# **ALGEBRE LINEAIRE M1202**

BC



Ce support de cours n'est pas fait pour être imprimé mais pour être consulté.D'autre part, il ne contient que des définitions, une partie essentielle de ce cours est développée au tableau sous forme d'exercices et de démonstrations.

Trace et inverse de matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Plan



## Matrices carrées à coefficients réels

- Trace et inverse de matrice carrée
- Déterminant d'une matrice carrée réelle A
- Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
- Application du déterminant
- lacksquare Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\mathbb R$

#### Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Plan

- 1
- Matrices carrées à coefficients réels
- Trace et inverse de matrice carrée
- Déterminant d'une matrice carrée réelle A
- Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
- Application du déterminant
- lacksquare Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\mathbb R$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté tr(A) égal à la somme des éléments diagonaux de A

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

$$\forall \lambda \in R, \forall A, B \in M_n(R)$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté tr(A) égal à la somme des éléments diagonaux de A.

- $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$
- tr(AB) = tr(BA)  $\forall \lambda \in B, \forall A, B \in M_n(B)$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté tr(A) égal à la somme des éléments diagonaux de A.

• 
$$tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

$$\forall \lambda \in R, \forall A, B \in M_p(R)$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\mathbb{R}$ 

#### Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté tr(A) égal à la somme des éléments diagonaux de A.

•  $tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$ 

$$tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

$$\forall \lambda \in B, \forall A, B \in M_p(B)$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté tr(A) égal à la somme des éléments diagonaux de A.

$$tr(AB) = tr(BA)$$

$$\forall A \in B, \forall A \in M (B)$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\mathbb{R}$ 

#### Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est le réel noté tr(A) égal à la somme des éléments diagonaux de A.

$$tr(AB) = tr(BA)$$
  
$$\forall \lambda \in R, \forall A, B \in M_n(R)$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\mathbb R$ 

#### Matrice inverse

- Soit  $A \in M_n(R)$  A est inversible si  $\exists B \in M_n(R)$  telle que  $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté  $A^{-1}$

- L'inverse de A,  $A^{-1}$  est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $(t_A)^{-1} = t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que  $AB = I_0$  (ou  $BA = I_0$ )

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Matrice inverse

- Soit  $A \in M_n(R)$  A est inversible si  $\exists B \in M_n(R)$  telle que  $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté  $A^{-1}$

- L'inverse de A, A<sup>-1</sup> est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $(t_A)^{-1} = t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que  $AB = I_n$  (ou  $BA = I_n$ )

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Matrice inverse

- Soit  $A \in M_n(R)$  A est inversible si  $\exists B \in M_n(R)$  telle que  $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A<sup>-1</sup>

- L'inverse de A, A<sup>-1</sup> est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $(t_A)^{-1} = t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que  $AB = I_n$  (ou  $BA = I_n$ )

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Matrice inverse

- Soit  $A \in M_n(R)$  A est inversible si  $\exists B \in M_n(R)$  telle que  $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A<sup>-1</sup>

- $\bullet$  L'inverse de A,  $A^{-1}$  est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $(t_A)^{-1} = t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que  $AB = I_n$  (ou  $BA = I_n$ )

## Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Matrice inverse

- Soit  $A \in M_n(R)$  A est inversible si  $\exists B \in M_n(R)$  telle que  $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A<sup>-1</sup>

- L'inverse de A. A<sup>-1</sup> est définie de manière unique.
- $A \times X \times C = M_p(R) (XY)^{-1} Y^{-1}X^{-1}$
- $(t_{\Delta})-1$  \_t  $(\Delta-1)$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que  $AB = I_a$  (ou  $BA = I_b$ )

## Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Matrice inverse

- Soit  $A \in M_n(R)$  A est inversible si  $\exists B \in M_n(R)$  telle que  $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A<sup>-1</sup>

- $\bullet$  L'inverse de A,  $A^{-1}$  est définie de manière unique.
- $\bigvee X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $(t_A)-1 = t_{(A}-1)$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que  $AB = I_a$  (ou  $BA = I_b$ )

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Matrice inverse

- Soit  $A \in M_n(R)$  A est inversible si  $\exists B \in M_n(R)$  telle que  $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A<sup>-1</sup>

- L'inverse de A, A<sup>-1</sup> est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $(t_A)-1 = t_{(A}-1)$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que  $AB = I_a$  (ou  $BA = I_b$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Matrice inverse

- Soit  $A \in M_n(R)$  A est inversible si  $\exists B \in M_n(R)$  telle que  $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A<sup>-1</sup>

- L'inverse de A, A<sup>-1</sup> est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $(^tA)^{-1} = ^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que  $AB = I_{B}$  (ou  $BA = I_{B}$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Matrice inverse

- Soit  $A \in M_n(R)$  A est inversible si  $\exists B \in M_n(R)$  telle que  $AB = BA = I_n$
- Dans ce cas là B est l'inverse de A et est noté A<sup>-1</sup>

- L'inverse de A, A<sup>-1</sup> est définie de manière unique.
- $\forall X, Y \in M_n(R), (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$
- $(^tA)^{-1} = ^t(A^{-1})$
- Pratiquement, il suffit de trouver B telle que  $AB = I_0$  (ou  $BA = I_0$ )

#### Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Théorèm

#### Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $T \in M_n(R)$ ,  $F \in M_n(R)$ ,  $K \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^n$  et soit le système AX = K

T est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss

C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système AX = K par la même méthod

A est inversible

Le système AX=K admet une unique solution.

Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution

Les coefficients diagonaux de T sont tous différents de 0, soit :  $\forall 1 < i < n.t_{ii} \neq 0$ 

La matrice trianqulaire T obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss est inversible

## Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

## Théorème

#### Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $T \in M_n(R)$ ,  $F \in M_n(R)$ ,  $K \in R^n$ ,  $C \in R^n$  et soit le système AX = KT est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss. C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système AX = K par la même méthode. Les propriétés suivantes sont équivalentes.



#### Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Théorème

#### Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $T \in M_n(R)$ ,  $F \in M_n(R)$ ,  $K \in R^n$ ,  $C \in R^n$  et soit le système AX = K. T est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss. C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système AX = K par la même méthode. Les propriétés suivantes sont équivalentes.



A est inversible.



#### Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

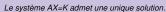
#### Théorème

#### Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $T \in M_n(R)$ ,  $F \in M_n(R)$ ,  $K \in R^n$ ,  $C \in R^n$  et soit le système AX = KT est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss. C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système AX = K par la même méthode. Les propriétés suivantes sont équivalentes.



A est inversible.



4□ > 4回 > 4 = > 4 = > = 900

#### Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Théorème

## Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $T \in M_n(R)$ ,  $F \in M_n(R)$ ,  $K \in R^n$ ,  $C \in R^n$  et soit le système AX = KT est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss. C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système AX = K par la même méthode. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- A est inversible.
  - Le système AX=K admet une unique solution.
    - Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution.
    - La matrice triangulaire Τ obtenue en trigonalisant Δ nar la méthode du nivot de Gauss est inv

#### Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Théorème

#### Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $T \in M_n(R)$ ,  $F \in M_n(R)$ ,  $K \in R^n$ ,  $C \in R^n$  et soit le système AX = KT est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss.

C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système AX = K par la même méthode. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

A est inversible

Le système AX=K admet une unique solution.

Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution.

Les coefficients diagonaux de T sont tous différents de 0, soit :  $\forall 1 < i < n.t_{ii} \neq 0$ 

#### Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Théorème

#### Matrice inversible et pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $T \in M_n(R)$ ,  $F \in M_n(R)$ ,  $K \in R^n$ ,  $C \in R^n$  et soit le système AX = KT est la matrice obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss.

C est le vecteur second membre obtenu en trigonalisant le système AX = K par la même méthode. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

A est inversible.

Le système AX=K admet une unique solution.

3 Le système TX=C avec C=FK, admet une unique solution.

Les coefficients diagonaux de T sont tous différents de 0, soit :  $\forall 1 < i < n, t_{ii} \neq 0$ 

La matrice triangulaire T obtenue en trigonalisant A par la méthode du pivot de Gauss est inversible.

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Démonstration

$$A = \left( \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{array} \right)$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- ∀1 ≤ i ≤ n, t<sub>ii</sub> ≠ 0 ⇒ le système TX = C admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit X = T'C où  $T' \in M_n(R)$
- lacksquare T(T'C)=(TT')C par associativité du produit d'une part et T(T'C)=TX d'autre part,  $orall C\in M_n(R)$ .
- On en déduit que  $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que  $T'T = I_n$

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\ensuremath{\mathbb{R}}$ 

# Démonstration

$$A = \left( \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{array} \right)$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{2n} \end{pmatrix}$$

- ∀1 ≤ i ≤ n, t<sub>ii</sub> ≠ 0 ⇒ le système TX = C admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit X = T'C où  $T' \in M_n(R)$
- T(T'C) = (TT')C par associativité du produit d'une part et T(T'C) = TX d'autre part,  $\forall C \in M_n(R)$
- On en déduit que  $TT' = I_n$
- De la même facon, on peut démontrer que  $T'T = I_n$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\ensuremath{\mathbb{R}}$ 

# Démonstration

$$A = \left( \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{array} \right)$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$  le système TX = C admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit X = T'C où  $T' \in M_n(R)$
- T(T'C) = (TT')C par associativité du produit d'une part et T(T'C) = TX d'autre part,  $\forall C \in M_n(R)$
- On en déduit que  $TT' = I_n$
- De la même facon, on peut démontrer que  $T'T = I_n$

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\ensuremath{\mathbb{R}}$ 

# Démonstration

$$A = \left( \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{array} \right)$$

$$T = \left( \begin{array}{ccccc} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{array} \right)$$

- $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$  le système TX = C admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit X = T'C où  $T' \in M_n(R)$
- T(T'C) = T(T')C par associativité du produit d'une part et T(T'C) = TX d'autre part,  $\forall C \in M_n(R)$ 
  - On en déduit que  $TT' = I_T$
- De la même façon, on peut démontrer que  $T'T = I_n$

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\ensuremath{\mathbb{R}}$ 

## Démonstration

$$A = \left( \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{array} \right)$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- ∀1 ≤ i ≤ n, t<sub>ii</sub> ≠ 0 ⇒ le système TX = C admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit X = T'C où  $T' \in M_n(R)$
- T(T'C) = (TT')C par associativité du produit d'une part et T(T'C) = TX d'autre part,  $\forall C \in M_n(R)$
- On en déduit que TT' =
- De la même facon, on peut démontrer que  $T'T = I_{ij}$

#### Démonstration

$$A = \left( \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{array} \right)$$

$$T = \left( \begin{array}{ccccc} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{array} \right)$$

- ∀1 ≤ i ≤ n, t<sub>ii</sub> ≠ 0 ⇒ le système TX = C admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit X = T'C où  $T' \in M_n(R)$ .
- T(T'C) = (TT')C par associativité du produit d'une part et T(T'C) = TX d'autre part,  $\forall C \in M_n(R)$
- On en déduit que  $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que  $T'T = I_0$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

## Démonstration

$$A = \left( \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{array} \right)$$

$$T = \left(\begin{array}{ccccc} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{array}\right)$$

