Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Справочник:

Sqrtn – корень n-ой степени

§1 Определение комплексного числа алгебраическая и геометрическая форма

О. комплексное число называется число вида Z = x + iy, где x/ y действительные числа ∈ R, i – мнимая единица.

I2 = -1 x = Re(z) – действительная часть Z y = Im(z)- мнимая часть Z

О. Сопряжённое число ¬z к z = x + iy ¬z = x – iy

x + ¬z ∈ R, x \* ¬z ∈ R

комплексное число геометрически представляются на плоскости XOY (комплексная плоскость)

Y z1 = 3-2i

Z3 z2 = -3

Z2 z3 = 2i x

ϕ Z1

z = x + iy – алгебраическая запись

r = |z| - модуль комплексного числа

|z| = sqrt(x2 + y2) ϕ = аргумент z – главного значения

ϕ ∈ (-π;π], ϕ ∈ [0;2π]

Арг z = арг z + 2πk k ∈ Z

x = r \* cosϕ

y = r \* sinϕ

z = r(cosϕ + i sinϕ) тригонаметрическая формула

замечание что у чисел лежащих на осях координат аргумент находится из геометрических соображений

§2 Действия над комплексными числами в алгеброической форме

01 z1 = x1 + iy1  z1 = z2 ⬄ x1 = x2

z2 = x2 + iy2 y1 = y2

02 z1 + z2 = x1 + x2 + i(y1 + y2)

03 z1 \* z2 = (x1 + iy1)\*(x2 + iy2) = (x1x2 – y1y2 + i(x1y2 + x2y1)

04 z1 / z2 = (z1 \* ¬z2)/ (z2 \* ¬z2) = (x1x2 + y1y2 + i\*(y1x2 – y2x1)) / (x22 + y22)

05 i1 = i i3 = -i

I2 = -1 i4 = 1

06 sqrtn(z) = ω , такое что ωn = z

§3 Действия над комплексными числами по тригонометрической формуле

Z1 = r1(cosϕ1 + isinϕ1)

Z2 = r2(cosϕ2 + isinϕ2)

1)z1z2 = r1r2\*(cos(ϕ1 + ϕ2) + isin(ϕ1 + ϕ2))

Докозательство:

z1z2 = r1r2\*(cosϕ1 + isinϕ1)\*(cosϕ2 + isinϕ2) = r1r2\*(cosϕ1 \* cosϕ2 - sinϕ1 \* sinϕ2 + isinϕ1cosϕ2 + isinϕ2cosϕ1) = =r1r2\*(cos(ϕ1 + ϕ2) + isin(ϕ1 + ϕ2))

2)z1/z2 = (r1/r2)\*(cos(ϕ1 - ϕ2) + isin(ϕ1 - ϕ2))

Докозательство:

Z1/z2 = (r1/r2)\*((cosϕ1  + isinϕ1)\*(cosϕ2  - isinϕ2))/((cosϕ2  + isinϕ2)\*(cosϕ2  - isinϕ2)) = (r1/r2)\*(cosϕ1 \* cosϕ2 - sinϕ1 \* sinϕ2 + isinϕ1cosϕ2 + isinϕ2cosϕ1) / (cos2ϕ2 + sin2ϕ2) = (r1/r2)\*(cos(ϕ1 - ϕ2) + isin(ϕ1 - ϕ2))

3)zn = rn \* (cos(n\*ϕ) + isin(n\*ϕ)) n ∈ Z+, Z-

Докозательство:

Z3 = z \* z \* z

z-1 = 1/z = (cos 0 + isin 0)/(r(cosϕ + isinϕ)) = 1/r \* (cos(-ϕ) + isin(-ϕ))

так как z-n = (z-1)n , ∀n∈Z

4)sqrtn(z) = sqrtn(r)(cos((ϕ+2πk)/2) + isin((ϕ+2πk)/2))

Доказательство:

(sqrtn(z))n = (sqrtn(r)(cos((ϕ+2πk)/2) + isin((ϕ+2πk)/2)))n = r(cos(ϕ+2πk) + isin(ϕ+2πk)) = r(cosϕ + isinϕ)

Формулы Эйлера

Показательная формула комлексного числа

eiϕ = r(cosϕ + isinϕ)

e-iϕ = r(cosϕ - isinϕ)

cosϕ = (eiϕ + e-iϕ) / 2

sinϕ = (eiϕ - e-iϕ) / 2

z = r \* eiϕ

z1 \* z2 = r1 \* r2 \* ei(ϕ1+ϕ2)

z1 / z2 = r1 / r2 \* ei(ϕ1-ϕ2)

zn = rn \* einϕ

sqrtn(z) = sqrtn(r) \* e(iϕ +2πk)/n

Фундаментальные понятия алгебры. Алгебраические структуры

§1 Множества

Под множеством будем понимать совокупность a∈A, a – элемент

N = {1; 2; 3; …} натуральные числа

Z = {0; ±1; ±2; …} целые числа

Q = {m/n, m, n∈Z, n ≠0} рациональные числа

R – вещественные, действительные числа

C – комплексные числа

О. A∈B ⬄ ∀a∈A => a∈B

О. A=B ⬄ A∈B и B∈A

N∈Z∈Q∈R∈C

A пустое множество

A∪B A or B

A∩B A and B

A \ B A – B

R \ B – иррациональные

A x B = {(a;b) | a∈A, b∈B}

A x A = A2

§2 Бинарная алгебраическая операция

Пусть множество A, содержит хотя бы один элемент A≠∅

О. Будем говорить, что в А определён бинарная алгебраическая операция. Если указан закон по которому ∀

16.09.2021

Свойства

1) О. Бинарные операции ‘\*’ называется коммутативной, если ∀ a,b∈A

a ‘\*’ b=b ‘\*’ a

2) О. Бинарная операция ‘\*’ называется ассоциативной ∀ a, b, c ∈ A

(a ‘\*’ b) ‘\*’ c = a ‘\*’ (b ‘\*’ c)

Пример:

1)(R, ‘\*’) a – b – c ≠ a – (b – c)

a ‘\*’ b = a2 + b

b ‘\*’ a = b2 + a

a2 ‘\*’ b ≠ b2 + a

2) (a ‘\*’ b) ‘\*’ c = (a2 + b) ‘\*’ c = (a2 + b)2 + c = a4 + 2\*a2\*b + b2 + c

3) a ‘\*’ b = ab + a + b коммутативный

a ‘\*’ (b ‘\*’ c) = a \* (bc + b + c) + a + bc + b + c = abc + ab + ac + a + bc + b + c

4) a ‘\*’ b = ab

5) a ‘\*’ b = (a + b) / 2

§3 Группы

О. G(G ≠ ∅), бинарная операция

1)операция ассоциативна

О. Группа по сложению называется аддитивной, а по умножению мультипликативной

Свойcтво 1) нейтральный элемент единственный

Докажем, что e ’\*’ a=a (a ’\*’ a-1) ‘\*’ a = a ‘\*’ (a-1 ‘\*’ a) = a ‘\*’ e = a

∃e1 , ∃e2 e1 ‘\*’ e2 = e2 e1 ‘\*’ e2 = e1

2)! ∃a1-1 ∃a2-1

(a1-1 ‘\*’ a) ‘\*’ a

Аксиомы:

1) ∀а,в,с ∈K (a+b)+c = a+(b+c)

2) ∃0∈K a + 0 = a ∀a ∈K

3) ∃ противоположного элемента

∀a∈K ∃-a∈K: a+(-a) = 0

4) ∀a,b∈K a+b = b+a

5) ∀a,b,c∈K (a+b)\*c = a\*c + b\*c

a(b+c)=ab + ac

6) ∀a,b,c∈K (ab)c = a(bc)

7) ∀a,b∈K ab = ba коммутативное умножение

8) ∃e=1∈K a\*1=1\*a=a

О. если выполняются аксиомы 1-5, то K называется кольцом

Если 1-6, то K называется ассоциативным кольцом

Если 1-5,7, то K называется коммутативное кольцо

Если 1-5,8, то K называется кольцо с единицей

Если 1-8, то K ассоциативным коммутативное кольцо с единицей

Замечание: Любое кольцо является абелевой группой по сложению

(Z, +, •) ассоциативным коммутативное кольцо с единицей

(Q, +,•) 2) 2\*Z ассоциативным коммутативное кольцо

2\*Z+1 нечёт + нечёт != нечёт

S5 Поле

9) ∀a∈P ∃a-1∈P : a-1\*a = 1

О. P(P!=0) , если оно является ассоциативным коммутативным с 1 и ∀ ненулевого элемента ∃ обратный по умножению

Пример: Z – не поле

Q, R, C – поле

S6 Корень n-ой степени из 1

11/n =cos ((2Пk)/n) + I sin ((2Пk)/n) k = 0, n-1

εk= cos ((2Пk)/n) + I sin ((2Пk)/n)

11/n = {εk|k=0, n-1}

О. Корень n-ой степени из 1 примитивный ( или первообразный), если он не является корнем из 1 никакой меньшей степени.

11/6 ε = cos (П/3) + I sin (П/3) - примитивный

ε2 = cos (2П/3) + I sin (2П/3)- не примитивный

ε3, ε4 - не примитивный

ε5 - примитивный

Т. Число εk т. и. т. будет примитивным корнем n-ой из 1, если НОД(k, n) =1

О. Группа называется циклической если она порождена одним элементом а, а а – порождающий элемент.

Аддитивная циклическая группа (+)

G = {n\*a|n∈Z}

Пример: Z, порождающая 1 или -1

Мультипликативная циклическая группа

G = {an|n∈Z}

Т. Все значения корня n-ой степени из 1 в области C. образуют мультипликативную циклическую группу. Порождающий элемент первообразного корня

IIIМатрицы и определители.

S1 Матрицы и основные понятия

О. Матрицы размера mxn называется прямоугольная таблица из m\*n чисел, расположенных в m строках и в n столбцах

Amxn =( )

Числа из которых составлены M. называется элементами

Аg – элемент, стоящий в i-ой строке и в j-ой столбце

Ag = (aij)

О. Строки и столбцы матрицы называются её рядами.

||ряды ⬄ 2 строки или 2 столбца

О. A = B ⬄ {

Основные виды Матриц:

A = () квадратна матрица

A =( ) диагональная матрица

E =() единичная матрица

A =() скалярная матрица

A =() верхнетреугольная матрица

A =() нижнеутрегольная матрица

A =() матрица строка

A =() матрица столбец

A =() нулевая мвтрица

A =(), где a11, a22, … all ≠0

Если хотя бы один из a11, a22, … all = 0, то матрица называется ступенчатой

§2. Действия с матрицами

1)Сложение матриц

Суммой матриц Amxn= (aij) и Bmxn= (bij) называют матрицу Cmxn= (cij) такая что cij = aij + bij

C = A + B

2)Умножение матриц Amxn= (aij) на число k называют Bmxn= (bij) такая что bij = k\* aij

B = kA

Матрица (-1)\* A называется матрица противоположная к матрице A и обозначается -A

Свойства линейных операций

1) A + B = B + A

2) (A + B) + C = A + (B + C)

3) A + 0 = A 6) α(βA) = (αβ)A

4) A + (¬A) = 0 7) α(A + B) = αA + αB

5) 1\*A = A 8) (α + β)A = αA + βA

Множество всех диагональных матриц образует группу со сложением

A = (), B = (), C = ()

1)A + B – нельзя сложить так как матрицы не равны по размерам

2)3B+C-2E = () + () - () = ()

3)Умножение матриц

Матрица A называется согласованной с матрицей B , если

число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

A согласована с B ⬄ Amxk Bkxn

Если A согласованно с B не=> что B согласованно с A

О. Произведение матрицы Amxn = (aij) на матрицу Bkxn = (bij) называется матрица Cmxn = (cij) такая, что

= ai1b1j + ai2b2j + … + aikbkj

Элемент матрицы С, стоящий в i-ой строке и j-м столбце равен сумме

произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие

элементы j-го столбца матрицы В.

Если матрицу A можно умножить на матрицу B , то это не

означает, что B можно умножить на A . Даже если оба произведения

существуют, то не=> A\*B = B\*A

О. Если A\*B = B\*A , то матрицы называются коммутативными.

Так как скалярная матрица x =( )=() и тд => размер матрицы A и скалярной матрицы будут согласованны

A =(), B =(), C =()

A\*B = ()\* () = ()

A\*C =()\* () = ()

B\*A =()\* () = ()

Свойства произведения

1)A\*E = E\*A = A

2)A\*O = O\*A = O

3)(AB)C = A(BC)

4)α(AB) = (αA)B

5) (A + B)\*C = A\*C + B\*C

6) C\*(A + B) = A\*C + B\*C

4) Транспонирование матриц

О. если матрица A размеров mxn надо заменить строки на столбцыи получается nxm

Свойство транспонирования

1)(AT)T = A

2)(kA)T = kAT

3)(A+B)T = AT + BT

4)(A\*B)T = BT \* AT

5) Возведение в степень (только для квадратных матриц)

An = A \* A \* … \* A n∈N

6)След матриц(только для квадратных матриц)

trA = spA = сумма диагональных элементов

Если trA = 0 , то матрица называется бесследовая.

Свойство trA

1)tr(A + B) = trA + trB

2)tr(kA) = k \* tr(A)

3)tr(A \* B) = tr(B \* A)

4)tr(A) = tr(AT)

§3 Определитель матрицы

О. Определитель матрицы называется число, равное элементу матрицы

|a11| = a11

delA, |A|, Δ

О. Определитель второго порядка называют число, равное произведение элементов, стоящих на главной диагонали минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали

О. Определитель третьего порядка сумма трёх главных диагоналей и минус сумма побочных диагоналей

О. Перестановкой из n натуральных чисел 1,2,...,n называется любое их расположение в определенном порядке.

Обозначение перестановки(a1, a2,..., an)

Число различных перестановок из n чисел равно n!

О. Говорят, что два числа в перестановке образуют инверсию,

если большее число стоит перед меньшим.

О. Число пар в перестановке, образующих инверсию

называется числом инверсий k(a1, a2,..., an). Если число инверсий четное,

то перестановка четная, если нечетное, то нечетная.

О. Преобразование в перестановке при котором 2 символа

меняются местами (не обязательно стоящие рядом), остальные символы без

изменения называется траспозицией.

Теорема Любая транспозиция меняет четность перестановки.

Доказательство:

Для чисел стоящих рядом – очевидно, так как число инверсий меняется на 1.

Пусть между переставляемыми числами ai и aj находится s других чисел.

(…, ai, a1, a2, …, as, aj, …)

Будем последовательно менять местами ai с рядом стощим a1, a2, …, as, aj – s+1 транспозиция. Затем aj переместим влево перед a1 – s транспозиций.

Всего 2s+1 транспозиция. Число инверсий поменялось нечетное число раз,

что означает, что четность перестановки изменится.

Теорема 3.2. При n >= 2 число четных перестановок из n чисел равно числу

нечетных, т.е. n!/2.

Рассмотрим две перестановки из n чисел и запишем одну под другой.

A = () Задает отображение (биекцию) ai |→ , ∀i =

О. A = () называется подстоновкой n-ой степени

Любая подстоновка может быть записанна в виде A = ()

Различные подстановки отличаются перестановками второй строки, т.е.

число подстановок *n* – ой степени равно *n*!

E = () – тождественная подстановка.

О. Подстановка называется четной, если общее число инверсий в 2-х строках четно и нечетной в противном случае.

О. Умножение подстановок (композиция отображений) – результат последовательного выполнения двух подстановок.

A = () B = ()

A\*B = () 1|→4|→2, 2|→1|→1, 3|→2|→4, 4|→3|→3.

B\*A = () 1|→1|→4, 2|→4|→3, 3|→3|→2, 4|→2|→1.

Умножение подстановок n – ой степени не коммутативно, но ассоциативно (n >= 3).

E \* A = A \* E = A

Обратная подстановка к A = () равна A-1 = (). A \* A-1 = E.

Множество всех подстановок n – ой степени образует группу с операцией умножения подстановок.

О. Определителем n – го порядка называется число равное

1) алгебраической сумме n! слагаемых

2) каждое слагаемое равно произведению n элементов, взятых по одному из

каждой строки и каждого столбца матрицы (определителя)

3) слагаемое берется со знаком «+», если подстановка образованная первыми

индексами элементов (номерами строк) и вторыми индексами (номерами

столбцов) четная и «–» в противном случае.

Может ли быть а) a11 \* a24 \* a31 \* a43

б) a13 \* a21 \* a32 \* a44 слагаемым при вычислении определителя 4-го порядка, если да, то определите знак слагаемого.

Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов главной диагонали. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

**§4 Свойства определителей**

1) Определитель матрицы при транспонировании не изменится

|A| = |AT|

2) Если все элементы некоторого ряда определителя равны 0, то определитель равен 0.

3) Если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

4) Определитель, у которого каждый элементы некоторого ряда является сумме двух слагаемых равен сумме 2-х определителей, у первого в указанном ряду – первые слагаемые, у второго – вторые слагаемые. Остальные ряды у всех определителей одинаковы.

5. При перестановке двух параллельных рядов определителя,

определитель меняет знак.

Доказательство. Следует из теоремы, что любая транспозиция меняет четность перестановки.

6. Если все элементы двух параллельных рядов определителя равны, то определитель равен 0.

Доказательство. Из свойства 5: |A| = -|A| => 2|A| = 0 => |A| = 0

7. Если все элементы двух параллельных рядов определителя пропорциональны, то определитель равен 0.

Доказательство. Следует из свойства 3 и 6.

8. Определитель не изменится, если к элементам некоторого ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.

Доказательство. Следует из свойства 4 и 7.

9. Определитель произведения матриц равен произведению определителей.

|A\*B| = |A| \* |B| = |B\*A|

## §5. Миноры и алгебраические дополнения элементов.

**Теорема Лапласа (о разложении определителя), теорема аннулирования, теорема замещения.**

Дана квадратная матрица.

