenue en barrant la ième ligne et la jème colonne de A.

Calcul d'inverse

Montrer que cette matrice est inversible et déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Application du déterminant : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(R)$ inversible ie $det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{C^t}{det(A)}$$

C est la matrice des cofacteurs de A.

C la matrice des cofacteurs de A est définie par : $C = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

M_{ij} est la matrice obtenue en barrant la ième ligne et la jème colonne de A.

Calcul d'inverse

Montrer que cette matrice est inversible et déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Application du déterminant : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(R)$ inversible ie $det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{C^t}{det(A)}$$

C est la matrice des cofacteurs de A.

C la matrice des cofacteurs de A est définie par : $C = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$$

M_{ij} est la matrice obtenue en barrant la ième ligne et la jème colonne de A.

Calcul d'inverse

Montrer que cette matrice est inversible et déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit $A \in M_n(R)$, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Avec l'exemple précédent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$

Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit $A \in M_n(R)$, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Avec l'exemple précédent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$

Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit $A \in M_n(R)$, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Avec l'exemple précédent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$

Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit $A \in M_n(R)$, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Avec l'exemple précédent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$

Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit $A \in M_n(R)$, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Avec l'exemple précédent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$

Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit $A \in M_n(R)$, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Avec l'exemple précédent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

On en déduit que les valeurs propres de A sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 3$

Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre λ de A

Soit $A \in M_n(R)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche $X \in R^n$, $X \neq O$ tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Avec l'exemple précédent

1. $\lambda = 1$ le système devient :

$$(S)\begin{cases} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

   On en déduit que les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ vérifient $x_1 + x_2 = 0$. On choisira par exemple $X_1 = \binom{1}{-1}$

2. travail personnel :
   Chercher les vecteurs propres associés à $\lambda = 3$ et nommer un représentant simple.

Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre λ de A

Soit $A \in M_n(R)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche $X \in R^n$, $X \neq O$ tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Avec l'exemple précédent

1. $\lambda = 1$ le système devient :

$$(S)\begin{cases} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ vérifient $x_1 + x_2 = 0$. On choisira par exemple $X_1 = \binom{1}{-1}$

2. travail personnel :
Chercher les vecteurs propres associés à $\lambda = 3$ et nommer un représentant simple.

Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre λ de A

Soit $A \in M_n(R)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche $X \in R^n$, $X \neq O$ tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Avec l'exemple précédent

1. $\lambda = 1$ le système devient :

$$(S)\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

   On en déduit que les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ vérifient $x_1 + x_2 = 0$. On choisira par exemple $X_1 = \binom{1}{-1}$

2. travail personnel :
   Chercher les vecteurs propres associés à $\lambda = 3$ et nommer un représentant simple.

Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre λ de A

Soit $A \in M_n(R)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche $X \in R^n$, $X \neq O$ tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Avec l'exemple précédent

1. $\lambda = 1$ le système devient :

$$(S) \begin{cases} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ vérifient $x_1 + x_2 = 0$. On choisira par exemple $X_1 = \binom{1}{-1}$

2. travail personnel :
Chercher les vecteurs propres associés à $\lambda = 3$ et nommer un représentant simple.

Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre λ de A

Soit $A \in M_n(R)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche $X \in R^n$, $X \neq O$ tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Avec l'exemple précédent

1. $\lambda = 1$ le système devient :
$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$
On en déduit que les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ vérifient $x_1 + x_2 = 0$. On choisira par exemple $X_1 = \binom{1}{-1}$
2. travail personnel :
Chercher les vecteurs propres associés à $\lambda = 3$ et nommer un représentant simple.

Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre λ de A

Soit $A \in M_n(R)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche $X \in R^n$, $X \neq O$ tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Avec l'exemple précédent

1. $\lambda = 1$ le système devient :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

   On en déduit que les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ vérifient $x_1 + x_2 = 0$. On choisira par exemple $X_1 = \binom{1}{-1}$

2. travail personnel :
   Chercher les vecteurs propres associés à $\lambda = 3$ et nommer un représentant simple.

Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre λ de A

Soit $A \in M_n(R)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche $X \in R^n$, $X \neq O$ tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Avec l'exemple précédent

1. $\lambda = 1$ le système devient :
$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$
On en déduit que les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ vérifient $x_1 + x_2 = 0$. On choisira par exemple $X_1 = \binom{1}{-1}$
2. travail personnel :
Chercher les vecteurs propres associés à $\lambda = 3$ et nommer un représentant simple.