- ∀1 ≤ i ≤ n, t<sub>ii</sub> ≠ 0 ⇒ le système TX = C admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit X = T'C où  $T' \in M_n(R)$ .
- T(T'C) = (TT')C par associativité du produit d'une part et T(T'C) = TX d'autre part,  $\forall C \in M_n(R)$ .
- On en déduit que  $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que  $T'T = I_n$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

## Démonstration

$$A = \left( \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{array} \right)$$

$$T = \left(\begin{array}{ccccc} t_{11} & t_{12} & & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{array}\right)$$

- ∀1 ≤ i ≤ n, t<sub>ii</sub> ≠ 0 ⇒ le système TX = C admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit X = T'C où  $T' \in M_n(R)$ .
- T(T'C) = (TT')C par associativité du produit d'une part et T(T'C) = TX d'autre part,  $\forall C \in M_n(R)$ .
- On en déduit que  $TT' = I_n$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

## Démonstration

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & & \\$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- ∀1 ≤ i ≤ n, t<sub>ii</sub> ≠ 0 ⇒ le système TX = C admet une unique solution, soit X cette solution (cf pivot de Gauss).
- Cette solution X s'exprime alors en fonction de C soit X = T'C où  $T' \in M_n(R)$ .
- T(T'C) = (TT')C par associativité du produit d'une part et T(T'C) = TX d'autre part,  $\forall C \in M_n(R)$ .
- On en déduit que  $TT' = I_n$
- De la même façon, on peut démontrer que  $T'T = I_n$

#### Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$  et soit  $K_0 \in M_{n1}(R)$  Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution  $X_0 \in M_{n1}(R)$ Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

S

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot de Gauss permet d'exprimer le vecteur  $X_0$  en fonction du vecteur  $K_0$  et ainsi permet de déterminer  $A^{-1}$ 

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$  et soit  $K_0 \in M_{n1}(R)$  Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution  $X_0 \in M_{n1}(R)$ 

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

# Soit $A \in M_n(R)$ et soit $K_0 \in M_{n1}(R)$ Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution  $X_0 \in M_{n1}(R)$ Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\mathbb R$ 

#### Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$  et soit  $K_0 \in M_{n1}(R)$  Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution  $X_0 \in M_{ad}(R)$ 

Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$  et soit  $K_0 \in M_{n1}(R)$  Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution  $X_0 \in M_{n1}(R)$  Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

S

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0n} \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$  et soit  $K_0 \in M_{n1}(R)$  Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution  $X_0 \in M_{n1}(R)$  Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0} \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Recherche pratique de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la méthode du pivot de Gauss

Soit  $A \in M_n(R)$  et soit  $K_0 \in M_{n1}(R)$  Posons le problème :

$$AX = K_0, X \in M_{n1}(R)$$

Si A est inversible ce problème admet une unique solution  $X_0 \in M_{n1}(R)$ Nous pouvons écrire l'équivalence suivante :

$$AX_0 = K_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1}K_0$$

Si

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{01} \\ k_{02} \\ \vdots \\ k_{0-1} \end{pmatrix}$$

# Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Exercice

Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$C = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$D = \left( \begin{array}{rrr} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Exercices

Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$C = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Exercices

Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$C = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Exercices

Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$C = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\mathbb R$ 

#### Exercices

Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$C = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Exercices

Travail personnel : soient les matrices A et B suivantes, calculer AB et BA et vérifier que tr(AB)=tr(BA)

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$C = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$D = \left( \begin{array}{rrr} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

- En utilisant la méthode du pivot de Gauss, retrouver que la matrice C est inversible et déterminer son inverse D
- Justifier par la même méthode que la matrice E n'est pas inversible

$$E = \left( \begin{array}{rrr} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

# Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

- En utilisant la méthode du pivot de Gauss, retrouver que la matrice C est inversible et déterminer sor inverse D
- Justifier par la même méthode que la matrice E n'est pas inversible

$$E = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

- En utilisant la méthode du pivot de Gauss, retrouver que la matrice C est inversible et déterminer son inverse D
- Justifier par la même méthode que la matrice E n'est pas inversible

$$E = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

# Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

- En utilisant la méthode du pivot de Gauss, retrouver que la matrice C est inversible et déterminer son inverse D
- Justifier par la même méthode que la matrice E n'est pas inversible

$$E = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

- En utilisant la méthode du pivot de Gauss, retrouver que la matrice C est inversible et déterminer son inverse D
- Justifier par la même méthode que la matrice E n'est pas inversible

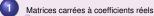
$$E = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

# Plan



Trace et inverse de matrice carrée

- Déterminant d'une matrice carrée réelle A
- Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
- Application du déterminant
- Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

#### Déterminant d'une matrice A de taille 2 ou 3

Soit  $A \in M_n(R)$ , Le déterminant de la matrice A est un réel associé à cette matrice noté det(A). Le calcul de créel se fait de manière itérative selon la taille de la matrice.

$$A = \left( \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right)$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

#### Déterminant d'une matrice A de taille 2 ou 3

Soit  $A \in M_n(R)$ , Le déterminant de la matrice A est un réel associé à cette matrice noté det(A). Le calcul de ce réel se fait de manière itérative selon la taille de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

#### Déterminant d'une matrice A de taille 2 ou 3

Soit  $A \in M_n(R)$ , Le déterminant de la matrice A est un réel associé à cette matrice noté det(A). Le calcul de ce réel se fait de manière itérative selon la taille de la matrice.

$$A = \left( \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right)$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{23}$$

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

#### Déterminant d'une matrice A de taille 2 ou 3

Soit  $A \in M_n(R)$ , Le déterminant de la matrice A est un réel associé à cette matrice noté det(A). Le calcul de ce réel se fait de manière itérative selon la taille de la matrice.

$$A = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right)$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

cas n=3

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

Calcul selon la première ligne de A

$$det(A) = a_{11}$$
.  $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}$ .  $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}$ .  $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selor n'importe quelle ligne ou colonne de A.