**Определение 5.1.** *Минором элемента aij* квадратной матрицы *А n*-го порядка называется определитель (*n* – 1)-го порядка, полученный из данной матрицы *А* путём вычёркивания *i*-ой строки и *j*-го столбца на пересечении которых стоит элемент *aij*.

Минор элемента *aij* обозначается: *Mij*.

**Определение 5.2.** *Алгебраическим дополнением элемента aij*

называется произведение *(−1)i+j ∙ Mij*. Обозначается: *Aij = (−1)i+j ∙ Mij*. (**5.1.**)

**Теорема 5.1. (Теорема Лапласа, теорема о разложении)** Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на их алгебраические дополнения.

- Разложение определителя по 1-ой строчке.

определителя по 1-ой строке.

**Теорема 5.2. Теорема Замещения.** Сумма произведений

произвольных *n* чисел

*d*1, *d*2 ,..., *dn*

на алгебраические дополнения

элементов некоторого ряда определителя *n* – го порядка равна

определителю у которого в указанном ряду стоят элементы d1+d2,…,dn

d1\*A11+d2\*A12+…+dn\*A1n=

=

*Доказательство*. Из теоремы о разложении определителя. **Теорема 5.3. Теорема Аннулирования.** Сумма произведений элементов некоторого ряда на алгебраические дополнения элементов параллельного ряда равна 0.

*Доказательство*. По теореме замещения в двух параллельных рядах одинаковые элементы. По свойству определителя, он равен 0.

*Вычисление определителей высших порядков*

1. Метод понижения порядка определителя.

Используют разложение определителя по элементам ряда, для упрощения вычислений, используя свойства, делают все элементы ряда, кроме одного равными 0.

2) Метод приведения к треугольному виду

## §6. Обратная матрица. Матричные уравнения

**Определение 6.1.** Квадратная матрица A-1 называется *обратной* к квадратной матрице A, если

A-1 ∙ A = A ∙ A-1 = E*,*

где E – единичная матрица соответствующего размера. Если существует обратная матрица, то сама матрица *А* называется *обратимой*.

**Определение 6.2**. Квадратная матрица A называется *невырожденной* или *неособенной*, если det A ≠ 0. В противном случае – *вырожденной* (*особенной*).

**Теорема 6.1.** Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы A была невырожденной (det A ≠ 0).

*Доказательство*

1. Необходимость. По определению A ∙ A-1 = E. Тогда, по свойствам определителя |A ∙ A-1| = |E| ⇒ |A| ∙ |A-1| = |E| = 1 ⇒ |A| ≠ 0.
2. Достаточность. Пусть |A| ≠ 0.

Рассмотрим матрицу A∗ у которой на ij – м месте стоит алгебраическое дополнение Aji, ji – го элемента матрицы A:

Рассмотрим произведение:

Таким образом, A\*A = |A|\*E. Так как |A| ≠ 0, то

Следовательно, по определению .

При этом матрица A∗ называется *союзной* или *присоединённой* по отношению к матрице A. Союзная матрица составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы *А* и транспонированная.

Получили формулу для нахождения обратной матрицы:

**Теорема 6.2**. Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица.

*Доказательство*

(от противного) Пусть ∃A1-1 и ∃A2-1

A1-1\*A=E и A\* A2-1=E

Тогда с одной стороны: A1-1\*(A\* A2-1)= A1-1\*E= A1-1,

С другой стороны: (A1-1\*A)\* A2-1= E\*A2-1= A2-1 , A1-1=A2-1

*Свойства*

1. .

2. ( *A*1)1  *A*

3. (AB)-1 = B-1A-1.

Доказательство. (B-1\*A-1)\*(A\*B)= B-1\*(A-1\*A)\*B = B-1\*E\*B=E

4. (Ak)-1=(A-1)k

5. (A-1)T=(AT)-1

Доказательство: (A-1)T\*AT=(A-1\*A)T=ET=E, AT\*(A-1)T =(A\*A-1)T=ET=E

*Матричные уравнения*

* 1. A ∙ X = B

Умножим обе части уравнения на A-1 **слева:**

A ∙ X = B ⇒ A-1 ∙ A ∙ X = A-1 ∙ B ⇒ X = A-1 ∙ B

* 1. X ∙ A = B

Умножим обе части уравнения на A-1 **справа:**

X ∙ A = B ⇒ X ∙ A ∙ A-1 = B ∙ A-1 ⇒ X = B ∙ A-1

* 1. A ∙ X ∙ B = C

Умножим обе части уравнения на A-1 слева и на B-1 – справа**:**

A ∙ X ∙ B = C ⇒ A-1 ∙ A ∙ X ∙ B ∙ B-1 = A-1 ∙ C ∙ B-1 ⇒ X = A-1 ∙ C ∙ B-1

**Замечание 6.1.** Для квадратной матрицы 2-го порядка , союзная

матрица находится по правилу: элементы главной диагонали меняются

местами, у побочной остаются на месте, но умножаются на –1.

**§7. Ранг матрицы** Пусть дана прямоугольная матрица Am×n

**Определение 7.1.** Определитель матрицы Am×n, составленный элементов матрицы, стоящих на пересечении *s* строк и s столбцов матрицы, называется минором пордка s. Обозначение Ms.

Заметим, что всего таких миров

**Определение 7.2.** *Рангом* матрицы Am×n называется наибольший из порядков её миноров, отличных от 0.

Обозначается: *rangА, rankА, r(A).*

*rangA*  max *S* , где

*Ms*  0

*Свойства ранга*

1. 0 ≤ r(A) ≤ min(m, n).

2. r(А) = 0  *A*  O

3. r(An) = n  *А* невырожденная матрица.

4. r(A) = r(AT) ранг не изменится, если матрицу транспонировать.

**Определение 7.3.** *Базисным минором* матрицы называется любой, отличный от

0 минор, порядок которого равен рангу матрицы. Строки и столбцы на пересечении которых стоят элементы базисного минора называются *базисными*.

**Пример 7.1.** Найти ранг матрицы

*rangA*  1, так как все миноры второго порядка равны 0, то *rangA*  1.

**§11. Элементарные преобразования матрицы Определение 11.1.** *Элементарными преобразованиями* матрицы

называются следующие действия:

1. перестановка двух параллельных рядов местами;
2. умножение некоторого ряда матрицы на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одному ряду матрицы другого, параллельного ему ряда, умноженного на произвольное число.

**Теорема 11.1.** Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

*Доказательство*. Основывается из свойств определителя.

*э*.*п*.

*A* ~ *A*1  *rangA*  *rangA*1

*Применение элементарных преобразований*

1. Нахождение ранга матрицы.

Матрицу элементарными преобразованиями приводят к трапециевидному виду (ступенчатому). Количество ненулевых строк равно рангу матрицы.

1. Нахождение обратной матрицы.

Приписываем справа к матрице *А* единичную матрицу соответствующего порядка. Элементарными преобразованиями над строками, тогда на месте

единичной будет стоять A-1.

1. Решение матричных уравнений.

Уравнение *A*  *X*  *B*

Приписываем к матрице *А* матрицу *В*, элементарными преобразованиями на месте матрицы *А* выделяем единичную, тогда на месте матрицы *В* будет решение матричного уравнения.

( *A* ⁝ *B*) ~ (*E* ⁝ *X* )

Уравнение *X*  *A*  *B*

Сводим к уравнению *A*  *X=B:(X*

( *AT* ⁝ *BT* ) ~ (*E* ⁝ *X T* )

## Замечание.

Если требуется решить несколько матричных уравнений с одной матрицей *А*:

A⋅то их можно решать одновременно

(A⁝B1⁝B2)~(E⁝C1⁝C2), где X=C1­—решение матричного уравнения и Y=C2—решение матричного уравнения.

*Доказательство метода*

Запишем матрицу *B* в блочном виде, где каждый блок это столбец матрицы *В*.

(A⁝B1⁝B2⁝…⁝Bn)~(E⁝C1⁝C2⁝…⁝Cn)

Приведение матрицы (A⁝B1) элементарными преобразованиями к виду (E⁝C1), соответствует решению системы линейных уравнений методом Жордана-Гаусса, тогда решение этой системы является

*X*  *C*1 , аналогично для других столбцов *X*  *C*2 ,..., *X*  *Cn* . Все столбцы *C*1, *C*2 ,...,*Cn*образуют матрицу *С*, которая является решением исходного матричного уравнения.

## СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

**§1 Матричная запись системы линейных уравнений (СЛУ)**

**Определение 1.1.** *Линейной системой* из *m* уравнений с *n* неизвестными *x*1, *x*2, …, *x*n называется система вида

, где aij и bi — числа (i=1,…,m; j=1,…,n),

которые называются *а*ij – коэффициентами при неизвестных, *b*i – свободными членами.

**Определение 1.2.** Упорядоченная совокупногсть чисел (*с*1, *с*2, …, *с*n) называется *решением системы* (1.1), если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство при подстановке вместо *x*1, *x*2, …, *x*n соответственно *с*1, *с*2, …, *с*n .

**Определение 1.3.** Если существует хотя бы одно решение системы (1.1), то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*.

**Определение 1.4.** Если система имеет единственное решение, то она называется *определенной*, более одного – *неопределенной*.

**Определение 1.5.** Две системы называются *эквивалентными* или *равносильными*, если всякое решение одной из них является

решением другой и наоборот, то есть, если они имеют одно и то же множество решений. Всякие две несовместные системы являются эквивалентными.

**Определение 1.6.** Матрица, составленная из коэффициентов при переменных, называется *матрицей системы* или *основной матрицей системы*.

Для системы (1.1) матрица системы имеет вид:

Введем матрицу – матрица-столбец свободных членов

**Определение 1.7.** Матрица, которая получается из матрицы А приписыванием столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей системы* .

Для системы (1.1) расширенная матрица системы имеет вид:

Amx(n+1)=(A⁝B)=

Введём матрицу: Xnx1= – матрица-столбец из неизвестных.

Amxn\*Xnx1=

Заметим, что в левой части системы (1.1) стоят элементы полученной матрицы.

Тогда система (1.1) означает равенство матриц *A* *X* и *B*.

Таким образом, A⋅X=B (1.2) – матричная запись системы линейных уравнений

СЛУ → = (A⁝B) ~ A1 → равносильная СЛУ

**§2. Решение систем в матричном виде. Формулы Крамера**

Пусть дана система из *n* уравнений с *n* неизвестными:

**Определение 2.1.** Определитель квадратной матрицы *А* называется *определителем матрицы системы* и обозначается

Пусть матрица A – невыроженная, т. е. Δ≠0. Это означает что у матрицы A существует матрица A-1.

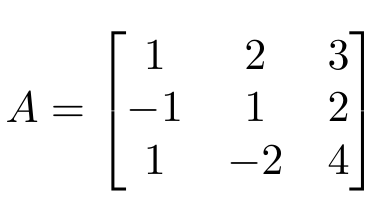
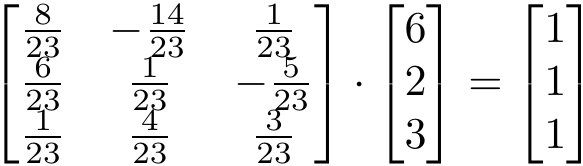
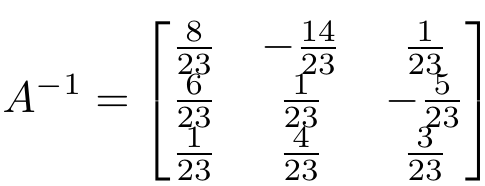
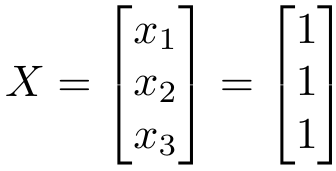
Матричная запись системы (2.1): A⋅X=B. При умножении обеих частей уравнения слева на A-1, получаем следующее уравнение A-1⋅A⋅X=A-1⋅B

Используя, что A-1⋅A=E и E⋅X=X

Таким образом, получаем матричную запись решения системы (2.1 ) X=A-1⋅B

(**2.2**) – решение СЛУ матричным способом

**Пример 2.1. !** (самостоятельно) Решить систему уравнений матричным способом

|A|=23

Пусть дана система из *n* уравнений с *n* неизвестными (2.1), в которой определитель системы Δ≠0

**Теорема Крамера.** Если определитель системы (2.1)   0 , тогда

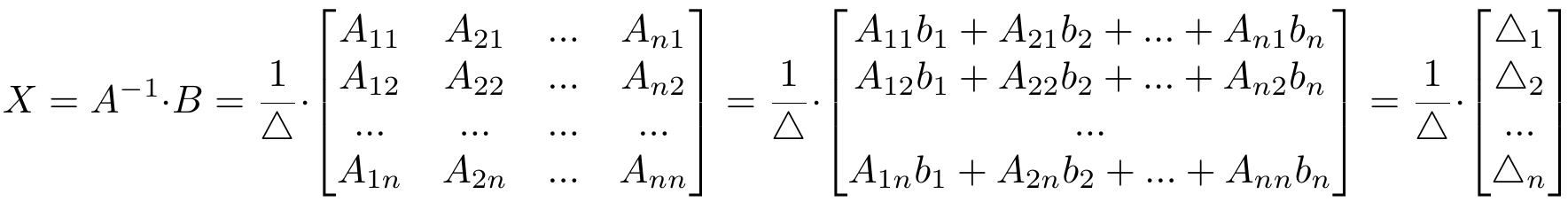
система имеет единственное решение, которое находиться по формулам: x1=, x2=, …, xn= где

  определитель матрицы системы (составлен из коэффициентов при неизвестных);

i  определитель, получаемый из определителя  заменой *i*-го столбца на столбец свободных членов (*i*=1,…,n).

Формулы (2.3) называются формулами Крамера. *Доказательство*

В формулу (2.2) нахождения решения системы подставим выражение обратной матрицы через союзную



Исследование решения СЛУ

1. Если Δ≠0, ∃!решение найденное по формуле Крамера(2.3)
2. Если Δ=0, а хотя бы одно Δi≠, то система уравнений имеет бесконечное множество решений.
3. Если Δ=Δ1=…=Δn=0 система уравнений имеет бесконечное множество решений.

## §3. Линейная независимость

Определение 3.1. Упорядоченная система из n чисел a=(a1;a2;…;an) называется n – мерным вектором. Числа ai, i=1,n называются компонентами вектора a.

Определение 3.2. Два вектора a и b называются равными, если соответствующие компоненты равны. При сложении векторов соответствующие компоненты складываются, при умножении на число каждая компонента умножается на число.

*a*  (**1;**2;...;*n* ) , *b*  (**1; **2;...; *n* )

*a*  *b*  (**1  **1;**2  **2;...;*n*  *n* )

*a*  (**1; **2;...; *n* )

Определение 3.4. Система векторов a1,a2,…,an называется линейно-независимой, если их линейная комбинация равна 0, тогда и только тогда, когда все коэффициенты ci=0, ∀i=1,n.

c1a1+c2a2+…+cnan=0 ⇔ c1=c2=…=cn=0

Система векторов ciai=-c1a1-…-cnan. Разделим обе части на ci≠0 или ai=d1a1+…+dnan.

Таким образом, если система векторов линейно-зависимая, то хотя бы один из векторов может быть выражен через линейную комбинацию остальных.

## §4. Решение произвольных линейных систем. Метод Гаусса

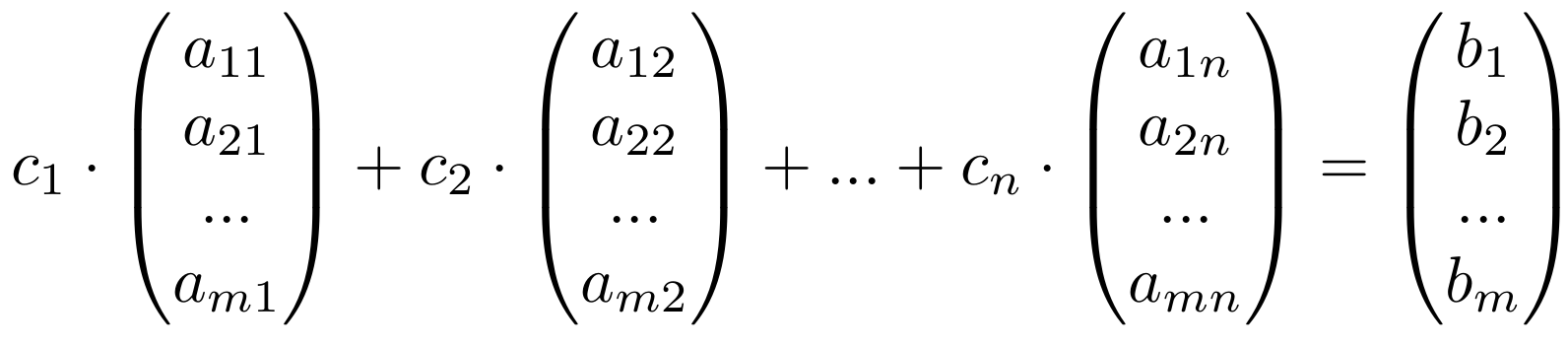
21.10.21

Пусть задана система (1.1.) **Теорема Кронекера-Капелли**

Для совместности системы (1.1.) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.

*Доказательство*.