Plan

Matrices semblables : Définition

Soient $A \in M_n(R)$, $A' \in M_n(R)$ A et A' sont semblables s'il existe une matrice $P \in M_n(R)$ inversible telle que :

$$A' = P^{-1}AP$$

Matrices semblables : Définition

Soient $A \in M_n(R)$, $A' \in M_n(R)$ A et A' sont semblables s'il existe une matrice $P \in M_n(R)$ inversible telle que :

$$A' = P^{-1}AP$$

Diagonalisation

$det(A - \lambda I_n)$ se factorise dans $\mathbb{R}$ en n facteurs distincts du premier degré ou A admet n valeurs propres distinctes alors A est semblable à une matrice diagonale D. On dit alors que A est diagonalisable. $D = P^{-1}AP$
D est diagonale et ses valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

Trigonalisation ou diagonalisation

$det(A - \lambda I_n)$ se factorise dans $\mathbb{R}$ en n facteurs non nécessairement distincts du premier degré alors A peut se triangulariser (A est semblable à une matrice triangulaire ou A est trigonalisable) ou se diagonaliser (semblable à une matrice diagonale). $T = P^{-1}AP$
Les valeurs de T sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

Pas de réduction possible dans $\mathbb{R}$

$det(A - \lambda I_n)$ ne se factorise pas complètement dans $\mathbb{R}$, dans ce cas là A ne peut pas se réduire de cette manière (semblable ni à l'une ni à l'autre)

Diagonalisation

$det(A - \lambda I_n)$ se factorise dans $\mathbb{R}$ en n facteurs distincts du premier degré ou A admet n valeurs propres distinctes alors A est semblable à une matrice diagonale D. On dit alors que A est diagonalisable. $D = P^{-1}AP$
D est diagonale et ses valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

Trigonalisation ou diagonalisation

$det(A - \lambda I_n)$ se factorise dans $\mathbb{R}$ en n facteurs non nécessairement distincts du premier degré alors A peut se triangulariser (A est semblable à une matrice triangulaire ou A est trigonalisable) ou se diagonaliser (semblable à une matrice diagonale). $T = P^{-1}AP$
Les valeurs de T sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

Pas de réduction possible dans $\mathbb{R}$

$det(A - \lambda I_n)$ ne se factorise pas complétement dans $\mathbb{R}$, dans ce cas là A ne peut pas se réduire de cette manière (semblable ni à l'une ni à l'autre)

Diagonalisation

$det(A - \lambda I_n)$ se factorise dans $\mathbb{R}$ en n facteurs distincts du premier degré ou A admet n valeurs propres distinctes alors A est semblable à une matrice diagonale D. On dit alors que A est diagonalisable. $D = P^{-1}AP$
D est diagonale et ses valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

Trigonalisation ou diagonalisation

$det(A - \lambda I_n)$ se factorise dans $\mathbb{R}$ en n facteurs non nécessairement distincts du premier degré alors A peut se triangulariser (A est semblable à une matrice triangulaire ou A est trigonalisable) ou se diagonaliser (semblable à une matrice diagonale). $T = P^{-1}AP$
Les valeurs de T sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

Pas de réduction possible dans $\mathbb{R}$

$det(A - \lambda I_n)$ ne se factorise pas complètement dans $\mathbb{R}$, dans ce cas là A ne peut pas se réduire de cette manière (semblable ni à l'une ni à l'autre)

Diagonalisation

$det(A - \lambda I_n)$ se factorise dans $\mathbb{R}$ en n facteurs distincts du premier degré ou A admet n valeurs propres distinctes alors A est semblable à une matrice diagonale D. On dit alors que A est diagonalisable. $D = P^{-1}AP$
D est diagonale et ses valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

Trigonalisation ou diagonalisation

$det(A - \lambda I_n)$ se factorise dans $\mathbb{R}$ en n facteurs non nécessairement distincts du premier degré alors A peut se triangulariser (A est semblable à une matrice triangulaire ou A est trigonalisable) ou se diagonaliser (semblable à une matrice diagonale). $T = P^{-1}AP$
Les valeurs de T sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

Pas de réduction possible dans $\mathbb{R}$

$det(A - \lambda I_n)$ ne se factorise pas complétement dans $\mathbb{R}$, dans ce cas là A ne peut pas se réduire de cette manière (semblable ni à l'une ni à l'autre)

Diagonalisation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A
2. En déduire les vecteurs propres de A
3. Trouver alors D diagonale semblable à A.

Diagonalisation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A
2. En déduire les vecteurs propres de A
3. Trouver alors D diagonale semblable à A.

Diagonalisation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A
2. En déduire les vecteurs propres de A
3. Trouver alors D diagonale semblable à A.

Diagonalisation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A
2. En déduire les vecteurs propres de A
3. Trouver alors D diagonale semblable à A.