Votation

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

cas n=3

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

Calcul selon la première ligne de A

$$det(A) = a_{11}$$
.  $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}$ .  $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + a_{13}$ .  $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selor n'importe quelle ligne ou colonne de A.

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

cas n=3

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

Calcul selon la première ligne de A

$$\det(A) = a_{11} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array} \right| - a_{12} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{array} \right| + a_{13} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selor n'importe quelle ligne ou colonne de A.

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\ensuremath{\mathbb{R}}$ 

# cas n=3

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

#### Calcul selon la première ligne de A

$$det(A) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selon n'importe quelle ligne ou colonne de A.

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

cas n=3

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

# Calcul selon la première ligne de A

$$\det(A) = a_{11} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array} \right| - a_{12} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{array} \right| + a_{13} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selon n'importe quelle ligne ou colonne de A.

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\ensuremath{\mathbb{R}}$ 

#### cas n=3

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

# Calcul selon la première ligne de A

$$\det(A) = a_{11} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array} \right| - a_{12} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{array} \right| + a_{13} \cdot \left| \begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

Ce calcul de déterminant se fait selon la première ligne de A. Cependant un déterminant peut être calculé selon n'importe quelle ligne ou colonne de A.

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

#### Exemple n=

Soit

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$$

Calculer det(A)

#### Evemple n='

Soit

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Calculer det(A)

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\ensuremath{\mathbb{R}}$ 

# Exemple n=2

Soit:

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$$

Calculer det(A)

Evennle n-

0.4

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Calculer det(A)

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\ensuremath{\mathbb{R}}$ 

# Exemple n=2

Soit:

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$$

Calculer det(A)

# Exemple n=3

Soit:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Calculer det(A)

Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

neduction de matrices de tame 2 ou 3 dans il

#### Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et  $B \in M_n(\mathbb{R})$ 

(2)  $det(A) = det(^tA)$ 

Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.

On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A un combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A

Si on multiplie une colonne(resp. une ligne )de A par k, le déterminant devient k, det(A)

Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient — det()

Trace et inverse de matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

# Propriétés essentielles du déterminant Soient A et B ∈ M<sub>n</sub>(ℝ) det(A × B) = det(A) × det(B) det(A × B) = det(A) × det(B) det(A) = det(A) × det(B) Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A. On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A. Si on multiplie une colonne(resp. une ligne ) de A par k, le déterminant devient k. det(A)

Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

# Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et  $B \in M_n(\mathbb{R})$ 



$$det(A \times B) = det(A) \times det(B)$$

det(A) = det(`A)

l Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A

combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.

5) Si on multiplie une colonne(resp. une ligne )de A par k, le dé

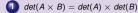
Trace et inverse de matrice carrée

# Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

# Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et  $B \in M_n(\mathbb{R})$ 



📗 Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.

On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.

Si on multiplie une colonne(resp. une ligne )de A par k, le déterminant (

Si on echange deux colonnes de A (resp. deux lighes) le determinant devient — det(A

Trace et inverse de matrice carrée

#### Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

# Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et  $B \in M_n(\mathbb{R})$ 

Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.

combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.

brack Si on multiplie une colonne(resp. une ligne )de A par k, le déterminant devient k.det(A)

Trace et inverse de matrice carrée

#### Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

# Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et  $B \in M_n(\mathbb{R})$ 

 $2 det(A) = det(^t A)$ 

3) Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.

On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.

Si on multiplie une colonne(resp. une ligne ) de A par k, le déterminant devient k.det(A)

Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient — det(A

Trace et inverse de matrice carrée

#### Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans  $\ensuremath{\mathbb{R}}$ 

## Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et  $B \in M_n(\mathbb{R})$ 

 $2 det(A) = det(^t A)$ 

3) Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.

On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.

 $\boxed{\mathbf{5}}$  Si on multiplie une colonne(resp. une ligne )de A par k, le déterminant devient k.det(A)

Si on áchango doux colonnos do Λ (rosp., doux lignos) la dátarminant dovient ... dat(Λ

Trace et inverse de matrice carrée

#### Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

#### Propriétés essentielles du déterminant

Soient A et  $B \in M_n(\mathbb{R})$ 

 $2 det(A) = det(^t A)$ 

3 Si A est diagonale ou triangulaire alors det(A) est égal au produit des éléments diagonaux de A.

On ne change pas la valeur du déterminant de A si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) de A une combinaison linéaire de colonnes (resp. de lignes) de A.

5 Si on multiplie une colonne(resp. une ligne )de A par k, le déterminant devient k.det(A)

Si on échange deux colonnes de A (resp. deux lignes) le déterminant devient -det(A)

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Plan



Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice

Application du déterminant

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit  $A \in M_n(R)$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  est valeur propre de A si :

 $\exists v \in R^n$ 

 $v \neq O_{R^n}$ 

v est vecteur propre associé à la valeur propre

#### Exempl

Spient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et  $\lambda = 1$ . Montrer que v est vecteur propre de A associé à la valeur propre  $\lambda$ 

## Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit  $A \in M_n(R)$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  est valeur propre de A si

 $\exists V \in H$ 

Av - N

v est vecteur propre associé à la valeur propre

#### Exemple

Spient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et  $\lambda = 1$ . Montrer que  $\nu$  est vecteur propre de A associé à la valeur propre  $\lambda$ 

#### Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit  $A \in M_{\mathbb{D}}(R)$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  est valeur propre de A si :  $\exists v \in R^n / 1$ 