Необходимость. Система (1.1.) совместна. По определению (1.2.) существует упорядоченная совокупность (*с*1, *с*2, …, *с*n), такая что



то есть последний столбец расширенной матрицыявляется линейной комбинацией остальных столбцов. Вычитая из последнего столбца матрицы указанную линейную комбинацию остальных столбцов, получим матрицу

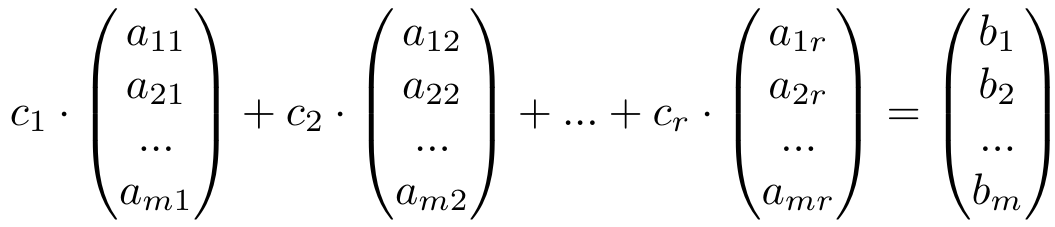


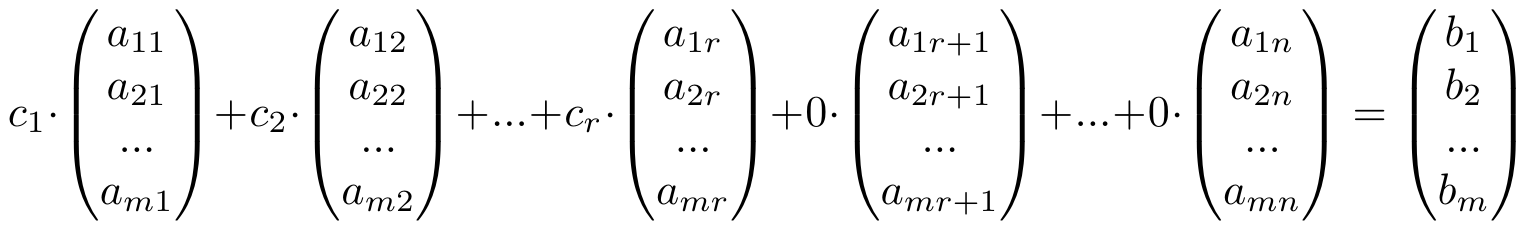
Достаточность.

*rang*  *rangA*  *r*

У матриц и *A* существует базисный минор порядка *r*. Все столбцы базисного минора линейно-независимы, так как базисный минор не равен 0. Следовательно, существует линейная независимая подсистема из *r* векторов- столбцов матрицы *А*. Если к этой системе добавить вектор-столбец свободных членов, то система станет линейно-зависимой.

Таким образом, вектор-столбец свободных членов можно представить в виде линейной комбинации *r* векторов- столбцов матрицы *А*, а следовательно, и всех столбцов матрицы *А*.





Получаем, что (*с*1, *с*2, …, *с*n) является решением системы (1.1.) и система совместна.

## Замечание 4.1.

1. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).
2. Базисные строки (столбцы) линейно-независимы.
3. Максимальное число линейно-независимых стр ок (столбцов) матрицы равно ее рангу.

## Метод Гаусса

Прямой ход:

I Выписываем расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями над строками приводим к трапециевидному виду (нулевые строки вычеркиваем);

II Если

Если

*rang*  *rangA* , то система несовместна.

*rang*  *rangA*  *r* , то система совместна.

Возможны варианты:

1. *r*  *n* (*n* – число неизвестных) СЛУ имеет единственное решение

Обратный ход: Записываем систему уравнений, соответствующую треугольной матрице системы. Начиная с нижнего уравнения, находят последовательно все неизвестные.

1. *r*  *n* СЛУ имеет бесконечное множество решений, которое записывают в

виде так называемого общего решения системы. Для его нахождения: Выбирают базисный минор в преобразованной матрице, имеющей треугольный вид. Переменные, входящие в базисный минор называются базисными: *x*1, *x*2, …, *x*r – базисные переменные, остальные *x*r+1, *x* r+2, …, *x*n – свободными переменными, которым придают значения произвольных постоянных.

Обратный ход: Записывают эквивалентную СЛУ (соответствующую последней расширенной матрице) и выражают базисные переменные через свободные.

**Замечание 4.1.** Если на каком либо шаге получилась строка, в которой все элементы кроме свободного члена равны 0, то СЛУ несовместна.

## Метод Жордана Гаусса

Отличается от метода Гаусса, так как не требует обратного хода.

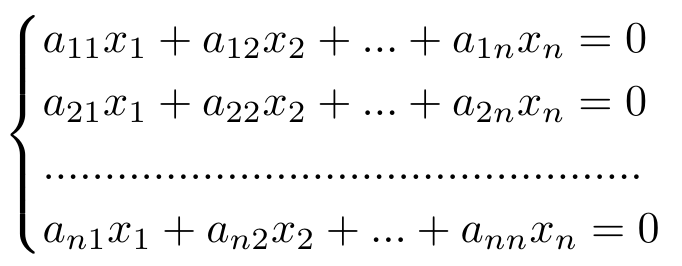
В расширенной матрице системы э.п. над строками выделяют единичную матрицу (единичные столбцы).

## §5. Линейные однородные системы уравнений (ЛОСУ).

**Фундаментальная система решений**

**Определение 5.1.** *СЛУ* называется *однородной*, если свободные члены в

каждом уравнении равны 0, bi=0,i=.

**

Система всегда совместна, так как *rang*  *rangA*  *r* .

**Определение 5.2.** Решение ЛОСУ  *x*1  *x*2  ...  *xn*  0 называется *нулевым* или тривиальным

## Исследование решения ЛОСУ

## Если r=n (в случае m=n |A|≠0) ЛОСУ имеет лишь тривиальное решение.

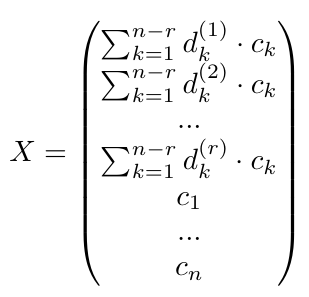
## Если r<n, то система имеет бесконечное множество решений.

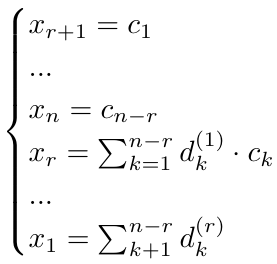
Свойства решений ЛОСУ

1)Если (α1; α2;…; αn) – решение Лосу, то (λα1;λα2;…;λαn) – решение ЛОСУ, где λ - число

2)Если (α1; α2;…; αn), (β1; β2;…; βn) – какие либо два решения ЛОСУ, то (α1+β1; α2+β2;…; αn+βn) – решение ЛОСУ

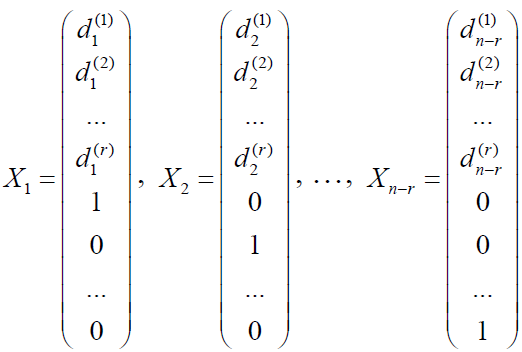
Таким образом, любая линейная комбинация решений ЛОСУ также является решением ЛОСУ.

Пусть x1, x2, …, xr - , базисные переменные, остальные xr+1, xr+2, …, xn – свободные переменные. Выразим базисные переменные через свободные.



, тогда , где с1,с2,…,сn-r ∈R.

Запишем общее решение системы в виде X=c1X1+c2X2+…+cn-rXn-r



где

X1 – матрица коэффициентов при c1, X2 – матрица коэффициентов при c2,…,

Xn-r – матрица коэффициентов при cn-r.

X1, X2, …, Xn-r также является решениями ЛОСУ (X1 получается из X подстановкой вместо c1=1,c2=0,…,cn-r=0), являются линейно независимыми решениями и образубт фундаментальную систему решений (ФСР) ЛОСУ.

Определение 5.3 n-r линейно-независимых решений ЛОСУ называются фундаментальной системой решений.

## ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

**§1. Векторы. Операции над векторами.**

**Определение 1.1.** *Вектором* называется направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление.

Вектор, началом которого является точка *А*, а концом – точка *В*, обозначается

A B ⃗ или a⃗*.*

Вектор B A ⃗ (начало в точке *В*, конец в точке *А*) называется *противоположным* вектору A B ⃗. Вектор, противоположный вектору a⃗, обозначается: −a⃗.

**Определение 1.2.** *Длиной* или *модулем* вектора отрезка *АВ* и обозначается A B ⃗ или |a⃗|.

A B ⃗ = a⃗ называется длина

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* вектором и обозначается 0⃗. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором.

**Определение 1.3.** Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора a⃗, называется *ортом* вектора a⃗ и обозначается a⃗0.

**Определение 1.4.** Векторы a⃗ и b ⃗ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначается a⃗ ∥ b ⃗.

Коллинеарные векторы направленные одинаково называются *сонаправленными* и обозначаются a⃗ ⇈ b ⃗. Если векторы направлены противоположно, их обозначают a⃗ ↑↓ b ⃗.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

**Определение 1.5.** Два вектора a⃗ и b ⃗ называются *равными*

→ → → → → →

*a*  *b*  *a*  *b* , *a*  *b*

Из определения равенства векторов, следует, что вектор можно переносить

параллельным переносом и начало вектора помещать в любую точку пространства.

В С ⃗ ⇈ А ⃗, В

С⃗ = А ⃗,

А В ⃗ ↑↓ ⃗

В С

А D

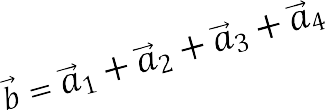
**Определение 1.6.** Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если среди трёх векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие три вектора компланарны.

*Линейные операции над векторами*

**Определение 1.7.** *Суммой векторов* a⃗, a⃗, … , a⃗n называется вектор b ⃗, начало которого совпадает с началом вектора a⃗, а конец с концом вектора a⃗n, при условии, что начало каждого последующего вектора совпадает с концом предыдущего. Обозначается b ⃗ = a⃗ + a⃗ + ⋯ + a⃗n.

*Правило многоугольника*:



a⃗

a⃗

4

a⃗

a⃗

*Правило треугольника*:



a⃗

b ⃗

*Правило параллелограмма*:



a⃗

b ⃗

**Определение 1.8.** *Разностью векторов* a⃗ и b ⃗ называется вектор с⃗ = a⃗ − b ⃗

такой, что b ⃗ + с⃗ = a⃗:



a⃗

b ⃗

**Замечание 1.1.** Из правил сложения и вычитания векторов следует, что в параллелограмме, построенном на векторах a⃗ и b ⃗, одна направленная диагональ является суммой векторов a⃗ и b ⃗, а вторая – разностью:

a⃗ + b ⃗

a⃗

b ⃗

a⃗

− b ⃗

**Определение 1.9.** *Произведением вектора* a⃗ *на скаляр (число)* называется вектор ∙ a⃗ (или a⃗ ∙ ), который имеет длину | | ∙ |a⃗|, коллинеарен вектору a⃗, имеет направление вектора a⃗, если > 0 и противоположное направление, если

< 0

**Замечание 1.2.** Из определения произведения вектора на число, следует, что:

1) если b ⃗ = λ ∙ a⃗, то b ⃗ ∥ a⃗;

1. если b ⃗ ∥ a⃗, (a⃗ ≠ 0⃗), то при некотором λ верно равенство b ⃗ = λ∙ a⃗;
2. всегда a⃗ = |a⃗| ∙ a⃗0, то есть каждый вектор равен произведению его

модуля на орт, отсюда a⃗0 =

## Свойства линейных операций над векторами:

1) a⃗ + b ⃗ = b ⃗ + a⃗;

2) ;

3) ∃ 0⃗ a⃗ + 0⃗ = a⃗ ∀a⃗ ;

4) ∀a⃗ ∃ − a⃗ a⃗ + (−a⃗) = 0⃗;

5) λ∙(δ⋅a⃗) = (λ∙δ) ∙ a⃗;

6) (λ+δ) ∙ a⃗ = λ∙ a⃗ + δ∙ a⃗;

7) λ ∙ (a⃗ + b ⃗ ) = λ∙ a⃗ + λ∙ b ⃗;

8) 0 ∙ a⃗ = 0⃗;

9) 1 ∙ a⃗ = a⃗;

10) (−1) ∙ a⃗ = −a⃗.

**§2. Проекция вектора**

**Определение 2.1.** *Проекцией точки М* на ось *h* (на направленную прямую *h*) называется основание M перпендикуляра MM, опущенного из точки на ось.

*M*

M *h*

**Определение 2.2.** *Проекцией вектора*на ось *h* называется положительное число , если вектори ось *h* одинаково направлены и отрицательное число − , если вектор и ось *h* противоположно направлены.

Проекция вектора на ось *h* обозначается пр .

В

А

А В *h*

Если точки A1 и B1 совпадают ( = 0⃗), то проекция вектора равна нулю.

Если = 0⃗ или перпендикулярен (*ортогонален*) *h*, то

прh= 0.

**Определение 2.3.** *Проекцией вектора* a⃗ *на вектор* b ⃗ (b ⃗ ≠ 0⃗)

называется проекция вектора a⃗ на ось, содержащую вектор b ⃗.

## Свойства проекции вектора на ось

Обозначим ϕ угол между вектором a⃗ и осью *h* (или угол между двумя векторами), ϕ ∈ [0; rr]

a⃗ *h*



a⃗

ϕ

**Свойство 2.1.** Проекция вектора a⃗ на ось *h* равна произведению модуля вектора a⃗ на косинус угла ϕ между вектором и осью, то есть

прa⃗ = |a⃗| ⋅ cos ϕ. (**2.1**)

**Свойство 2.2.** Проекция вектора на ось положительна, если вектор образует с осью острый угол, отрицательна, если угол тупой, и равна нулю, если этот угол – прямой.

## Свойство 2.3.

Прh(a⃗1+ a⃗2+ ⋯ + a⃗n) = прha⃗1+ прha⃗2+ ⋯ + прh a⃗n.(**2.2**)

**Свойство 2.4.**

Прh(λ∙a⃗) = λ ∙ прh a⃗. (**2.3**)

**Пример 2.3.** Найти прh b ⃗, если прh (4a⃗ − 2b ⃗ − c ⃗) = 2, |a⃗| = 3,

Решение

## §3. Базис пространства, координаты вектора.

**Направляющие косинусы**

Определения линейной комбинации, линейной независимости системы векторов, линейной зависимости системы векторов остаются без изменения.

Если в системе векторов есть нулевой вектор, то система линейно зависимая. Если в системе векторов имеется линейно зависимая подсистема, то вся система линейно зависимая.

## Критерии линейной зависимости векторов

1. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. *Доказательство*. Самостоятельно **!**
2. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

*Доказательство*. Если среди векторов есть коллинеарные, то векторы линейно зависимы. Совместим начала векторов 𝑎⃗, 𝑏̅⃗, с⃗.

*О A*

*B*

𝑏̅⃗

𝑐⃗

𝑎⃗

с⃗ = ̅𝑂̅̅𝐴̅⃗ + 𝑂̅̅𝐵̅⃗ = 𝑥𝑎⃗ + 𝑦𝑏̅⃗ . Следовательно, векторы линейно зависимые.

1. Четыре вектора всегда линейно зависимы.

*Доказательство*. Если среди векторов есть какие-либо три компланарные, то система линейно зависимая. Совместим начала векторов 𝑎⃗, 𝑏̅⃗, с⃗, 𝑑⃗.

Доказать самостоятельно **!**

**Определение 3.1.** Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *базисом в пространстве*.

Упорядоченная двойка неколлинеарных векторов называется *базисом на плоскости*.

𝑑⃗ = 𝑥𝑎⃗ + 𝑦𝑏̅⃗ + 𝑧𝑐⃗ (**3.1.**) разложение вектора по базису 𝑎⃗, 𝑏̅⃗, с⃗, числа *x*, *y*, *z* называются координатами вектора 𝑑⃗ относительно базиса 𝑎⃗, 𝑏̅⃗, с⃗.

**Определение 3.2.** *Аффинные координаты* в пространстве определяются

заданием базиса 𝑎⃗, 𝑏̅⃗, с⃗ и некоторой точки *O* – начала координат.

**Определение 3.3.** *Базис* состоящий из взаимно перпендикулярных единичных векторов называется *ортонормированным*.

Если указан способ, позволяющий устанавливать положение точки в пространстве (на плоскости, на прямой) с помощью задания некоторых чисел, соответствующих этой точке, то говорят, что в пространстве

(на плоскости, на прямой) введена *система координат*.

Пусть задана декартова система координат. Вектор ı⃗ направлен вдоль оси *OX* (абсцисс), вектор 𝑗⃗ направлен вдоль оси *OY* (ординат), вектор 𝑘̅⃗ направлен вдоль оси *OZ* (аппликат). Векторы ı⃗, 𝑗⃗, 𝑘̅⃗ называются *базисными ортами*.

*y*



*z*

*M*3

*M*

*O*

𝑘̅⃗

*M*2

*M*1

ı⃗

𝑗⃗

*x*

𝑂̅̅𝑀̅⃗ = ̅𝑂̅𝑀̅̅1⃗ + ̅𝑂̅̅𝑀̅̅2⃗ +

̅𝑀̅̅3⃗

Таким образом любой вектор можно представить в виде суммы трёх векторов, лежащих соответственно на осях *Ох*, *Оy* и *Оz* .

𝑂̅̅𝑀̅⃗ = 𝑥ı⃗ + 𝑦𝑗⃗ + 𝑧𝑘̅⃗ (**3.2.**) разложение вектора по базису ı⃗, 𝑗⃗, 𝑘̅⃗, числа *x*, *y*, *z* называются координатами (проекциями) вектора ̅𝑂̅̅𝑀̅⃗ относительно базиса

ı⃗, 𝑗⃗, 𝑘̅⃗.

𝑥 = 𝑘р7⃗̅𝑂̅̅𝑀̅⃗, 𝑦 = 𝑘р𝑦⃗̅𝑂̅̅𝑀̅⃗, 𝑧 = 𝑘рk̅⃗ ̅𝑂̅̅𝑀̅⃗.

Записи 𝑎⃗ = 2ı⃗ − 3𝑗⃗ + 𝑘̅⃗ и 𝑎⃗ = {2; −3; 1} равнозначны.

**Замечание 3.1.** Базисные векторы *i* , *j* , *k* имеют координаты

*i*  1;0;0,

*j*  0;1;0, *k*  0;0;1.

