Déterminant-Valeurs propres et vecteurs propres-Application du déterminant
TD3

Chapitre 3 Matrices carrées dans Moodle cours M1202 Algèbre

1 Déterminant

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Présentation du déterminant de **Van der Monde** d'ordre n.

$$D = det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} x_i \in \mathbb{R}, i = 1 \cdots n$$

Calculer le déterminant de Van der Monde d'ordre 3.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} x, y, z \in \mathbb{R}$$

3. Présentation du déterminant **circulant** d'ordre n.

$$C_n = det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} a_i \in \mathbb{R}, i = 1 \cdots n$$

Calculer le déterminant circulant d'ordre 4 suivant.

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Montrer que v_1 et v_2 sont des vecteurs propres de A et déterminer leur valeur propre associée.

Exercice 2.2.

$$B = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que 1 et 2 sont valeurs propres de B. Déterminer leurs vecteurs propres associés.

pas de réduction

Exercice 2.3.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer le polynôme caractéristique de C, cette matrice admet-elle des valeurs propres?

3 Application du déterminant

3.1 Résolution de système avec la règle de Cramer

Exercice 3.1. *Résoudre par la méthode de Cramer*

1.

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 7 \\ 3x + 5y &= 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + y - 2z = 1 \\ x + 4y + z = 1 \end{cases}$$

3.

$$\left\{\begin{array}{l}2x+4y+4z=22\\ x+3y=7\\ \frac{3}{2}x+z=\frac{9}{2}\end{array}\right.$$

Exercice 3.2. *Soit le système suivant*

$$\left\{\begin{array}{l}2x-y+3z+2t=4\\ 3x+3y+3z+2t=6\\ 3x-y-z+2t=6\\ 3x-y+3z-t=6\end{array}\right.$$

Comparer le nombre d'opérations nécéssaires dans la méthode du pivot de Gauss et dans celle de Cramer pour ce système. Que peut-on dire de manière générale? Il n'est pas demandé de le résoudre.

3.2 Valeurs propres, vecteurs propres, Inversion et réduction de matrices

Exercice 3.3. *Reprenons la matrice*

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

1. *Soit P la matrice des vecteurs propres écrits en colonne, déterminer P^{-1}*
2. *Montrer alors que A est semblable à une matrice diagonale. A est diagonalisable.*

Exercice 3.4. *Soit la matrice B:*

$$B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de B noté $p(x)$ et en déduire une valeur propre triple de B.*
2. *Déterminer les vecteurs propres associés à cette valeur propre.*
3. *Soit la matrice*
$$P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
Montrer à l'aide de P que B est semblable à une matrice triangulaire. B est triangularisable.

Exercice 3.5. *Soit les matrices C et D définies par :*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Ces matrices sont-elles inversibles?*

2. *Si oui déterminer leur inverse.*

Exercice 3.6. *Soit la matrice M définie par :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de M noté $p(x)$.*

2. *En déduire les valeurs propres de M puis ses vecteurs propres.((1,1,1) associé à 1, (4,3,-2) associé à 2 et (2,-3,2) associé à -4)*

3. *Soit P la matrice des vecteurs propres de M, vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.*

4. *Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$, que constatez-vous?*

5. *Calculer D^n et en déduire M^n.*