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit  $A \in M_{\mathbb{D}}(R)$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  est valeur propre de A si :  $\exists v \in R^n /$ 

 $v \neq O_{R^n}$ 

 $\nu$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ 

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit  $A \in M_{\mathbb{D}}(R)$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  est valeur propre de A si :  $\exists v \in R^n /$ 

 $v \neq O_{R^n}$ 

 $\nu$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ 

#### Exemple

Scient:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et  $\lambda = 1$ . Montrer que  $\nu$  est vecteur propre de A associé à la valeur propre  $\lambda$ 

#### Valeur propre d'une matrice A et vecteur propre associé

Soit  $A \in M_n(R)$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  est valeur propre de A si :  $\exists v \in R^n /$ 

 $v \neq O_{R^n}$ 

 $\nu$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ 

#### Exemple

Scient:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et  $\lambda = 1$ . Montrer que  $\nu$  est vecteur propre de A associé à la valeur propre  $\lambda$ 

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté  $P(\lambda)$  est défini par :  $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ .

#### Valeur propre simple, valeur propre multiple

- Si  $\lambda$  est solution simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre simple de A
- Si  $\lambda$  est solution multiple (double, triple, etc) de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine multiple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre multiple de A

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda=1$  et  $\lambda=3$  sont des valeurs propres simples de A définie précédemment

#### valeur propre triple

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté  $P(\lambda)$  est défini par :  $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ .

#### Valeur propre simple, valeur propre multiple

- Si  $\lambda$  est solution simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre simple de A
- Si  $\lambda$  est solution multiple (double, triple, etc) de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine multiple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre multiple de A

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  et  $\lambda = 3$  sont des valeurs propres simples de A définie précédemment

#### valeur propre triple

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté  $P(\lambda)$  est défini par :  $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ .

#### Valeur propre simple, valeur propre multiple

- Si  $\lambda$  est solution simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre simple de A
- 2 Si  $\lambda$  est solution multiple (double, triple, etc) de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine multiple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre multiple de A

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  et  $\lambda = 3$  sont des valeurs propres simples de A définie précédemment

#### valeur propre triple

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Trace et inverse de matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A. noté  $P(\lambda)$  est défini par :  $P(\lambda) = det(A - \lambda I_B)$ .

#### Valeur propre simple, valeur propre multiple

- 1 Si  $\lambda$  est solution simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine simple de  $P(\lambda) = det(A - \lambda I_0)$  ou valeur propre simple de A.

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté  $P(\lambda)$  est défini par :  $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ .

#### Valeur propre simple, valeur propre multiple

- Si  $\lambda$  est solution simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre simple de A.
- 2 Si  $\lambda$  est solution multiple (double, triple, etc) de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine multiple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre multiple de A

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  et  $\lambda = 3$  sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

## valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté  $P(\lambda)$  est défini par :  $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ .

#### Valeur propre simple, valeur propre multiple

- **1** Si  $\lambda$  est solution simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre simple de A.
- 2 Si  $\lambda$  est solution multiple (double, triple, etc) de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine multiple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre multiple de A

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  et  $\lambda = 3$  sont des valeurs propres simples de A définie précédemment

#### valeur propre triple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté  $P(\lambda)$  est défini par :  $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ .

#### Valeur propre simple, valeur propre multiple

- Si  $\lambda$  est solution simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre simple de A.
- 2 Si  $\lambda$  est solution multiple (double, triple, etc) de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine multiple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre multiple de A

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  et  $\lambda = 3$  sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

#### valeur propre triple

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$



Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté  $P(\lambda)$  est défini par :  $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ .

#### Valeur propre simple, valeur propre multiple

- Si  $\lambda$  est solution simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre simple de A.
- 2 Si  $\lambda$  est solution multiple (double, triple, etc) de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine multiple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre multiple de A

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  et  $\lambda = 3$  sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

#### valeur propre triple

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Polynôme caractéristique de A

Le polynôme caractéristique de A, noté  $P(\lambda)$  est défini par :  $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ .

#### Valeur propre simple, valeur propre multiple

- Si  $\lambda$  est solution simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine simple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre simple de A.
- 2 Si  $\lambda$  est solution multiple (double, triple, etc) de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n) = 0$  on dit que  $\lambda$  est racine multiple de  $P(\lambda) = det(A \lambda I_n)$  ou valeur propre multiple de A

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  et  $\lambda = 3$  sont des valeurs propres simples de A définie précédemment.

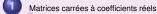
#### valeur propre triple

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$



Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Plan



Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice

Application du déterminant

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Théorèm

#### Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $B \in R^n$ ,  $X \in R^n$  et soit le système AX = B

Nous avons les équivalences suivantes

 $det(A) \neq 0$ 

A est inversible.

Le système AX=B admet une unique solution.

#### De plus

Si  $det(A) \neq 0$  le vecteur solution X est donné par  $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$  où  $det_i(A)$  est le déterminant obtenu e remplacant la ième colonne de A par B.

Si det(A) = 0 Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.