**Определение 3.4.** Пусть  ,  ,  – углы, которые составляет вектор ̅𝑂̅𝑀̅⃗ с

осями координат *OX*, *OY* и *OZ* соответственно.

cos ,

cos  ,

cos

называются

*направляющими косинусами вектора* По свойству 2.1. проекции

̅𝑂̅̅𝑀̅⃗.

cos 

*x*

~~––––→~~

*OM*

, cos  

*y*

~~––––→~~

*OM*

, cos 

*z*

~~––––→~~

*OM*

. (**3.3.**)

**Замечание 3.2.** Просуммировав квадраты направляющих косинусов,

получаем основное соотношение: направляющих косинусов.

cos2   cos 2   cos 2 

 1. (**3.4.**) связь

**Замечание 3.3.** Орт вектора *a* имеет координаты

*ao* =cos , cos  , cos .

Нахождение орта вектора называется *нормированием* вектора. **Определение 3.5.** Вектор ̅𝑂̅̅𝑀̅⃗, направленный из начала координат называется *радиус-вектором точки M*.

Координаты радиус-вектора точки *M* 𝑟̅𝑀̅⃗ = 𝑥ı⃗ + 𝑦𝑗⃗ + 𝑧𝑘̅⃗ и точки *М*(*x*;*y*;*z*) совпадают.

## §4. Действия над векторами, заданными своими координатами

*a*  *x* ; *y* ; *z* 

→  *x* ;

*y* ; *z* 

 1 1



1  *b*  2

 

# →

(*x* )2  ( *y* )2  (*z* )2

1

1

1

2 2 



* 1. Длина вектора *a* 

# → →

*x*1  *x*2 ,

(4.1.)

* 1. Равенство векторов

*a*  *b*   *y*  *y* ,

(4.2.)

 1 2

*z*  *z* .

 1 2

* 1. Сумма векторов

*a*  *b*  *x*1  *x*2 ; *y*1  *y*2 ; *z*1  *z*2 

(4.3.)

* 1. Умножение вектора на число

 →

*a*    *x*1;

  *y*1;

  *z*1

(4.4.)

* 1. Коллинеарность векторов 𝑎⃗ ∥ 𝑏̅⃗

 *x*1

*x*2

 *y*1 *y*2

 *z*1  

*z*2

(4.5.)

* 1. Координаты вектора через координаты начала и конца вектора

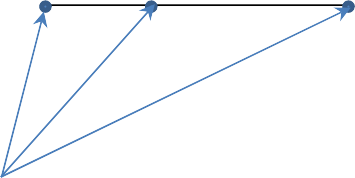
*А*(*xA* ;*yA* ;*zA* ) , *B*(*xB* ;*yB* ;*zB* )

Доказать самостоятельно **!**

𝐴̅̅̅𝐵̅⃗ = {𝑥𝐵 − 𝑥Æ; 𝑦𝐵 − 𝑦Æ; 𝑧𝐵 − 𝑧Æ} (4.6.)

* 1. Формулы деления отрезка в данном отношении Пусть точка *М* делит отрезок *АB* в отношении  (  >0)

––––→ –––→



*A*

*M*



*B*

––––→

*AМ*

~~–––→~~

*МB*

  .

*AМ*   *МB*



*O*

––→ –→ –→ ––→

––→ ––→ –→ –→ ––→

–→ –→

*r*  *r*   *r*  *r*  

*r*  *r*  *r*  *r*  *r*

 *rA*  *rB*

(4.7)

*M A B M*

В координатном виде:

*M M A B*

*M* 1  

*x*  *xA*  *xB* ;

*M* 1  

*yM* 

*yA*   *yB* ;

1  

*z*  *zA*  *zB* . (4.8**.**)

*M* 1  

Если

  1, получаем формулы нахождения координат середины отрезка

  *xA*  *xB* ,

*x*

 *M*

2

 *y*  *y*

  *A B* ,

*y*

 *M*

 2

*z*  *zA*  *zB* .

(4.9**.**)

 *M* 2

**Замечание 4.1.** Из формул 4.1 и 4.6 можно получить *формулу расстояния между точками.* Так расстояние *d* между точками *А*(*xA* ;*yA* ;*zA* ) и *B*(*xB* ;*yB* ;*zB* ) равно модулю вектора *AB* , то есть

*d*  .

(*x*  *x*

)  ( *y*  *y* )  (*z*  *z* )

2

2

2

*B*

*A*

*B*

*A*

*B A*

**Пример 4.1.** Разложить вектор

→

→

*a*  {8;7}, по базису *p*  *i*

* *j* ,

*q*  3*i*  2 *j* .

*Решение*: Используем разложение вектора по базису *a*  *xp*  *yq* . Два вектора равны, если равны соответствующие координаты:

*x*  3*y*  8,

*x*  2 *y*  7.



 *x*  1,



 *y*  3.

*Ответ*:

*a*   *p*  3*q* .

**Пример 4.2.** Вектор *a* составляет острые углы с осями координат, причем с осью OX - 45º и OY - 60º . Найти координаты вектора *a* , если *a*  3.

→

*Решение*: Используем формулу связи направляющих

косинусов

cos2   cos2   cos2   1

 2

  



2

 1 2

  

* cos2 

 1,

 2 

1 1

 2 

→0

 2 1 1 

cos2   ,

cos  , т.к.   90∘ . Следовательно, *a*  

; ;  .

4 2  2 2 2 

Для нахождения вектора *a* используем формулу связи вектора и орта:

→ → →0

*a*  *a*  *a*

→ →0 3 2 3 3 

*a*  3  *a*   2 ; ; .

 2 2 

→ 3 2 3 3 

*Ответ*:

*a*   2 ; ;  .

 2 2 

→

**Пример 4.3.** Найти вектор *x* коллинеарный вектору *a*  2;3;6 и

→

образующий тупой угол с осью *OY*, если *x*  35.

*Решение*: 𝑎⃗ ∥ 𝑏̅⃗

 → 

; 3;

 6

*x*  2

→  35

42  92  362



*x*

 7 

 35

   5 , так как

  90∘

, то

  5 .

*x*  10;

→

15; 30.

*Ответ*:

→

*x*  10;

15; 30.

→ → → → →

**Пример 4.4.** Даны векторы

*a*  2*i*  3 *j*  6*k* и *b*  *i*  2 *j*  2*k*

приложены

к общей точке. Найти орт биссектрисы угла между *a* и *b* .

*Решение*: При сложении двух векторов одинаковой длины, вектор суммы

будет направлен по биссектрисе угла между *a* и *b* . Поэтому сложим орты векторов *a* и *b* .

→

4  9  36

*a*   7 ,

→ →

*a*0  *a*

1 4  4

7 7 7

~~→~~

*a*

  2 ; 3 ; 6 . Аналогично, *b* 

 

 3,

→0 *b*

 1 2 2 

*b*  ~~→~~   ; ; .

*b*  3 3 3 

→ →0

→0 

1 5 4  → 42

*c*  *a*  *b*

  ; ;  , *c*   21

 21 21 21

→  

212 212 212

1  25  16

42

0



*c*



1 ; 5 ; 4 

*Ответ*: 

42

42 



1 ; 5 ;

4 .

 42 

42

42

 

**§5. Скалярное произведение двух векторов**

**Определение 5.1.** *Углом между двумя векторами*, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол  , на который нужно повернуть один вектор до совпадения его направления с направлением второго вектора.

𝑏̅⃗

𝑎⃗

**Определение 5.2.** *Скалярным произведением a*  *b*

двух векторов *a* и *b*

называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла

между ними:

*a*  *b* 

*a*  *b* cos

(**5.1.**)

Обозначения: *a*  *b* , *ab* , *a*;*b*.

→ → → 2

→ 2 → 2

*a*  *a*  *a* – скалярный квадрат , по формуле (6.1.) *a*  *a*

→

*a*  *b*  *a*  *пр*→*b*  *b*  *пр*→ *a*

(**5.2.**) выражение скалярного произведения через

*a*

проекцию

*b*

*Алгебраические свойства скалярного произведения*:

1. *a*  *b*  *b*  *a* ;

2) *a* *b*  *a*  *b*   *a*  *b*

3) *a*  *b* *c*  *a*  *c*  *b*  *c* ;

*Доказательство*. 1) очевидно 2,3) используются свойства проекции

→ 2

4) *a*  0 , если *a* – ненулевой вектор и

→ 2 →

*a*  0  *a*  0 .

*Геометрические свойства скалярного произведения*:

1. Необходимое и достаточное условие ортогональности

(перпендикулярности) векторов:

*a*  *b*  0  *a*  *b* .

*Доказательство*.

Необходимость:

*a*  *b*  cos  0  *a*  *b*  0 .

Достаточность:

*a*  *b* 

*a*  *b* cos  0 , если хотя бы один из векторов

нулевой  *a*  *b* .

→ → 

Если

*a*  0, *b*

* 0  cos  0    .

2

1. Два ненулевых вектора *a* и *b* составляют острый угол

 *a*  *b*  0 ,

тупой угол

 *a*  *b*  0 .

*Скалярное произведение векторов, заданных координатами*

Пусть

*a*  *x*1*i*

 *y*1 *j*  *z*1*k* ,

*b*  *x*2*i*

 *y*2 *j*  *z*2*k* , то скалярное произведение

равно **сумме** произведений соответствующих координат

*a*  *b*  *x*1  *x*2  *y*1  *y*2  *z*1  *z*2

(**5.3**)

*Доказательство*. Самостоятельно **!**

*Механический смысл скалярного произведения*

*A*  *F*  *S*

* работа силы при перемещении материальной точки по

вектору *S*.

*Применение скалярного произведения*

1. cos 

*a*  *b*

~~→ →~~

*a*  *b*

косинус угла между векторами

→ *a*  *b*

1. *пр*→*b*   ~~→~~ проекция вектора на вектор

*a a*

→

~~→~~ 2

*a*

1. *a* 

длина вектора не через координаты *Ортогональная составляющая вектора a*

*a*

*a*→

*e*

*пр*→ *a*

*e*

*a*→ – ортогональная составляющая относительно вектора *e*

*e*

*пр*→ *a* – ортогональная проекция

*e*

*a*  *пр*→ *a*  *a*→

*e e*

**Пример 5.1.** Найти скалярное произведение 3*a*  *b**a*  2*b*, если

→ → → → 

*a*  2, *b*

 5,(*a*;*b* )  .

3

Применяя свойства скалярного произведения, получим

→ → → → → → → → → → → → → 2

           

3*a*  *b*  *a*  2*b*  3 *a*  *a*  6 *a*  *b*  *b*  *a*  2 *b*  *b*  3*a*

→ → →2

 5 *a*  *b*  2*b* 

 

→ 2 → → → 2 

 2 2

3 *a*  5 *a*  *b* cos  2 *b*

 3  2

 5  2  5  cos

3

 2  5

 63 .

**Пример 5.2.** Найти скалярное произведение 3*a*  *b* *b* , если

*a*  1;2;3, *b*  4;2;8. Найдем вектор 3*a*  3; 6;9 ;

3*a*  *b*  3  4; 6  2;9  8  1; 4;17 ,

3*a*  *b* *b*  1  4  4  2  17  8  132 . **Пример 5.3.** Найти проекцию вектора

*b*  4; 2;1.

*a*  5;2;1

на вектор

→ *a*  *b*

*пр*→ *a*   ~~→~~

*b b*

*a*  *b*  (5)  (4)  (2)  2  11  17 .

→

*x*2  *y*2  *z*2

(4)2  22  12

*b*    .

21

→ *a*  *b* 17

*пр*→ *a*   ~~→~~  .

21

*b b*

**Пример 5.4.** Найти проекцию вектора

→ →

*a* 2 *p q* на вектор





*b*  *p* 

→

2*q* ,

→

→ → → → 

если

→

*p*  *q*

*a*  *b*

 1, ( *p*;*q*)  .

3

*пр*→ *a*   ~~→~~

*b*

*a*  *b* 

*b*

→  →  →  → 

→ 2 

→  →  →  → 

→2 

(2 *p q*) ( *p*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| → 2  *p*  3 | →  *p* |  | →  *q* |  cos   2 | →2  *q* |  2  3  1 |  2  | 3 |
|  |  |  |  | 3 |  | 2 |  | 2 |

 2

2*q*) 2 *p*

4 *p q q p* 2*q*

→

→

*b* 2

~~→ →~~ 2

( *p*  2*q*)

*p*  4 *p*  *q*  4*q*

~~→~~ 2 → → →2

*b*    

  

*p*  4 *p*  *q*  cos  4 *q*

→ 2

→ →



→2

3

1  2  4



7

→ *a*  *b* 3

*пр*→ *a*   ~~→~~  .



2 7

*b b*

## §6. Векторное произведение векторов

Пусть дана правая система координат, т.е. кратчайший поворот от оси OX к оси OY, если смотреть из положительного направления оси OZ, совершается против часовой стрелки.

**Определение 6.1.** Три некомпланарных вектора 𝑎⃗, 𝑏̅⃗ и 𝑐⃗, взятые в указанной последовательности, образуют *правую тройку*, если из конца третьего вектора 𝑐⃗ кратчайший поворот от первого вектора 𝑎⃗ к вектору 𝑏̅⃗ виден против часовой стрелки. В противном случае векторы 𝑎⃗, 𝑏̅⃗ и 𝑐⃗ образуют *левую тройку* .

*правая тройка*

*левая тройка*

𝑐⃗

𝑎⃗

𝑏̅⃗

𝑐⃗

𝑏̅

𝑎⃗

Всего 6 троек, тройки

→

*abc* ,

→

*bca* и

→

*cab* одинаковой ориентации.

**Определение 6.2.** *Векторным произведением* двух ненулевых векторов 𝑎⃗ и

𝑏̅⃗ называется вектор 𝑐⃗, который:

1) 𝑐⃗ ⊥ 𝑎⃗, 𝑐⃗ ⊥ 𝑏̅⃗;

2) векторы 𝑎⃗, 𝑏̅⃗, с⃗, в указанном порядке, образуют правую тройку;

3) |̅𝑐⃗| = |𝑎̅⃗| ∙ |̅𝑏̅⃗| ∙ sin ̅𝑎̅⃗⋀̅𝑏̅⃗**.** (**6.1**)

Векторное произведение обозначается 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ или [𝑎⃗, 𝑏̅⃗].

𝑘̅⃗

ı⃗ 𝑗⃗

ı⃗ × 𝑗⃗ = 𝑘̅⃗

## Алгебраические свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак: 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ = −(𝑏̅⃗ × 𝑎⃗).

𝑎⃗ × 𝑏̅⃗

𝑏̅⃗

𝑎⃗

𝑏̅⃗ × 𝑎⃗

2) 𝜆 ∙ (𝑎⃗ × 𝑏̅⃗) = (𝜆𝑎⃗) × 𝑏̅⃗ = 𝑎⃗ × (𝜆𝑏̅⃗)

Доказательство.

а) Если *a*  *b*

или   0

очевидно

б) (*a*  *b*)    *a*  *b* sin(*a*;*b*)

*a*  *b*    *a*  *b* sin(*a*;*b*)

3) *a*  *a*  0

→ →

sin(*a*;*b*)  sin(*a*;*b*)

*a*  *b*   *a*  *b*

для 

4) (𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) × 𝑐⃗ = 𝑎⃗ × 𝑐⃗ + 𝑏̅⃗ × 𝑐⃗

*Доказательство*.

→

Пусть

*a*  0

̅𝑐0⃗

𝑎⃗

*O*

*A*

*A1*

*σ*

*A2*

→ - орт вектора *c* , перпендикулярного к плоскости  .

0

*c*

*OA*1 - проекция *OA* на плоскость  .

*OA*2

повернули *OA*1

на 90º по часовой стрелки.

Покажем, что *OA*2

0

→

*c*

 → →0

* 1. *OA*2

*a*  *c*

 *OA*1

 *a* cos(90

∘   ) 

*a* sin  →

* 1. *OA*2

*c*

→

*a* , *OA*2



→

 →0

→ →

0

* 1. *a*,*c*

,*OA*2

правая тройка.

̅𝑐0⃗

*C*

𝑏

̅⃗

*O*

*A2*

𝑎⃗

*C1*

*A1 B2 C2*

*σ*

*OA*2 *OB*2

 → →0

 *b*  →0

*c*

*a*  *c*

*OC*  →  *b* )  →0

2 (*a c*

*OC*2  *OA*2  *OB*2

→ →0

*a*  *c*

(*a*  *b* )  *c*

 → →0

 *b*  →0 ,

→

*c*

→ → →0

умножим равенство на

*c* , тогда *c*  *c*  *c* .

## Геометрические свойства векторного произведения

1. *Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов*:

→ →

*a*  *b*  0  *a*  *b* .

Доказать самостоятельно **!**

# → → →

1. Если *a*  *c* и *b*  *c* , то *c*  *a*  *b* .

с⃗

1. Модуль векторного произведения векторов 𝑎⃗ и 𝑏̅⃗ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

𝑏̅⃗

𝑎⃗

𝑎⃗ × 𝑏̅

(**6.2**)

𝑏̅⃗

𝑆 = |𝑎⃗ × 𝑏̅ |

𝑎⃗

## Механический смысл векторного произведения

Если 𝐹⃗ – сила, приложенная к точке *М*, а вектор 𝑏̅⃗ идет из некоторой точки *О* в точку *М*, то вектор 𝑏̅⃗ × 𝐹⃗ – момент силы 𝐹⃗ относительно точки *О*.

𝑀̅⃗ = 𝑏̅⃗ × 𝐹⃗

𝑏̅

*M*

𝐹⃗

*O*

**Векторное произведение векторов, заданных координатами** Если известны координаты векторов 𝑎⃗ = {𝑥1; 𝑦1; 𝑧1} и

ı⃗ 𝑗⃗ 𝑘̅⃗

𝑏̅⃗ = {𝑥2; 𝑦2; 𝑧2}, то: 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ = |𝑥1 𝑦1 𝑧1| (**6.3.**)

𝑥2 𝑦2 𝑧2

*Доказательство*.

𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ = (𝑥1ı⃗ + 𝑦1𝑗⃗ + 𝑧1𝑘̅⃗) × (𝑥2ı⃗ + 𝑦2𝑗⃗ + 𝑧2𝑘̅⃗)

Используем алгебраические свойства векторного произведения, раскроем скобки.

ı⃗ × ı⃗ = ̅0⃗ ı⃗ × 𝑗⃗ = 𝑘̅⃗ ı⃗ × 𝑘̅⃗ = −𝑗⃗

|𝑗⃗ × ı⃗ = −𝑘̅⃗ 𝑗⃗ × 𝑗⃗ = ̅0⃗ 𝑗⃗ × 𝑘̅⃗ = ı⃗ |

𝑘̅⃗ × ı⃗ = 𝑗⃗ 𝑘̅⃗ × 𝑗⃗ = −ı⃗ 𝑘̅⃗ × 𝑘̅⃗ = 0̅⃗

𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ = 𝑥1𝑦2ı⃗ × 𝑗⃗ + 𝑥1𝑧2ı⃗ × 𝑘̅⃗ + 𝑦1𝑥2𝑗⃗ × ı⃗ + 𝑦1𝑧2𝑗⃗ × 𝑘̅⃗ +

+𝑧1𝑥2𝑘̅⃗ × ı⃗ + 𝑧1𝑦2𝑘̅⃗ × 𝑗⃗ =

= (𝑥1𝑦2 − 𝑦1𝑥2)𝑘̅⃗ + (𝑧1𝑥2 − 𝑥1𝑧2)𝑗⃗ + (𝑦1𝑧2 − 𝑧1𝑦2)ı⃗ =

𝑦1 𝑧1

𝑥1 𝑧1

𝑥1 𝑦1 ̅⃗

ı⃗ 𝑗⃗ 𝑘̅⃗

= │𝑦2 𝑧2│ ⋅ ı⃗ − │𝑥2 𝑧2│ ⋅ 𝑗⃗ + │𝑥2 𝑦2│ ⋅ 𝑘 = |𝑥1 𝑦1 𝑧1|

𝑥2 𝑦2 𝑧2

**Замечание 6.1.** При вычислении определителя удобно вычислять разложением определителя по первой строке.

## Применение векторного произведения

1. Нахождение площади параллелограмма 𝑆 = |𝑎⃗ × 𝑏̅⃗|

𝑎⃗

𝑏̅

треугольника 𝑆 = 1 |𝑎⃗ × 𝑏̅⃗| (**6.4.**)

2

𝑎⃗

𝑏̅⃗

1. Нахождение высоты треугольника и высоты параллелограмма:

|𝑎⃗ × 𝑏̅⃗|

ℎ = |𝑎⃗|

(6. 5. )

𝑎⃗

𝑏̅

Доказать самостоятельно **!**

**Пример 6.1.** Найти |(2𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) × (𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗)|, если |𝑎⃗| = 2, |𝑏| = 3, 𝑎⃗⋀𝑏̅⃗ = 5ℎ.

6

*Решение*.

|(2𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) × (𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗)| = |2𝑎⃗ × 𝑎⃗ − 6𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ + 𝑏̅⃗ × 𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗ × 𝑏̅⃗| =

= |−6𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ − 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗| = |−7𝑎⃗ × 𝑏̅⃗| = |−7| ∙ |𝑎⃗ × 𝑏̅⃗| = 7|𝑎⃗||𝑏̅⃗| sin 𝑎⃗⋀𝑏̅⃗

1

= 7 ∙ 2 ∙ 3 ∙ 2 = 21

*Ответ:* 21.

**Пример 6.2.** Найти (2𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) × (𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗) и |(2𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) × (𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗)|, если

𝑎⃗ = {2; −1; 3}, 𝑏̅⃗ = {0; 4; −2}.

*Решение*. Найдём векторы (2𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) и (𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗):

(2𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) = 2 ∙ {2; −1; 3} + {0; 4; −2} = {4; −2; 6} + {0; 4; −2} = {4; 2; 4};

(𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗) = {2; −1; 3} − 3 ∙ {0; 4; −2} = {2; −1; 3} − {0; 12; −6} =

{2; −13; 9}

ı⃗ 𝑗⃗ 𝑘̅⃗ (2𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) × (𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗) = {4; 2; 4} × {2; −13; 9} = |4 2 4| =

2 −13 9

= ı⃗ ⋅ │ 2 4│ − 𝑗⃗ ⋅ │4 4│ + 𝑘̅⃗ ⋅ │4 2 │ =

−13 9 2 9 2 −13

= (18 + 52) ⋅ ı⃗ − (36 − 8) ⋅ 𝑗⃗ + (−52 − 4) ⋅ 𝑘̅⃗ = 70ı⃗ − 28𝑗⃗ − 56𝑘̅⃗.

|(2𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) × (𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗)| = |{70; −28; −56}| =

= √702 + (−28)2 + (−56)2 = √8820 = 42√5.

*Ответ:* (2𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) × (𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗) = {70; −28; −56},

|(2𝑎⃗ + 𝑏̅⃗) × (𝑎⃗ − 3𝑏̅⃗)| = 42√5.

**Пример 6.3.** Найти вектор 𝑝⃗, перпендикулярный к векторам 𝑎⃗ = {4; −3; 2}

и 𝑏̅⃗ = {1; 0; 2}, если известно, что |𝑝⃗| = 18 и угол между вектором 𝑝⃗ и осью

𝑂𝑥 – острый.

*Решение.* 𝑝⃗ ∥ (𝑎⃗ × 𝑏̅⃗)

ı⃗ 𝑗⃗ 𝑘̅⃗

̅⃗

−3 2

4 2 ̅⃗

4 −3

𝑎⃗ × 𝑏 = |4 −3 2| = ı⃗ ⋅ │

0 2

1 0 2

│ − 𝑗⃗ ⋅ │

1 2

│ + 𝑘 ⋅ │ │

1 0

= −6ı⃗ − 6𝑗⃗ + 3𝑘̅⃗.

𝑝⃗ = {−6𝜆; −6𝜆; 3𝜆}. По условию |𝑝⃗| = 18,

|𝑝⃗| = √(−6𝜆)2 + (−6𝜆)2 + (3𝜆)2 = √81𝜆2 = 9|𝜆| = 18.

|𝜆| = 2 ⇒ 𝜆1 = 2, 𝜆2 = −2.

𝑝⃗1 = {−12; −12; 6}, 𝑝⃗2 = {12; 12; −6}.

Вектор 𝑝⃗1 не подходит, т. к. по условию угол между вектором 𝑝⃗ и осью 𝑂𝑥 – острый, т. е. координата *x* должна быть положительной.

Таким образом, искомый вектор 𝑝⃗ = {12; 12; −6}.

*Ответ:* 𝑝⃗ = {12; 12; −6}.

**Пример 6.4.** Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах

(𝑎⃗ − 2𝑏̅⃗) и (3𝑎⃗ + 𝑏̅⃗), если |𝑎⃗| = |𝑏̅⃗| = 5, 𝑎⃗⋀𝑏̅⃗ = 𝜋⁄4. *Решение.*

𝑆 = 1 |(𝑎⃗ − 2𝑏̅⃗) × (3𝑎⃗ + 𝑏̅⃗)|.

Δ

2

𝑆 = 1 |3 𝑎⃗ × 𝑎⃗ + 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ − 6 𝑏̅⃗ × 𝑎⃗ − 2 𝑏̅⃗ × 𝑏̅⃗| = 1 |𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ + 6 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗| =

Δ 2 2

= 1 |7 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗| = 7 | 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗| = 7 | 𝑎⃗||𝑏̅⃗| sin 𝑎⃗⋀𝑏̅⃗ = 7 ⋅ 5 ⋅ 5 ⋅ √2 = 175√2.

2 2 2 2 2 4

*Ответ:* 𝑆 = 175√2.

Δ

4

**Пример 7.5.** Найти площадь параллелограмма 𝐴𝐵𝐶𝐷 и длину высоты, опущенную из вершины *В*, если 𝐴 (1; 2; −1), 𝐵 (3; 4; −2), 𝐶 (5; 5; 1),

𝐷 (3; 3; 2).

𝐵 (3; 4; − 2) 𝐶 (5; 5; 1)

𝑆 = |

̅𝐵̅⃗ ×

̅𝐷̅⃗|

𝐴 (1; 2; −1)

𝐷 (3; 3; 2)

̅𝐵̅⃗ = {2; 2; −1}, ̅𝐴̅𝐷̅⃗ = {2; 1; 3}.

̅⃗ ̅⃗

ı⃗ 𝑗⃗ 𝑘̅⃗

2 −1

2 −1

̅⃗ 2 2

𝐴𝐵 × 𝐴𝐷 = |2 2 −1| = ı⃗ ⋅ │

│ − 𝑗⃗ ⋅ │

│ + 𝑘 ⋅ │ │ =

= 7ı⃗ − 8𝑗⃗ − 2𝑘̅⃗.

2 1 3

1 3 2 3 2 1

𝑆 = |𝐴

|̅𝐴

̅𝐵̅⃗ × 𝐴

̅𝐵̅⃗ × ̅𝐴

̅𝐷̅⃗| = √72 + (−8)2 + (−2)2 = √117 = 3√13.

̅𝐷̅⃗|

ℎ = |̅

̅𝐷̅⃗|

| ̅𝐷̅⃗| = √4 + 1 + 9 = √14,

ℎ = 3√13

√14

## §7. Cмешанное произведение

**Определение 7.1.** Число равное 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ ∙ с⃗ называется векторно-скалярным или смешанным произведением трех векторов.

Обозначение 𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗ или (𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗).

𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗ = 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ ∙ с⃗ (**7.1.**)

## Геометрические свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение 𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах ̅𝑎̅⃗, 𝑏̅⃗, с⃗, взятому со знаком «+», если тройка 𝑎̅⃗, 𝑏̅⃗, с⃗

– правая и со знаком «–», если тройка левая. *Доказательство*.

с⃗

𝜑 𝑏̅⃗

𝑎⃗

𝑎⃗ × 𝑏̅

𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗ = 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ ∙ с⃗ = |𝑎⃗ × 𝑏̅⃗| ∙ |с⃗| ∙ 𝑐o𝑠𝜑 = 𝑆𝑘арал. ∙ 𝑘р𝑎̅⃗×𝑏̅⃗с⃗ =

= 𝑆𝑘арал. ∙ (±ℎ) = ±𝑉

1. *Необходимое и достаточное условие компланарности векторов*: Смешанное произведение 𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗ = 0 тогда и только тогда, когда векторы

𝑎⃗, 𝑏̅⃗, с⃗ – компланарны.

## Алгебраические свойства смешанного произведения

1) 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ ∙ с⃗ = 𝑎⃗ ∙ 𝑏̅⃗ × с⃗

*Доказательство*.

𝑎⃗ ∙ 𝑏̅⃗ × с⃗ = 𝑏̅⃗ × с⃗ ∙ 𝑎⃗

𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ ∙ с⃗ = 𝑉𝑘арал.

𝑏̅⃗ × с⃗ ∙ 𝑎⃗ = 𝑉𝑘арал. Тройки одинаковой ориентации.

1. Круговая перестановка трех сомножителей смешанного произведения

не меняет его величины: 𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗=𝑏̅⃗с⃗𝑎⃗ = с⃗𝑎⃗𝑏̅⃗.

1. Перестановка двух соседних сомножителей меняет знак смешанного произведения: 𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗=−𝑏̅⃗𝑎⃗с⃗ = с⃗𝑎⃗𝑏̅⃗.

4) 𝑎⃗𝑏̅⃗𝑎⃗=0.

## Смешанное произведение векторов, заданных координатами

Если известны координаты векторов 𝑎⃗ = {𝑥1; 𝑦1; 𝑧1}, 𝑏̅⃗ = {𝑥2; 𝑦2; 𝑧2} и

𝑥1 𝑦1 𝑧1

с⃗ = {𝑥3; 𝑦3; 𝑧3}, то: 𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗ = |𝑥2 𝑦2 𝑧2| (**7.3.**)

𝑥3 𝑦3 𝑧3

*Доказательство*.

𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗ = 𝑎⃗ × 𝑏̅⃗ ∙ с⃗ = {│𝑦1 𝑧1│ ; − │𝑥1 𝑧1│ ; │𝑥1 𝑦1 │} ∙ {𝑥

; 𝑦

; 𝑧 } =

𝑦1 𝑧1

𝑥1 𝑧1

𝑦2 𝑧2

𝑥2 𝑧2

𝑥1 𝑦1

𝑥2 𝑦2 3 3 3

𝑥1 𝑦1 𝑧1

= │𝑦2 𝑧2│ ∙ 𝑥3 − │𝑥2 𝑧2│ ∙ 𝑦3 + │𝑥2 𝑦2│ ∙ 𝑧3 = |𝑥2 𝑦2 𝑧2|.

𝑥 𝑦 𝑧

3 3 3

## Применение смешанного произведения

1. Нахождение объемов параллелепипеда 𝑉 = |𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗| (**7.4**)

с⃗

𝑏̅⃗

𝑎⃗

тетраэдра 𝑉 = 1 |𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗| (**7.5.**)

6

с⃗

𝑏̅⃗

𝑎⃗

1. Нахождение высоты параллелепипеда и высоты тетраэдра:

|𝑎⃗𝑏̅ с⃗|

с⃗

𝑏̅⃗

𝑎⃗

ℎ = |𝑎⃗ × 𝑏̅⃗| (7. 6. )

Доказать самостоятельно **!**

**Пример 7.1.** В пространстве даны четыре точки 𝐴 (1; 1; 1), 𝐵 (4; 4; 4),

𝐶 (3; 5; 5), 𝐷 (2; 4; 7). Найти объем тетраэдра *АВСD*. *Решение*.

*D*

с⃗

𝑏̅⃗

𝑎⃗

*B*

*A*

*C*

Образуем три вектора с началом в одной точка *A*.

𝐴̅𝐶̅⃗ = 𝑎⃗ = {2; 4; 4},

𝐴̅ ̅𝐵̅⃗ = 𝑏̅⃗ = {3; 3; 3}

̅𝐷̅⃗ = 𝑐⃗ = {1; 3; 6}

Объем тетраэдра находим по формуле (7.5.) 𝑉 = 1 |𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗|

6

Вычислим 𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗ по формуле (7.3.)

2 4 4

𝑎⃗𝑏̅⃗с⃗ = |3 3 3| = 2 ∙ 9 − 4 ∙ 15 + 4 ∙ 6 = −18

1 3 6

𝑉 = 1 | ̅⃗ | 1 | |

6 𝑎⃗𝑏с⃗ = 6 ∙ −18 = 3

*Ответ*: 𝑉 = 3.

**Замечание 7.1.** Иногда для решения задачи удобно ввести систему координат.

**Пример 7.2.** В прямоугольном треугольнике катеты *СА* и *СВ* равны 6 и 8 соответственно. Найти угол между медианами *АМ* и *BN*.

*Решение*.

*A*

*y*

𝑎⃗ 𝑏̅⃗

*B*

*N*

*x*

*C M*

𝐵 (8; 0), 𝐴 (0; 6), 𝑀 (4; 0), 𝑁 (0; 3),

𝐴̅𝑀̅⃗ = 𝑎⃗ = {4; −6}

𝐵̅𝑁̅⃗ = 𝑏̅⃗ = {−8; 3}

|𝑎⃗ ∙ 𝑏̅⃗|

|−32 − 18|

50 25

𝑐o𝑠𝜑 = |𝑎⃗| ∙ |𝑏̅⃗| = √16 + 36 ∙ √64 + 9 = 2√13 ∙ √73 = √949

𝜑 = 𝑎𝑟𝑐𝑐o𝑠 25

√949

*Ответ*: 𝜑 = 𝑎𝑟𝑐𝑐o𝑠 25 .

√949

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**§1. Основные понятия аналитической геометрии на плоскости.**

## ГМТ. Линия и ее уравнения

Аналитическая геометрия изучает геометрические формы аналитическим методом. В основе которого лежит метод координат.

Начальная геометрическая форма – точка. В декартовой системе координат каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел (координат точки) и наоборот, каждой паре чисел соответствует определенная точка на плоскости, т.е. устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством точек на плоскости и множеством пар действительных чисел.

Линия на плоскости часто задаётся как *множество точек*, обладающих некоторым только им присущим *геометрическим* свойством (*геометрическое место точек* ГМТ).

Положение линии на плоскости определяется с помощью уравнения (то есть равенства, связывающего координаты точек линии).

**Определение 1.1.** *Уравнением линии (или кривой)* на плоскости 𝑂𝑥𝑦 называется такое уравнение 𝐹(𝑥; 𝑦) = 0 с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты *x* и *y* каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии. *x* и *y* называются текущими координатами.

**Замечание 1.1.** Каждой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение 𝐹(𝑥; 𝑦) = 0, но не всякое уравнение 𝐹(𝑥; 𝑦) = 0 задаёт линию на плоскости.

## Особые виды уравнений линии

* 1. Уравнение содержит только одну из текущих координат

𝑦2 − 5𝑦 + 4 = 0 определяет две прямые 𝑦 = 1 и 𝑦 = 4.

*x*

*y*

4

1

0

* 1. Левая часть уравнения 𝐹(𝑥; 𝑦) разлагается на множители, т.е. получаем несколько новых уравнений.

𝑦2 − 𝑥2 = 0*,* (𝑦 − 𝑥)(𝑦 + 𝑥) = 0, 𝑦 − 𝑥 = 0 или 𝑦 + 𝑥 = 0

*y*

0

*x*

* 1. Уравнению 𝐹(𝑥; 𝑦) = 0 удовлетворяет лишь координаты конечного числа точек.

𝑥2 + 𝑦2 = 0 – точка (0;0)

(𝑥2 − 1)2 + (𝑦2 − 4)2 = 0 – 4 точки (1;2), (–1;2), (1; –2), (–1; –2).