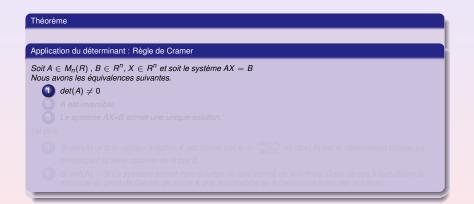
Trace et inverse de matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

Théorème
Application du déterminant : Règle de Cramer
<ul> <li>De plus</li> <li>Si det(A) ≠ 0 le vecteur solution X est donné par x<sub>i</sub> = det<sub>i</sub>(A) où det<sub>i</sub>(A) est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.</li> <li>Si det(A) = 0 Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la methode du pivot de Gauss, on arrive à une impossibilité ou à l'ensemble infini des solutions.</li> </ul>

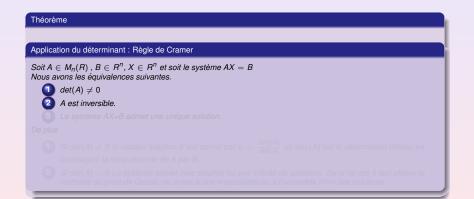
Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Application du déterminant : Règle de Cramer Soit $A \in M_n(R)$ , $B \in R^n$ , $X \in R^n$ et soit le système AX = BNous avons les équivalences suivantes. A est inversible. Le système AX = B admet une unique solution. De plus Si $det(A) \neq 0$ le vecteur solution X est donné par $x_i = \frac{det_i(A)}{det(A)}$ est le déterminant obtenu en grandagent le lémanne leurs de A and B

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R



Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R



Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Théorème

#### Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $B \in R^n$ ,  $X \in R^n$  et soit le système AX = BNous avons les équivalences suivantes.

- A est inversible.
  - Le système AX=B admet une unique solution.



Si det(A) = 0 Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossibilité ou à l'ensemble infini des solutions.

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Théorème

#### Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $B \in R^n$ ,  $X \in R^n$  et soit le système AX = BNous avons les équivalences suivantes.

- A est inversible.
  - Le système AX=B admet une unique solution.

#### De plus

- Si  $det(A) \neq 0$  le vecteur solution X est donné par  $x_i = \frac{det_i(X)}{det(A)}$  où  $det_i(A)$  est le déterminant obtenu el
- remplaçant la leme colonne de A par B.
- 2 Si det(A) = 0 Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser le méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossiblité ou à l'ensemble infini des solutions.

#### Théorème

#### Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $B \in R^n$ ,  $X \in R^n$  et soit le système AX = BNous avons les équivalences suivantes.

- A est inversible.
  - Le système AX=B admet une unique solution.

#### De plus

- **1** Si det(A) ≠ 0 le vecteur solution X est donné par  $x_i = \frac{\det_i(A)}{\det(A)}$  où  $\det_i(A)$  est le déterminant obtenu en remolacant la ième colonne de A par B.
  - Si det(A) = 0 Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser l

#### Théorème

#### Application du déterminant : Règle de Cramer

Soit  $A \in M_n(R)$ ,  $B \in R^n$ ,  $X \in R^n$  et soit le système AX = BNous avons les équivalences suivantes.

- - A est inversible.
    - Le système AX=B admet une unique solution.

De plus

- Si  $\det(A) \neq 0$  le vecteur solution X est donné par  $x_i = \frac{\det_i(A)}{\det(A)}$  où  $\det_i(A)$  est le déterminant obtenu en remplaçant la ième colonne de A par B.
- Si det(A) = 0 Le système admet zéro solution ou une infinité de solutions. Dans ce cas il faut utiliser la méthode du pivot de Gauss, on arrive à une impossibilité ou à l'ensemble infini des solutions.

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Comparaison entre Cramer et pivot de Gauss

La méthode de Cramer a l'air beaucoup plus facile à utiliser que la méthode du pivot de Gauss et pourtant!

- Le nombre d'opérations pour Cramer ou complexité est de type (n + 1)!
  - La complexité pour le pivot de Gauss est de type  $n^3$ , donc beaucoup plus intéressante

#### Litilisation de la règle de Cramer.

Résoudre par la méthode de Crame

$$\begin{pmatrix}
2x - 3y &= 7 \\
3x + 5y &= 1
\end{pmatrix}$$

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Comparaison entre Cramer et pivot de Gauss

La méthode de Cramer a l'air beaucoup plus facile à utiliser que la méthode du pivot de Gauss et pourtant!!

- Le nombre d'opérations pour Cramer ou complexité est de type (n + 1)!
- La complexité pour le pivot de Gauss est de type n³, donc beaucoup plus intéressante.

#### Utilisation de la règle de Cramer

Résoudre par la méthode de Crame

$$\begin{pmatrix} 2x - 3y & = & 7 \\ 3x + 5y & = & 1 \end{pmatrix}$$

#### Comparaison entre Cramer et pivot de Gauss

La méthode de Cramer a l'air beaucoup plus facile à utiliser que la méthode du pivot de Gauss et pourtant!!

- Le nombre d'opérations pour Cramer ou complexité est de type (n + 1)!
- La complexité pour le pivot de Gauss est de type  $n^3$ , donc beaucoup plus intéressante.

## Utilisation de la règle de Cramer

Résoudre par la méthode de Cramer

$$\begin{pmatrix} 2x - 3y & = & 7 \\ 3x + 5y & = & 1 \end{pmatrix}$$

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Application du déterminant : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit  $A \in M_n(R)$  inversible ie  $det(A) \neq 0$ 

$$A^{-1} = \frac{C^t}{\det(A)}$$

C est la matrice des cofacteurs de A.

C la matrice des cofacteurs de A est définie par :  $C = (C_{ii})_{1 \le i,j \le n}$  où

$$C_{ii} = (-1)^{i+j} \det(M_{ii})$$

Mii est la matrice obtenue en barrant la ième ligne et la ième colonne de A.

#### Calcul d'inverse

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Application du déterminant : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit  $A \in M_n(R)$  inversible ie  $det(A) \neq 0$ 

$$A^{-1} = \frac{C^t}{\det(A)}$$

C est la matrice des cofacteurs de A

C la matrice des cofacteurs de A est définie par :  $C = (C_{ii})_{1 \le i,i \le n}$  où

$$C_{ii} = (-1)^{i+j} det(M_{ii})$$

Mii est la matrice obtenue en barrant la ième ligne et la ième colonne de A.