* 1. Уравнение 𝐹(𝑥; 𝑦) = 0 не определяет ни одной точки плоскости

𝑥2 + 𝑦2 = −1 мнимое место точек.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием её уравнения. Так, для того, чтобы проверить лежит ли точка

𝑀(𝑥0; 𝑦0) на данной линии, достаточно проверить, удовлетворяют ли координаты точки 𝑀 уравнению этой линии в выбранной системе координат. А задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями 𝐹1(𝑥; 𝑦) = 0 и

𝐹2(𝑥; 𝑦) = 0, сводится к отысканию точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих линий, то есть сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

{ 𝐹1(𝑥; 𝑦) = 0,

𝐹2(𝑥; 𝑦) = 0.

Если эта система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются.

**§2. Параметрическое представление линии** Текущие координаты выражены через вспомогательную переменную *t*

(параметр). Можно исключить параметр *t* и перейти к уравнению 𝐹(𝑥; 𝑦) = 0.

𝑥 = 𝜑(𝑡),

{

𝑦 = ƒ(𝑡).

## Примеры.

𝑥 = 𝑅cos𝑡,

1) {

𝑦 = 𝑅sin𝑡.

𝑥2 + 𝑦2 = 𝑅2.

𝑡 = ∠(

̅𝑀̅⃗; 𝑂X)

*y*

0

*x*

1. Циклоида – траектория точки, лежащей на окружности радиуса *a*, которая катится по прямой.

𝑥 = 𝑎(𝑡 − sin𝑡),

{

𝑦 = 𝑎(1 − cos𝑡).

*x*

*y*

2*a*

0

*πa*

*2πa*

1. Астроида

{ 𝑥 = 𝑎cos3𝑡,

𝑦 = 𝑎sin3𝑡.

𝑥2/3 + 𝑦2/3 = 𝑅2/3.

*x*

*a*

*y*

*a*

0

*-a*

1. Петля

{ 𝑥 = 𝑡2,

𝑦 = 𝑡(1 − 𝑡2).

Найдем точки пересечения петли с осями координат 𝑡 = 0, 𝑡 = ±1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t* | –2 | –1 | − 1  2 | 0 | 1  2 | 1 | 2 |
| *x* | 4 | 1 | 1  4 | 0 | 1  4 | 1 | 4 |
| *y* | 6 | 0 | − 3  8 | 0 | 3  8 | 0 | –6 |

*x*

*y*

𝑦 = ƒ(𝑥) ⇔ { 𝑥 = 𝑡,

𝑦 = ƒ(𝑡).

## §3. Уравнение линии в полярных координатах *M*(*φ*;*ρ*)

*0* 1 *P*



*φ*

*M*

1

*M*2

*О* – полюс, *ОP* – полярная ось, *φ* – полярный угол.

|ОМ| = 𝜌 – полярный радиус, 𝜌 ≥ 0. (𝜑; 𝜌) – полярные координаты.

𝑀1(𝜋; 1), 𝑀2 (− ℎ ; 2).

4

Координатные линии: 𝜑 = 𝑐o𝑘𝑠𝑡 – лучи

𝜌 = 𝑐o𝑘𝑠𝑡 – окружности

## Связь декартовых координат и полярных

*y*

*M*(*φ*;*ρ*)

*ρ*

*φ y*

0

*x*

*x P*

𝑥 = 𝜌𝑐o𝑠𝜑,

{ {

𝑦 = 𝜌𝑠i𝑘𝜑.

𝜌 = √𝑥2 + 𝑦2,

𝑡𝑔𝜑 = 𝑦 .

S

## Примеры.

1) Кардиоида 𝜌 = 𝑎(1 + 𝑐o𝑠𝜑)

*P*

*0*

*a*

1. Спираль Архимеда 𝜌 = 𝑎𝜑

*P*

*0*

1. Лемниската Бернулли

𝜌 = 𝑎√𝑐o𝑠2𝜑

𝜌 = 𝑎√𝑠i𝑘2𝜑

(𝑥2 + 𝑦2)2 = 𝑎2(𝑥2 − 𝑦2) (𝑥2 + 𝑦2)2 = 2𝑎2𝑥𝑦 Построить самостоятельно **!**

1. k – лепестковые розы Гранди

𝜌 = 𝑎𝑐o𝑠𝑘𝜑*,*

𝜌 = 𝑎𝑠i𝑘𝑘𝜑

𝜌 = 2𝑠i𝑘3𝜑

D(ρ): 𝑠i𝑘3𝜑 ≥ 0 ⇒ 0 + 2𝜋𝑘 ≤ 3𝜑 ≤ 𝜋 + 2𝜋𝑘 ⇒ 2ℎ𝑛 ≤ 𝜑 ≤ ℎ + 2ℎ𝑛 , 𝑘 = 0,1,2

3 3 3

𝑘 = 0: 0≤ 𝜑 ≤ ℎ

3

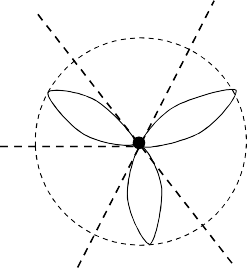
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 𝜑 | 0 | 𝜋  6 | 𝜋  3 |
| 𝜌 | 0 | 2 | 0 |

𝑘 = 1: 2ℎ ≤ 𝜑 ≤ 𝜋

3

𝑘 = 2: 4ℎ ≤ 𝜑 ≤ 5ℎ

3 3

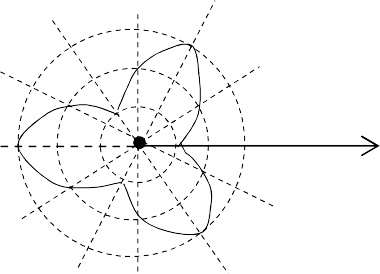
*P*

*0*

5) Розетки 𝜌 = 2 − 𝑐o𝑠3𝜑. D(ρ): 𝜑 ∈ 𝑅

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3𝜑 | 0 | 𝜋  2 | 𝜋 | 3𝜋  2 | 2𝜋 |
| 𝜑 | 0 | 𝜋  6 | 𝜋  3 | 𝜋  2 | 2𝜋  3 |
| 𝜌 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |

*P*



*0*

## §4. Прямая линия на плоскости

* 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку 𝑀0(𝑥0; 𝑦0), перпендикулярно заданному вектору 𝑘̅⃗ = {𝐴; 𝐵} (вектор нормали)

**Определение 4.1.** *Нормальным вектором* (*нормалью*) прямой называется всякий ненулевой вектор 𝑘̅⃗, перпендикулярный данной прямой.

*Решение.*

*y*

*M0*

𝑘̅⃗

0

*M*

*x*

Пусть точка *М*(*x*;*y*) c текущими координатами принадлежит прямой,

̅0̅𝑀̅⃗ = {𝑥 − 𝑥0; 𝑦 − 𝑦0}, 𝑘̅⃗ = {𝐴; 𝐵}

̅0̅𝑀̅⃗ ⊥ ̅𝑘⃗ ⟺ 𝑀̅0̅𝑀̅⃗ ∙ 𝑘̅⃗ = 0

𝐴 ∙ (𝑥 − 𝑥0) + 𝐵 ∙ (𝑦 − 𝑦0) = 0 (**4.1)**

Уравнение 4.1. называют уравнением прямой, *проходящей через данную точку*

𝑀0(𝑥0; 𝑦0)*, перпендикулярно заданному вектору* 𝑘̅⃗ = {𝐴; 𝐵} .

𝐴 ∙ 𝑥 + 𝐵𝑦 − 𝐴𝑥0 − 𝐵𝑦0 = 0

Пусть ̅𝑟̅0⃗ = {𝑥0; 𝑦0} радиус вектор точки 𝑀0, тогда −𝐴𝑥0 − 𝐵𝑦0 = −𝑘̅⃗ ∙ ̅𝑟̅0⃗

Обозначим −𝐴𝑥0 − 𝐵𝑦0 = −𝑘̅⃗ ∙ 𝑟̅0⃗ = С

𝐴 ∙ 𝑥 + 𝐵𝑦 + С = 0 (**4.2**)

Уравнение (4.2.) называется *общее уравнение прямой*. **Теорема 4.1.** Всякое уравнение первой степени

𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶 = 0, |𝐴| + |𝐵| ≠ 0

задаёт на плоскости некоторую прямую. И обратно, каждой прямой на плоскости соответствует некоторое уравнение вида 4.2.

*Доказательство*.

Докажем, что 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶 = 0 задает прямую. Пусть точка 𝑀0(𝑥0; 𝑦0)

принадлежит ГМТ, т.е. 𝐴𝑥0 + 𝐵𝑦0 + 𝐶 = 0 ⇒ 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 − 𝐴𝑥0 − 𝐵𝑦0 = 0 ⇒

𝐴(𝑥 − 𝑥0) + 𝐵(𝑦 − 𝑦0) = 0 задает прямую линию на плоскости.

Прямую линию можно задать, как множество концов векторов плоскости, выходящих из данной точки 𝑀0(𝑥0; 𝑦0) 𝑘ер𝑘ендикулярно данному вектору 𝑘̅⃗ =

{𝐴; 𝐵}.

𝐴 ∙ (𝑥 − 𝑥0) + 𝐵 ∙ (𝑦 − 𝑦0) = 0, обозначим −𝐴𝑥0 − 𝐵𝑦0 = −𝑘̅⃗ ∙ ̅𝑟̅0⃗ = С ⇒

𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶 = 0.

**Замечание 4.2.** Коэффициенты 𝐴 и 𝐵, стоящие в общем уравнении прямой перед переменными 𝑥 и 𝑦 являются координатами нормального вектора данной прямой. То есть, из уравнения 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶 = 0 следует, что существует вектор 𝑘̅⃗ с координатами {𝐴; 𝐵}, который перпендикулярен данной прямой. Число 𝐶 в уравнении прямой, называется свободным членом.

Например, если прямая *l* задана уравнением 2𝑥 − 3𝑦 − 7 = 0, то её нормальный вектор 𝑘̅⃗ = {2; −3}, а свободный член С = −7.

В зависимости от равенства нулю тех или иных коэффициентов в общем уравнении прямой, получают, так называемые, *неполные уравнения прямой*.

## Неполные уравнения прямой

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶 = 0, |𝐴| + |𝐵| ≠ 0 | | | | | |
| № | *A* | *B* | *C* | Уравнение | Описание |
| 1 | ≠ 0 | ≠ 0 | O | 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 = 0 | Прямая проходит через начало координат,  так как координаты (0; 0) удовлетворяют уравнению. |
| 2 | **0** | ≠ 0 | ≠ 0 | 𝐵𝑦 + 𝐶 = 0  или  𝑦 = − 𝐶  𝐵 | Прямая параллельна оси *Ox*. |
| 3 | ≠ 0 | **0** | ≠ 0 | 𝐴𝑥 + 𝐶 = 0  или  𝑥 = − 𝐶  𝐴 | Прямая параллельна оси *Oy*. |
| 4 | **0** | ≠ 0 | **0** | 𝑦 = 0 | Координатная ось *Ox*. |
| 5 | ≠ 0 | **0** | **0** | 𝑥 = 0 | Координатная ось *Oy*. |

* 1. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки 𝑀1(𝑥1; 𝑦1) и

𝑀2(𝑥2; 𝑦2).

*l*

𝑀1(𝑥1; 𝑦1)

𝑀(𝑥; 𝑦)

𝑀2(𝑥2; 𝑦2)

Векторы

̅1̅𝑀̅⃗ = {𝑥 − 𝑥1; 𝑦 − 𝑦1} и

̅1̅𝑀

̅2⃗ = {𝑥2 − 𝑥1; 𝑦2 − 𝑦1} коллинеарны,

так как они лежат на одной прямой. Следовательно, их координаты должны быть пропорциональны, то есть:

S−S1

S2−S1

= 𝑦−𝑦1 . (**4.3**)

𝑦2−𝑦1

Формулу 4.3. называют *уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.*

* 1. Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку 𝑀0(𝑥0; 𝑦0) параллельно заданному вектору 𝑠⃗ = {𝑚; 𝑘}, |𝑚| + |𝑘| ≠ 0 (направляющий вектор).

**Определение 4.3.** *Направляющим вектором* прямой называется всякий ненулевой вектор 𝑠⃗, параллельный данной прямой.

*Решение.* Пусть 𝑀(𝑥; 𝑦) – текущая точка прямой.

*l*



𝑀(𝑥; 𝑦)

𝑀0(𝑥0; 𝑦0)

Векторы 𝑀

̅0̅𝑀̅⃗ = {𝑥 − 𝑥0; 𝑦 − 𝑦0} и 𝑠⃗ = {𝑚; 𝑘} должны быть коллинеарны, то

есть их координаты должны быть пропорциональны:

S−S0 = 𝑦−𝑦0. (**4.4**)

𝑚 𝑛

Уравнение 4.4. называется *каноническим* уравнением прямой или уравнение прямой проходящей через точку 𝑀0(𝑥0; 𝑦0) параллельно вектору 𝑠⃗ = {𝑚; 𝑘}.

S−S0 = 𝑦−𝑦0 = 𝑡 ⟹ {𝑥 = 𝑚𝑡 + 𝑥0

(**4.5**)

𝑚 𝑛

# 𝑦 = 𝑘𝑡 + 𝑦0

Уравнения 4.5. называются *параметрическими* уравнениями прямой.

* 1. Составить уравнение прямой в отрезках. *Решение*.

*x*

*y*

*b*

0

*a*

Пусть прямая пересекает ось *Ox* в точке 𝑀1(𝑎; 0), а ось *Oy* в точке

𝑀2(0; 𝑏).

Вывести самостоятельно !

S + 𝑦 = 1 (**4.6.**)

𝑎 𝑏

Формула 4.6 называется *уравнением прямой в отрезках,* так как числа *a* и *b* указывают, какие отрезки отсекает прямая на координатных осях.

**Определение 4.4.** Углом наклона прямой к оси *Ox* называется наименьший угол 𝛼 (0 ≤ 𝛼 < 𝜋) на который нужно повернуть вокруг точки пересечения прямой и оси *Ox* против часовой стрелки ось *Ox* до её совпадения с прямой

*y*

𝛼

0

*x*

* 1. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом и отрезком 𝑏. *Решение.* Возьмём на прямой текущую точку М(𝑥; 𝑦) .



*y*

*y*

𝑁(0; 𝑏)

𝛼

𝑀(𝑥; 𝑦)

T

*x’*

𝛼

0

*x*

*x*

Проведём через точку 𝑁(0; 𝑏) ось *Nx’* параллельно оси *Ox* и одинаково с ней направленную. Угол *MNT* равен 𝛼 (соответственные углы при параллельных прямых равны). Из прямоугольного треугольника *NTM*:

𝑡𝑔𝛼 = 𝑀𝑇 = 𝑦−𝑏, то есть 𝑦 = 𝑡𝑔𝛼 ∙ 𝑥 + 𝑏.

𝑁𝑇 S

Обозначим tg𝛼 = 𝑘, получим уравнение:

𝑦 = 𝑘𝑥 + 𝑏, (**4.7**)

которому удовлетворяют координаты любой точки 𝑀(𝑥; 𝑦) прямой.

Число 𝑘 = tg𝛼 называется *угловым коэффициентом прямой*, а уравнение

2.7 – *уравнением прямой с угловым коэффициентом и отрезком* 𝑏 *.*

**Замечание 4.5.** Если прямая проходит через начало координат, то 𝑏 = 0 и уравнение принимает вид: 𝑦 = 𝑘𝑥.

Если прямая параллельна оси *Ox*, то tg𝛼 = 𝑘 = 0 и уравнение принимает вид 𝑦 = 𝑏.

Если прямая параллельна оси *Oy*, то 𝛼 = ℎ

2

и 𝑘 = tg𝛼 = 𝑡𝑔 ℎ не

2

существует. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид: 𝑥 = 𝑎, где 𝑎 – абсцисса точки пересечения прямой с осью *Ox*.

* 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку 𝑀0(𝑥0; 𝑦0) с данным угловым коэффициентом 𝑘.

*Решение*.

Возьмём на прямой текущую точку 𝑀(𝑥; 𝑦).

*y*



*y*

𝑦0

𝑀0 𝛼

𝑀(𝑥; 𝑦)

T

𝛼

0 𝑥0 *x x*

Из прямоугольного треугольника 𝑀 𝑇𝑀: tg𝛼 = 𝑘 = 𝑀𝑇 = 𝑦−𝑦0. Отсюда

0 𝑀0𝑇 S−S0

𝑦 − 𝑦0 = 𝑘(𝑥 − 𝑥0). (**4.8**)

Уравнение 4.8 называется уравнением прямой, *проходящей через данную точку* с *данным угловым коэффициентом* 𝑘.

Таблица 4.2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Уравнение прямой и  номер формулы | Название  уравнения | Обозначения |
| 1 | **(4.1)**  𝐴(𝑥 − 𝑥0) + 𝐵(𝑦 − 𝑦0)  = 0 | *уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно заданному вектору* | 𝑀(𝑥; 𝑦) –  текущая точка,  𝑀0(𝑥0; 𝑦0) – заданная точка,  𝑘̅⃗ = {𝐴; 𝐵} – нормальный вектор |
| 2 | (**4.2**)  𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶 = 0 | *общее уравнение прямой* | 𝑀(𝑥; 𝑦) – текущая точка,  𝑘̅⃗ = {𝐴; 𝐵} – нормальный вектор |
| 3 | (**4.4**)  𝑥 − 𝑥0 = 𝑦 − 𝑦0  𝑚 𝑘 | *каноническое уравнение* | 𝑀(𝑥; 𝑦) – текущая точка,  𝑀0(𝑥0; 𝑦0) – заданная точка,  𝑠⃗ = {𝑚; 𝑘} – направляющий  вектор |
| 4 | (**4.3**)  𝑥 − 𝑥1 = 𝑦 − 𝑦1  𝑥2 − 𝑥1 𝑦2 − 𝑦1 | *уравнение прямой, проходящей через две*  *заданные точки.* | 𝑀(𝑥; 𝑦) –  текущая точка,  𝑀1(𝑥1; 𝑦1),  𝑀2(𝑥2; 𝑦2) – заданные точки |
| 5 | (**4.5**)  {𝑥 = 𝑚𝑡 + 𝑥0  𝑦 = 𝑘𝑡 + 𝑦0 | *параметрические уравнения прямой* | 𝑀(𝑥; 𝑦) – текущая точка,  𝑀0(𝑥0; 𝑦0) – заданная точка,  𝑠⃗ = {𝑚; 𝑘} – направляющий вектор, *t* – параметр |
| 6 | (**4.6**)  S + 𝑦 = 1  𝑎 𝑏 | *уравнение прямой в отрезках* | 𝑀(𝑥; 𝑦) –  текущая точка,  (𝑎; 0), (0; 𝑏) –  точки пересечения с осями координат |
| 7 | (**4.7**)  𝑦 = 𝑘𝑥 + 𝑏 | *уравнением прямой с угловым коэффициентом* | 𝑀(𝑥; 𝑦) –  текущая точка,  𝑘 = 𝑡𝑔𝛼 – угловой коэффициент, |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | (0; 𝑏) – точка  пересечения с *Oy* |
| 8 | (**4.8**)  𝑦 − 𝑦0 = 𝑘(𝑥 − 𝑥0) | *уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении* | 𝑀(𝑥; 𝑦) –  текущая точка,  𝑀0(𝑥0; 𝑦0) – заданная точка,  𝑘 = 𝑡𝑔𝛼 – угловой коэффициент |

**7)** Расстояние от точки 𝑀0(𝑥0; 𝑦0) до прямой 𝑙: 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶 = 0.

*x*

*y*

𝑘̅⃗

*M0*

*d*

0

*M*

Пусть 𝑀(𝑥; 𝑦) – текущая точка на прямой, тогда 𝑀̅̅̅̅̅𝑀̅̅̅̅0⃗ = {𝑥0 − 𝑥; 𝑦0 − 𝑦},

𝑘̅⃗ = {𝐴; 𝐵}

𝑑 = |𝑘р

̅𝑀̅̅̅̅𝑀̅̅̅̅⃗| = |̅𝑀̅̅̅̅𝑀̅̅̅̅̅0⃗∙𝑛̅⃗| = |Æ(S0−S)+𝐵( 𝑦0−𝑦)| = |ÆS0+𝐵𝑦0−ÆS−𝐵𝑦|

𝑛̅⃗ 0

|𝑛̅⃗|

√Æ2+𝐵2

√Æ2+𝐵2

Так как точка 𝑀(𝑥; 𝑦) принадлежит прямой, то −𝐴𝑥 − 𝐵𝑦 = С.

𝑑(𝑀 , 𝑙) = |Æ∙S0+𝐵∙𝑦0+𝐶|

0

√Æ2+𝐵2

(**4.9**)

**Определение 4.5.** Отклонением ð точки 𝑀0 от прямой *l* называется +𝑑, если точка 𝑀0 и начало координат *O* лежат по разные стороны от прямой *l* и число – 𝑑, когда 𝑀0 и *O* лежат по одну сторону от прямой *l.*

𝑑 = |ð|, отклонение начала координат всегда <0.

**Замечание 4.6**. Чтобы определить лежат ли точки 𝑀1 и 𝑀2 по одну сторону от прямой 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + С = 0 (\*) или по разные стороны необходимо подставить координаты точек в левую часть уравнения (\*), если результат подстановки одного знака, то по одну сторону, если разного знака, то по разные стороны.

## Пример 4.1.

Даны две прямые 𝑙1: 2𝑥 − 3𝑦 + 5 = 0 , 𝑙2: 3𝑥 + 𝑦 − 1 = 0 и точки

𝐴(1; −1), 𝐵(0; 2), 𝐶(−3; −5), 𝐷(6; 1). Выяснить их взаимное расположение.

ðÆ𝑙1 > 0, ðÆ𝑙2 > 0,

ð𝐵𝑙1 < 0, ð𝐵𝑙2 > 0,

ð𝐶𝑙1 > 0, ð𝐶𝑙2 < 0,

ð𝐷𝑙1 > 0, ð𝐷𝑙2 > 0.

*l*1

*C l*2

*A D*

*B*

**Пример 4.2.** Найти длину высоты *BH* треугольника *ABC*, если 𝐴(−1; 2),

𝐵(2; 5), 𝐶(3; −1).

Длина высоты *BH* равна расстоянию от точки *B* до прямой *AC*. B

A H C



Составим уравнение прямой *AC*, используя уравнение (2.3): S−(−1) =

3−(−1)

𝑦−2 ⇒ S+1 = 𝑦−2

−1−2 4 −3

4𝑦 − 5 = 0.

⇒ −3(𝑥 + 1) = 4(𝑦 − 2) ⇒ 𝐴𝐶: 3𝑥 +

По формуле 2.9:

𝐵𝐻 = 𝑑(𝐵, 𝐴𝐶) = |3 ∙ 2 + 4 ∙ 5 − 5| = 21 = 4,2.

*Ответ:* 𝐵𝐻 = 4,2.

√32 + 42 5

**8)** Расположение прямых на поскости

Рассмотрим две прямые, заданные общими уравнениями:

𝑙1: 𝐴1𝑥 + 𝐵1𝑦 + 𝐶1 = 0 и 𝑙2: 𝐴2𝑥 + 𝐵2𝑦 + 𝐶2 = 0. Для прямой 𝑙1 имеем нормальный вектор 𝑘̅⃗1 = {𝐴1; 𝐵1}, для прямой 𝑙2 имеем нормальный вектор

𝑘̅⃗2 = {𝐴2; 𝐵2}.

Таблица 4.3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Расположение прямых | Условие (формула)  для нормальных векторов  прямых | Условие (формула) для коэффициентов общих уравнений прямых |
| 1 | прямые параллельны:  𝑙1 ∥ 𝑙2 | векторы  𝑘̅⃗1 ∥ 𝑘̅⃗2:  𝐴1 = 𝐵1  𝐴2 𝐵2 | Æ1 = 𝐵1 ≠ 𝐶1 (**4.10**)  Æ2 𝐵2 𝐶2 |
| 2 | прямые совпадают:  𝑙1 ≡ 𝑙2 | векторы  𝑘̅⃗1 и 𝑘̅⃗2 коллинеарны:  𝐴1 = 𝐵1  𝐴2 𝐵2 | Æ1 = 𝐵1 = 𝐶1 (**4.11**)  Æ2 𝐵2 𝐶2 |
| 3 | прямые ортогональны:  𝑙1 ⊥ 𝑙2 | векторы  𝑘̅⃗1 ⊥ 𝑘̅⃗2:  𝑘̅⃗1 ∙ 𝑘̅⃗2 = 0 | 𝐴1 ∙ 𝐴2 + 𝐵1 ∙ 𝐵2 = 0 (**4.12**) |
| 4 | прямые пересекаются под углом 𝜑 | cos 𝜑  = |𝑘̅⃗1 ∙ 𝑘̅⃗2|  |𝑘̅⃗1| ∙ |𝑘̅⃗2| | cos 𝜑 = |Æ1∙Æ2+𝐵1∙𝐵2| (**4.13**)  √Æ2+𝐵2 ∙√Æ2+𝐵2 1 1 2 2 |

Рассмотрим две прямые, заданные уравнениями с угловым коэффициентом:

𝑙1: 𝑦 = 𝑘1𝑥 + 𝑏1 и 𝑙2: 𝑦 = 𝑘2𝑥 + 𝑏2. Для прямой 𝑙1 имеем угловой коэффициент 𝑘1 = 𝑡𝑔𝛼1, для прямой 𝑙2 имеем угловой коэффициент 𝑘2 =

𝑡𝑔𝛼2.

Таблица 4.4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Расположение  прямых | Условие (формула) для  коэффициентов уравнений прямых |
| 1 | прямые параллельны:  𝑙1 ∥ 𝑙2 | 𝑘1 = 𝑘2, 𝑏1 ≠ 𝑏2 (**4.14**) |
| 2 | прямые совпадают:  𝑙1 ≡ 𝑙2 | 𝑘1 = 𝑘2, 𝑏1 = 𝑏2 (**4.15**) |
| 3 | прямые ортогональны:  𝑙1 ⊥ 𝑙2 | 𝑘1 = − 1 (**4.16**)  k2 |
| 4 | прямые пересекаются  под углом 𝜑 | tg 𝜑 = │ k2−k1 │ (**4.17**)  1+k1∙k2 |

*Доказательство* формулы (4.17)

1

*y*

*l*2

𝜑 *l*

0

𝛼1

𝛼2

*x*

𝜑 = 𝛼2 − 𝛼1 ⇒ 𝑡𝑔𝜑 = 𝑡𝑔(𝛼2 − 𝛼1) = 𝑡g𝛼2−𝑡g𝛼1 = k2−k1

1+𝑡g𝛼2∙𝑡g𝛼1 1+k2∙k1

**Пример 4.3.** Найти угол между прямыми 𝑙1: 𝑥 + 2𝑦 − 3 = 0 и

𝑙2: 7𝑥 − 𝑦 − 5 = 0.

*Решение 1.* Для прямой 𝑙1 имеем нормальный вектор 𝑘̅⃗1 = {1; 2}, для прямой 𝑙2 имеем нормальный вектор 𝑘̅⃗2 = {7; −1}. По формуле 2.13 получаем:

cos 𝜑 = |1∙7+2∙(−1)|

= 5 = 5

# = 1 .

√12+22 ∙√72+(−1)2

√5∙√50 5√10

√10

*Ответ:* 𝜑 = 𝑎𝑟𝑐cos 1 .

√10

*Решение 2.* Зададим прямые 𝑙1 и 𝑙2 уравнениями с угловым

коэффициентом: 𝑙1: 𝑦 = − 1 𝑥 + 3; 𝑙2: 𝑦 = 7𝑥 − 5. Для прямой 𝑙1 имеем

2 2

угловой коэффициент 𝑘1 = − 1, для прямой 𝑙2 имеем угловой коэффициент

2

𝑘2 = 7. Тогда по формуле 2.17 получаем:

1. −k

7−(−1)

15/

# tg 𝜑 = │ 2 1 │ = | 2 | = | 2| = 3.

1+k1∙k2

2

*Ответ*: 𝜑 = 𝑎𝑟𝑐𝑡𝑔 3.

1+(−1)∙7

−5/2

**Пример 4.4.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку

𝑀(5; −1) а) параллельно прямой 𝑙: 2 𝑥 − 𝑦 + 1 = 0, б) перпендикулярно прямой 𝑙: 2 𝑥 − 𝑦 + 1 = 0.

1. *l*

2

→

𝑛

*M*

*l*1

a) Вектор 𝑘̅⃗{2; −1} – вектор нормали

𝑙1: 𝑀(5; −1), 𝑘̅⃗{2; −1} используем уравнение 𝐴(𝑥 − 𝑥0) + 𝐵(𝑦 − 𝑦0) = 0 2(𝑥 − 5) − (𝑦 + 1) = 0 или 2𝑥 − 𝑦 − 11 = 0.

б) 𝑙2: 𝑀(5; −1), 𝑠⃗{2; −1} используем уравнение S−S0 = 𝑦−𝑦0

𝑚 𝑛

S−5 = 𝑦+1 ⇒ −𝑥 + 5 = 2𝑦 + 2 или 𝑥 + 2𝑦 − 3 = 0.

2 −1

**Пример 4.5.** Даны уравнения сторон прямоугольника 𝑥 − 4𝑦 − 2 = 0, 4 𝑥 + 𝑦 − 3 = 0 и одна из его вершин (1; 4). Найти площадь прямоугольника.

𝑆 = 𝑑1 ∙ 𝑑2 , 𝑑1 = |Æ∙S0+𝐵∙𝑦0+𝐶| = |1−16−2|

= 17

# = √17

√Æ2+𝐵2

√12+(−4)2

√17

𝑑2 = |Æ∙S0+𝐵∙𝑦0+𝐶| = |4+4−3| = 5

√Æ2+𝐵2

√42+12

√17

# 𝑆 = 𝑑 ∙ 𝑑 = √17 ∙ 5 = 5

√17

1 2

**Пример 4.7.** Луч света направлен по прямой 𝑥 − 2𝑦 + 5 = 0. Дойдя до прямой 4𝑥 − 2𝑦 − 4 = 0 луч от нее отразился. Составить уравнение прямой на которой лежит отраженный луч.

*k*1 *l*



=0,5

*k*3

*k*2 =2 *А*

Решить самостоятельно **!** Ответ: 11𝑥 − 10𝑦 + 17 = 0.

## §5. Геометрия в пространстве. Поверхности и линии.

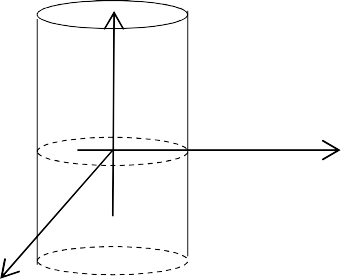
ГМТ в пространстве: поверхность и линия. Уравнение поверхности: 𝐹(𝑥; 𝑦; 𝑧) = 0.

Уравнение линии: {𝐹1(𝑥; 𝑦; 𝑧) = 0,

𝐹2(𝑥; 𝑦; 𝑧) = 0.

Например. 𝑥2 + 𝑦2 = 𝑅2 на плоскости задает окружность. В пространстве – цилиндрическая поверхность.

*x*



*z*

0

*L*

*y*

𝐿: {𝑥2 + 𝑦2 = 𝑅2,

𝑧 = 0.

Ось *OX*: {𝑦 = 0,

𝑧 = 0.

## §7. Плоскость

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку

𝑀0(𝑥0; 𝑦0; 𝑧0), перпендикулярно заданному вектору 𝑘̅⃗ = {𝐴; 𝐵; 𝐶} (вектор нормали)

**Определение 7.1.** *Нормальным вектором* (*нормалью*) плоскости называется всякий ненулевой вектор 𝑘̅⃗, перпендикулярный данной плоскости.

*x*

*z*

𝑘̅

0

*M*0

*y*

Пусть точка *М*(*x*;*y;z*) c текущими координатами принадлежит плоскости,

𝑀̅̅̅̅̅0̅̅𝑀̅̅⃗ = {𝑥 − 𝑥0; 𝑦 − 𝑦0; 𝑧 − 𝑧0}, 𝑘̅⃗ = {𝐴; 𝐵; 𝐶}

̅𝑀̅̅̅̅0̅̅𝑀̅̅⃗ ⊥ 𝑘̅⃗ ⟺ 𝑀̅̅̅̅̅0̅̅𝑀̅̅⃗ ∙ 𝑘̅⃗ = 0

𝐴 ∙ (𝑥 − 𝑥0) + 𝐵 ∙ (𝑦 − 𝑦0) + 𝐶 ∙ (𝑧 − 𝑧0) = 0 (**7.1)**

Уравнение 7.1. называют уравнением плоскости, *проходящей через данную точку* 𝑀0(𝑥0; 𝑦0; 𝑧0) *перпендикулярно заданному вектору* 𝑘̅⃗ = {𝐴; 𝐵; 𝐶} .

𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶𝑧 − 𝐴𝑥0 − 𝐵𝑦0 − 𝐶𝑧0 = 0

Пусть 𝑟̅̅0⃗ = {𝑥0; 𝑦0; 𝑧0} радиус вектор точки 𝑀0, тогда −𝐴𝑥0 − 𝐵𝑦0 − 𝐶𝑧0 =

−𝑘̅⃗ ∙ 𝑟̅̅0⃗

Обозначим −𝐴𝑥0 − 𝐵𝑦0 − 𝐶𝑧0 = −𝑘̅⃗ ∙ 𝑟̅̅0⃗ = 𝐷

𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + С𝑧 + 𝐷 = 0 (**7.2**)

Уравнение (7.2.) называется *общее уравнение плоскости*. **Теорема 7.1.** Всякое уравнение первой степени

𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶𝑧 + 𝐷 = 0, |𝐴| + |𝐵| + |𝐶| ≠ 0

задаёт плоскость. И обратно, каждой плоскости соответствует некоторое уравнение вида 7.2.

**Замечание 7.2.** Коэффициенты 𝐴, 𝐵 и 𝐶 стоящие в общем уравнении плоскости перед переменными 𝑥, 𝑦 и 𝑧 являются координатами нормального вектора данной плоскости.

Например, если плоскость *σ* задана уравнением 2𝑥 − 3𝑦 + 𝑧 − 7 = 0, то её нормальный вектор 𝑘̅⃗ = {2; −3; 1}, а свободный член С = −7.

## Неполные уравнения плоскости

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶𝑧 + 𝐷 = 0, |𝐴| + |𝐵| + |𝐶| ≠ 0 | | | | |
| № | *A* | *B* | *C* | *D* | Уравнение | Описание |
| 1 | ≠ 0 | ≠ 0 | ≠ 0 | **0** | 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶𝑧 = 0 | Плоскость проходит через начало координат. |
| 2 | **0** | ≠ 0 | ≠ 0 | ≠ 0 | 𝐵𝑦 + 𝐶𝑧 + 𝐷 = 0 | Плоскость параллельна оси *Ox*. |
| 3 | ≠ 0 | **0** | ≠ 0 | ≠ 0 | 𝐴𝑥 + 𝐶𝑧 + 𝐷 = 0 | Плоскость параллельна оси *Oy*. |
| 4 | ≠ 0 | ≠ 0 | **0** | ≠ 0 | 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐷 = 0 | Плоскость параллельна оси *Oz*. |
| 5 | **0** | ≠ 0 | ≠ 0 | **0** | 𝐵𝑦 + 𝐶𝑧 = 0 | Плоскость проходит через ось *Ox*. |
| 6 | ≠ 0 | **0** | ≠ 0 | **0** | 𝐴𝑥 + 𝐶𝑧 = 0 | Плоскость проходит через ось *Oy*. |
| 7 | ≠ 0 | ≠ 0 | **0** | **0** | 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 = 0 | Плоскость проходит через ось *Oz*. |
| 8 | **0** | **0** | ≠ 0 | ≠ 0 | 𝐶𝑧 + 𝐷 = 0 | Плоскость параллельна плоскости  *xOy* |
| 9 | ≠ 0 | **0** | **0** | ≠ 0 | 𝐴𝑥 + 𝐷 = 0 | Плоскость параллельна плоскости  *yOz* |
| 10 | **0** | ≠ 0 | **0** | ≠ 0 | 𝐵𝑦 + 𝐷 = 0 | Плоскость параллельна плоскости  *xOz* |
| 11 | ≠ 0 | **0** | **0** | **0** | 𝑥 = 0 | Плоскость *yOz* |
| 12 | **0** | ≠ 0 | **0** | **0** | 𝑦 = 0 | Плоскость *xOz* |
| 13 | **0** | **0** | ≠ 0 | **0** | 𝑧 = 0 | Плоскость *xOy* |

**Замечание 7.1.** Если два уравнения 𝐴1𝑥 + 𝐵1𝑦 + 𝐶1𝑧 + 𝐷1 = 0 и

𝐴2𝑥 + 𝐵2𝑦 + 𝐶2𝑧 + 𝐷2 = 0 определяют одну и ту же плоскость, то

коэффициенты пропорциональны: Æ1 = 𝐵1 = 𝐶1 = 𝐷1.