#### Calcul d'inverse

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Application du déterminant : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit  $A \in M_n(R)$  inversible ie  $det(A) \neq 0$ 

$$A^{-1} = \frac{C^t}{\det(A)}$$

C est la matrice des cofacteurs de A.

C la matrice des cofacteurs de A est définie par :  $C = (C_{ii})_{1 \le i,i \le n}$  où

$$C_{ii} = (-1)^{i+j} det(M_{ii})$$

M:: est la matrice obtenue en barrant la ième ligne et la ième colonne de A.

#### Calcul d'inverse

$$A = \left( \begin{array}{rrr} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$



Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Application du déterminant : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit  $A \in M_n(R)$  inversible ie  $det(A) \neq 0$ 

$$A^{-1} = \frac{C^t}{\det(A)}$$

C est la matrice des cofacteurs de A.

C la matrice des cofacteurs de A est définie par :  $C = (C_{ij})_{1 < i,j < n}$  où

$$C_{ii} = (-1)^{i+j} det(M_{ii})$$

 $M_{ii}$  est la matrice obtenue en barrant la ième ligne et la jème colonne de A.

#### Calcul d'inverse

$$A = \left( \begin{array}{rrr} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Application du déterminant : Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit  $A \in M_n(R)$  inversible ie  $det(A) \neq 0$ 

$$A^{-1} = \frac{C^t}{\det(A)}$$

C est la matrice des cofacteurs de A.

C la matrice des cofacteurs de A est définie par :  $C = (C_{ii})_{1 \le i,i \le n}$  où

$$C_{ii} = (-1)^{i+j} det(M_{ii})$$

 $M_{ii}$  est la matrice obtenue en barrant la ième ligne et la jème colonne de A.

#### Calcul d'inverse

Montrer que cette matrice est inversible et déterminer son inverse :

$$A = \left(\begin{array}{rrrr} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit  $A \in M_p(R)$ , on cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Avec l'exemple précédent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
 
$$det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

# Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit  $A \in M_n(R)$ , on cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Avec l'exemple précédent

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda h) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)\lambda + 3$$

# Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit  $A \in M_n(R)$ , on cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Avec l'exemple précédent

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$det(A - \lambda b) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

# Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit  $A \in M_n(R)$ , on cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

Avec l'exemple précédent

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{array}\right)$$

# Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit  $A \in M_n(R)$ , on cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

# Avec l'exemple précédent

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

# Application du déterminant : Recherche d'une valeur propre de A

Soit  $A \in M_n(R)$ , on cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$det(A - \lambda I_n) = 0$$

# Avec l'exemple précédent

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$det(A - \lambda l_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Trace et inverse de matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre $\lambda$ de A

Soit  $A \in M_n(R)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche  $X \in R^n$ ,  $X \neq O$  tel que

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  le système devient

$$(S) \begin{cases} -x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à  $\lambda=1$  vérifient  $x_1+x_2=0$ . On choisira par exemple  $X_1=(1,1)$ 

travail personnel

Chercher les vecteurs propres associés à  $\lambda = 3$  et nommer un représentant simple.

# Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre $\lambda$ de A

Soit  $A \in M_n(R)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche  $X \in R^n$ ,  $X \neq O$  tel que

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

# Avec rexemple precedent

 $\lambda = 1$  le système devient

$$(S) \begin{cases} -x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à  $\lambda=1$  vérifient  $x_1+x_2=0$ . On choisira par exemple  $X_1=(1,1)$ 

- travail personnel
  - Chercher les vecteurs propres associés à  $\lambda = 3$  et nommer un représentant simple.

# Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre $\lambda$ de A

Soit  $A \in M_n(R)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche  $X \in R^n$ ,  $X \neq O$  tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  le système devient

$$(S) \begin{cases} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à  $\lambda=1$  vérifient  $x_1+x_2=0$ . On choisira par exemple  $X_1=(1,1)$ 

travail personnel

Chercher les vecteurs propres associés à  $\lambda = 3$  et nommer un représentant simple.

Trace et inverse de matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant

Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

## Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre $\lambda$ de A

Soit  $A \in M_n(R)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche  $X \in R^n$ ,  $X \neq O$  tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  le système devient

$$(S) \begin{cases} -x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à  $\lambda=1$  vérifient  $x_1+x_2=0$ . On choisira par exemple  $X_1=(1,1)$ 

travail personnel

Chercher les vecteurs propres associés à  $\lambda = 3$  et nommer un représentant simple

# Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre $\lambda$ de A

Soit  $A \in M_n(R)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche  $X \in R^n$ ,  $X \neq O$  tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

# Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  le système devient :

$$(S) \begin{cases} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

# Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre $\lambda$ de A

Soit  $A \in M_n(R)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche  $X \in R^n$ ,  $X \neq O$  tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

# Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  le système devient :

$$(S) \begin{cases} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs propres associés à  $\lambda=1$  vérifient  $x_1+x_2=0$ . On choisira par exemple  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ 



# Recherche des vecteurs propres associés à une valeur propre $\lambda$ de A

Soit  $A \in M_n(R)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On cherche  $X \in R^n$ ,  $X \neq O$  tel que :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

On se retrouve dans le cas d'une résolution de système avec un déterminant égal à 0. Dans ce cas là, il y a une infinité de solutions et la résolution du système se fait en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

#### Avec l'exemple précédent

 $\lambda = 1$  le système devient :

$$(S) \begin{cases} -x_1 - x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

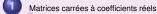
On en déduit que les vecteurs propres associés à  $\lambda=1$  vérifient  $x_1+x_2=0$ . On choisira par exemple  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ 

2 travail personnel :

Chercher les vecteurs propres associés à  $\lambda = 3$  et nommer un représentant simple.

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Plan



Trace et inverse de matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée réelle A

Valeurs propres et vecteurs propres de matrice

Application du déterminant

Préduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Matrices semblables : Définition

Soient  $A \in M_n(R)$ ,  $A' \in M_n(R)$  A et A' sont semblables s'il existe une matrice  $P \in M_n(R)$  inversible telle que

$$A' = P^{-1}AP$$

## Matrices semblables : Définition

Soient  $A \in M_n(R)$ ,  $A' \in M_n(R)$  A et A' sont semblables s'il existe une matrice  $P \in M_n(R)$  inversible telle que :

$$A' = P^{-1}AP$$

Trace et inverse de matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Diagonalisation

 $det(A - \lambda I_n)$  se factorise dans  $\mathbb R$  en n facteurs distincts du premier degré ou A admet n valeurs propres distinctes alors A est semblable à une matrice diagonale D. On dit alors que A est diagonalisable.  $D = P^{-1}AP$  D est diagonale et ses valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

#### Trigonalisation ou diagonalisation

 $det(A - \lambda I_n)$  se factorise dans  $\mathbb R$  en n facteurs non nécessairement distincts du premier degré alors A peut se triangulariser (A est semblable à une matrice triangulaire ou A est trigonalisable) ou se diagonaliser (semblable une matrice diagonale).  $T = P^{-1}AP$ 

Les valeurs de T sur la diagonale sont les valeurs propres de A

#### Pas de réduction possible dans ⊪

 $det(A - \lambda l_0)$  ne se factorise pas complétement dans  $\mathbb{R}$ , dans ce cas là A ne peut pas se réduire de cette manière (semblable ni à l'une ni à l'autre)

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Diagonalisation

 $det(A - \lambda I_n)$  se factorise dans  $\mathbb{R}$  en n facteurs distincts du premier degré ou A admet n valeurs propres distinctes alors A est semblable à une matrice diagonale D. On dit alors que A est diagonalisable.  $D = P^{-1}AP$  D est diagonale et ses valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

#### Trigonalisation ou diagonalisation

 $det(A - \lambda I_n)$  se factorise dans  $\mathbb{R}$  en n facteurs non nécessairement distincts du premier degré alors A peut se triangulariser (A est semblable à une matrice triangulaire ou A est trigonalisable) ou se diagonaliser (semblable une matrice diagonale).  $T = P^{-1}AP$ 

Les valeurs de T sur la diagonale sont les valeurs propres de A

#### Pas de réduction possible dans I

 $det(A - \lambda I_0)$  ne se factorise pas complétement dans  $\mathbb{R}$ , dans ce cas là A ne peut pas se réduire de cette manière (semblable ni à l'une ni à l'autre)

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

#### Diagonalisation

 $det(A - \lambda I_n)$  se factorise dans  $\mathbb R$  en n facteurs distincts du premier degré ou A admet n valeurs propres distinctes alors A est semblable à une matrice diagonale D. On dit alors que A est diagonalisable.  $D = P^{-1}AP$  D est diagonale et ses valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

#### Trigonalisation ou diagonalisation

 $det(A - \lambda I_n)$  se factorise dans  $\mathbb R$  en n facteurs non nécessairement distincts du premier degré alors A peut se triangulariser (A est semblable à une matrice triangulaire ou A est trigonalisable) ou se diagonaliser (semblable à une matrice diagonale).  $T = P^{-1}AP$ Les valeurs de T sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

#### Pas de réduction possible dans ®

 $det(A - \lambda I_n)$  ne se factorise pas complétement dans  $\mathbb{R}$ , dans ce cas là A ne peut pas se réduire de cette manière (semblable ni à l'une ni à l'autre)

Trace et inverse de matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Diagonalisation

 $det(A - \lambda I_n)$  se factorise dans  $\mathbb R$  en n facteurs distincts du premier degré ou A admet n valeurs propres distinctes alors A est semblable à une matrice diagonale D. On dit alors que A est diagonalisable.  $D = P^{-1}AP$  D est diagonale et ses valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

#### Trigonalisation ou diagonalisation

 $det(A - \lambda I_n)$  se factorise dans  $\mathbb{R}$  en n facteurs non nécessairement distincts du premier degré alors A peut se triangulariser (A est semblable à une matrice triangulaire ou A est trigonalisable) ou se diagonaliser (semblable à une matrice diagonale).  $T = P^{-1}AP$ Les valeurs de T sur la diagonale sont les valeurs propres de A.

#### Pas de réduction possible dans R

 $det(A - \lambda I_n)$  ne se factorise pas complétement dans  $\mathbb{R}$ , dans ce cas là A ne peut pas se réduire de cette manière (semblable ni à l'une ni à l'autre)

Trace et inverse de matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

Diagonalisation

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

- Déterminer les valeurs propres de A
- En déduire les vecteurs propres de A
  - Trouver alors D diagonale semblable à A

Diagonalisation  $A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$  Déterminer les valeurs propres de A

Trace et inverse de matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée réelle A Valeurs propres et vecteurs propres de matrice Application du déterminant Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans ℝ

# Diagonalisation

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Déterminer les valeurs propres de A

En déduire les vecteurs propres de A

Trace et inverse de matrice carrée
Déterminant d'une matrice carrée réelle A
Valeurs propres et vecteurs propres de matrice
Application du déterminant
Réduction de matrices de taille 2 ou 3 dans R

# Diagonalisation

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

- Déterminer les valeurs propres de A
- 2 En déduire les vecteurs propres de A
  - Trouver alors D diagonale semblable à A.