Æ2 𝐵2 𝐶2 𝐷2

1. Составить уравнение плоскости в отрезках. *Решение*.

𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶𝑧 + 𝐷 = 0 ⇒ 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶𝑧 = −𝐷

Æ

−𝐷

𝑥 + 𝐵

−𝐷

𝑦 + 𝐶

−𝐷

𝑧 = 1, обозначим 𝐷

−Æ

= 𝑎, 𝐷

−𝐵

= 𝑏, 𝐷

−𝐶

= 𝑐

S + 𝑦 + 𝑍 = 1 (**7.3.**)

𝑎 𝑏 𝑐

Уравнение 7.3. называют *уравнением плоскости в отрезках*. **Замечание 7.2.** Уравнение (7.3.) удобно для построения плоскости.

Например, 3𝑥 + 2𝑦 + 𝑧 = 6 ⇒ S + 𝑦 + 𝑍 = 1

2 3 6

*x*

*z*

0

*y*

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки

𝑀0(𝑥0; 𝑦0; 𝑧0), 𝑀1(𝑥1; 𝑦1; 𝑧1), 𝑀2(𝑥2; 𝑦2; 𝑧2).

*Решение*.

*M*

𝑀2

𝑀0

𝑀1

Пусть точка *М*(*x*;*y;z*) c текущими координатами принадлежит плоскости,

Тогда векторы 𝑀̅̅̅̅̅0̅̅𝑀̅̅⃗, ̅𝑀̅̅̅̅0̅̅𝑀̅̅̅̅1⃗, 𝑀̅̅̅̅̅0̅̅𝑀̅̅̅̅2⃗ – компланарны.

𝑥 − 𝑥0 𝑦 − 𝑦0 𝑧 − 𝑧0

𝑀̅̅̅̅̅0̅̅𝑀̅̅⃗ 𝑀̅̅̅̅̅0̅̅𝑀̅̅̅̅1⃗ 𝑀̅̅̅̅̅0̅̅𝑀̅̅̅̅2⃗ = 0 ⇒ |𝑥1 − 𝑥0 𝑦1 − 𝑦0 𝑧1 − 𝑧0| = 0 (**7.4.**)

𝑥2 − 𝑥0 𝑦2 − 𝑦0 𝑧2 − 𝑧0

Уравнение 7.4. называют *уравнением плоскости, проходящей через три точки*.

1. Параметрические уравнения плоскости.

Пусть точка 𝑀0(𝑥0; 𝑦0; 𝑧0) принадлежит плоскости, которая параллельна векторам 𝑚̅̅⃗{𝑚1; 𝑚2; 𝑚3} и 𝑝⃗{𝑝1; 𝑝2; 𝑝3}.

𝑚̅̅⃗



𝑀0

𝑝⃗

*M*

Пусть точка *М*(*x*;*y;z*) c текущими координатами

𝑥 = 𝑥0 + 𝑝1𝑢 + 𝑚1𝑣

𝑀̅̅̅̅̅0̅̅𝑀̅̅⃗ = 𝑢 𝑝⃗ + 𝑣 𝑚̅̅⃗ ⇒ {𝑦 = 𝑦0 + 𝑝2𝑢 + 𝑚2𝑣

𝑧 = 𝑧0 + 𝑝3𝑢 + 𝑚3𝑣

(**7.5.**)

Уравнения (7.5.) называются параметрические уравнения плоскости.

**5)** Расстояние от точки 𝑀0(𝑥0; 𝑦0; 𝑧0) до плоскости 𝜎: 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶𝑧 + 𝐷 = 0.

*z* 𝑘̅

*M*0

0

*y*

*M*

*x*

Пусть 𝑀(𝑥; 𝑦; 𝑧) – текущая точка на плоскости, тогда

̅𝑀̅̅𝑀̅̅0⃗ = {𝑥0 − 𝑥; 𝑦0 − 𝑦; 𝑧0 − 𝑧}, 𝑘̅⃗ = {𝐴; 𝐵; 𝐶}

𝑑 = |𝑘р

̅𝑀̅̅𝑀̅̅⃗| = |̅𝑀̅̅𝑀̅̅̅0⃗∙𝑛̅⃗| = |Æ(S0−S)+𝐵( 𝑦0−𝑦)+𝐶( 𝑍0−𝑍)| = |ÆS0+𝐵𝑦0+𝐶𝑍0−ÆS−𝐵𝑦−𝐶𝑍|

𝑛̅⃗ 0

|𝑛̅⃗|

√Æ2+𝐵2+𝐶2

√Æ2+𝐵2+𝐶2

Так как точка 𝑀(𝑥; 𝑦; 𝑧) принадлежит плоскости, то −𝐴𝑥 − 𝐵𝑦 − 𝐶𝑧 = 𝐷.

𝑑(𝑀 , 𝜎) = |Æ∙S0+𝐵∙𝑦0+𝐶𝑧0+𝐷|

0

√𝐴2+𝐵2+𝐶2

(**7.6**)

**6)** Расположение плоскостей, угол между плоскостями Рассмотрим две плоскости, заданные общими уравнениями:

𝜎1: 𝐴1𝑥 + 𝐵1𝑦 + 𝐶1𝑧 + 𝐷1 = 0 и 𝜎2: 𝐴2𝑥 + 𝐵2𝑦 + 𝐶2𝑧 + 𝐷2 = 0.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Расположение плоскостей | Условие для нормальных векторов  плоскостей | Условие для коэффициентов общих уравнений плоскостей |
| 1 | плоскости параллельны:  𝜎1 ∥ 𝜎2 | векторы  𝑘̅⃗1 ∥ 𝑘̅⃗2 | Æ1 = 𝐵1 = 𝐶1 ≠ 𝐷1 (**7.7**)  Æ2 𝐵2 𝐶2 𝐷2 |
| 2 | плоскости совпадают:  𝜎1 ≡ 𝜎2 | векторы  𝑘̅⃗1 ∥ 𝑘̅⃗2 | Æ1 = 𝐵1 = 𝐶1 = 𝐷1 (**7.8**)  Æ2 𝐵2 𝐶2 𝐷2 |
| 3 | плоскости перпендикулярны:  𝜎1 ⊥ 𝜎2 | векторы  𝑘̅⃗1 ⊥ 𝑘̅⃗2:  𝑘̅⃗1 ∙ 𝑘̅⃗2 = 0 | 𝐴1 ∙ 𝐴2 + 𝐵1 ∙ 𝐵2 + 𝐶1 ∙ 𝐶2 = 0 (**7.9**) |
| 4 | плоскости пересекаются под углом 𝜑 | cos 𝜑  = |𝑘̅⃗1 ∙ 𝑘̅⃗2|  |𝑘̅⃗1| ∙ |𝑘̅⃗2| | cos 𝜑 = |Æ1∙Æ2+𝐵1∙𝐵2+𝐶1∙𝐶2|  √Æ2+𝐵2+𝐶2 ∙√Æ2+𝐵2+𝐶2 1 1 1 2 2 2  (**7.10**) |

**§8. Прямая в пространстве** Даны две плоскости 𝜎1: 𝐴1𝑥 + 𝐵1𝑦 + 𝐶1𝑧 + 𝐷1 = 0 и

𝜎2: 𝐴2𝑥 + 𝐵2𝑦 + 𝐶2𝑧 + 𝐷2 = 0 пересекающиеся по прямой *l*, тогда уравнения

прямой {𝐴1𝑥 + 𝐵1𝑦 + 𝐶1𝑧 + 𝐷1 = 0

𝐴2𝑥 + 𝐵2𝑦 + 𝐶2𝑧 + 𝐷2 = 0

(**8.1.**)

Уравнения (8.1.) называются *общими уравнениями прямой*.

**1)** Составить уравнения прямой, проходящей через две точки 𝑀1(𝑥1; 𝑦1; 𝑧1) и

𝑀2(𝑥2; 𝑦2; 𝑧2).

*l*

𝑀(𝑥; 𝑦; 𝑧)

𝑀2(𝑥2; 𝑦2; 𝑧2)

𝑀1(𝑥1; 𝑦1; 𝑧1)

Векторы 𝑀̅̅̅1̅𝑀̅⃗ = {𝑥 − 𝑥1; 𝑦 − 𝑦1; 𝑧 − 𝑧1} и 𝑀̅̅̅1̅𝑀̅̅2⃗ = {𝑥2 − 𝑥1; 𝑦2 − 𝑦1; 𝑧2 − 𝑧1} коллинеарны, так как они лежат на одной прямой. Следовательно, их координаты должны быть пропорциональны, то есть:

S−S1

S2−S1

= 𝑦−𝑦1

𝑦2−𝑦1

= 𝑍−𝑍1 . (**8.2**)

𝑍2−𝑍1

Формулы 8.2. называют *уравнениями прямой, проходящей через две заданные точки.*

1. Составить уравнения прямой, проходящей через заданную точку 𝑀0(𝑥0; 𝑦0; 𝑧0)

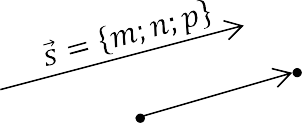
параллельно заданному вектору 𝑠⃗ = {𝑚; 𝑘; 𝑝}, |𝑚| + |𝑘| + |𝑝| ≠ 0

(направляющий вектор).

**Определение 8.1.** *Направляющим вектором* прямой называется всякий ненулевой вектор 𝑠⃗, параллельный данной прямой.

*Решение.* Пусть 𝑀(𝑥; 𝑦; 𝑧) – текущая точка прямой.

*l*



𝑀(𝑥; 𝑦;

𝑀0(𝑥0; 𝑦0; 𝑧0)

𝑧)

Векторы 𝑀̅̅̅0̅𝑀̅⃗ = {𝑥 − 𝑥0; 𝑦 − 𝑦0; 𝑧 − 𝑧0} и 𝑠⃗ = {𝑚; 𝑘; 𝑝} должны быть коллинеарны, то есть их координаты должны быть пропорциональны:

S−S0 = 𝑦−𝑦0 = 𝑍−𝑍0. (**8.3**)

𝑚 𝑛 𝑝

Уравнения 8.3. называются *каноническими* уравнениями прямой или уравнения прямой проходящей через точку 𝑀0(𝑥0; 𝑦0; 𝑧0) параллельно вектору

𝑠⃗ = {𝑚; 𝑘; 𝑝}.

# 𝑥 = 𝑚𝑡 + 𝑥0

S−S0 = 𝑦−𝑦0 = 𝑍−𝑍0 = 𝑡 ⟹ { 𝑦 = 𝑘𝑡 + 𝑦0

(**8.4**)

𝑚 𝑛 𝑝

# 𝑧 = 𝑝𝑡 + 𝑧0

Уравнения 8.4. называются *параметрическими* уравнениями прямой. **Замечание 8.1.** Уравнение 8.4. используют при нахождении пересечения прямой и плоскости.

*Переход от общих уравнений прямой к каноническим*

Дано {𝐴1𝑥 + 𝐵1𝑦 + 𝐶1𝑧 + 𝐷1 = 0 требуется составить S−S0 = 𝑦−𝑦0 = 𝑍−𝑍0

𝐴2𝑥 + 𝐵2𝑦 + 𝐶2𝑧 + 𝐷2 = 0

𝑘

𝑠⃗

̅2⃗

̅𝑘̅1⃗

𝑚 𝑛 𝑝

Для нахождения направляющего вектора:

Т.к. 𝑙 ∈ 𝜎1 ⇒ 𝑠⃗ ⊥ 𝑘

̅1⃗

ı⃗ 𝑗⃗ 𝑘̅⃗

𝑙 ∈ 𝜎2 ⇒ 𝑠⃗ ⊥ 𝑘̅ ̅2⃗, 𝑠⃗ = 𝑘̅ ̅1⃗ × ̅𝑘̅2⃗ = |𝐴1 𝐵1 𝐶1|

𝐴2 𝐵2 𝐶2

Для нахождения точки: фиксируют одну из координат (например, 𝑥 = 0) две другие находят из полученной системы уравнений.

**Пример 8.1.** Найти каноническое уравнение прямой {3𝑥 + 2𝑦 + 4𝑧 − 11 = 0.

2𝑥 + 𝑦 − 3𝑧 − 1 = 0

Решить самостоятельно **!**

1. Расположение прямых в пространстве.

𝐿1: S−S1 = 𝑦−𝑦1 = 𝑍−𝑍1 𝐿2: S−S2 = 𝑦−𝑦2 = 𝑍−𝑍2

𝑚1

𝑛1

𝑝1

𝑚2

𝑛2

𝑝2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Расположение  прямых | Условие на  векторы | Условие на координаты |
| 1 | Прямые параллельны:  𝐿1 ∥ 𝐿2 | векторы  𝑠⃗1 ∥ 𝑠⃗2 | 𝑚1 = 𝑛1 = 𝑝1 (**8.5**)  𝑚2 𝑛2 𝑝2 |
| 2 | Прямые перпендикулярны:  𝐿1 ⊥ 𝐿2 | векторы  𝑠⃗1 ⊥ 𝑠⃗2 | 𝑚1 ∙ 𝑚2 + 𝑘1 ∙ 𝑘2 + 𝑝1 ∙ 𝑝2 = 0  (**8.6**) |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 3 | Прямые пересекаются:  𝐿1⋂𝐿2 | векторы  ̅𝑀̅̅1̅𝑀̅̅2⃗, 𝑠⃗1, 𝑠⃗2  компланарны  〈̅𝑀̅̅1̅𝑀̅̅2⃗, 𝑠⃗1, 𝑠⃗2〉  = 0 | 𝑥2−𝑥1 𝑦2−𝑦1 𝑧2−𝑧1  | 𝑚1 𝑘1 𝑝1 | = 0 (**8.7**)  𝑚2 𝑘2 𝑝2 |
| 4 | Прямые скрещивающиеся:  𝐿1−̇ 𝐿2 | векторы  ̅𝑀̅̅1̅𝑀̅̅2⃗, 𝑠⃗1, 𝑠⃗2 не компланарны  〈̅𝑀̅̅1̅𝑀̅̅2⃗, 𝑠⃗1, 𝑠⃗2〉  ≠ 0 | 𝑥2−𝑥1 𝑦2−𝑦1 𝑧2−𝑧1  | 𝑚1 𝑘1 𝑝1 | ≠ 0 (**8.8**)  𝑚2 𝑘2 𝑝2 |
| 5 | Угол между прямыми | cos 𝜑  |𝑠⃗1 ∙ 𝑠⃗2|  = |𝑠⃗1| ∙ |𝑠⃗2| | cos 𝜑 =  |𝑚1 ∙ 𝑚2 + 𝑘1 ∙ 𝑘2 + 𝑝1 ∙ 𝑝2|  =  √𝑚2 + 𝑘2 + 𝑝2 ∙ √𝑚2 + 𝑘2 + 𝑝2  1 1 1 2 2 2  (**8.9**) |

1. Расположение прямой и плоскости.

𝐿: S−S1 = 𝑦−𝑦1 = 𝑍−𝑍1

# 𝜎: 𝐴𝑥 + 𝐵𝑦 + 𝐶𝑧 + 𝐷 = 0

𝑚 𝑛 𝑝

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Расположение Прямой и  плоскости | Условие на векторы | Условие на координаты |
| 1 | Прямая лежит в плоскости:  𝐿 ⊂ 𝜎 | 𝑠⃗ ⊥ 𝑘̅⃗ ⇒  𝑠⃗ ∙ 𝑘̅⃗ = 0  𝑀1 ∈ 𝜎 | 𝑚 ∙ 𝐴 + 𝑘 ∙ 𝐵 + 𝑝 ∙ 𝐶 = 0  𝐴𝑥1 + 𝐵𝑦1 + 𝐶𝑧1 + 𝐷 = 0 (**8.10**) |
| 2 | Прямая и плоскость параллельны:  𝐿 ∥ 𝜎 | 𝑠⃗ ⊥ 𝑘̅⃗ ⇒  𝑠⃗ ∙ 𝑘̅⃗ = 0  𝑀1 ∉ 𝜎 | 𝑚 ∙ 𝐴 + 𝑘 ∙ 𝐵 + 𝑝 ∙ 𝐶 = 0  𝐴𝑥1 + 𝐵𝑦1 + 𝐶𝑧1 + 𝐷 ≠ 0  (**8.11**) |
| 3 | Прямая и плоскость пересекаются:  𝐿⋂𝜎 | 𝑠⃗ ∙ 𝑘̅⃗ ≠ 0 | 𝑚 ∙ 𝐴 + 𝑘 ∙ 𝐵 + 𝑝 ∙ 𝐶 ≠ 0 (**8.12**) |
| 4 | Угол между прямой и плоскостью | |𝑠⃗ ∙ 𝑘̅⃗|  𝑠i𝑘 𝜑 = |𝑠⃗| ∙ |𝑘̅⃗| | sin 𝜑 =  = |𝑚 ∙ 𝐴 + 𝑘 ∙ 𝐵 + 𝑝 ∙ 𝐶|    √𝑚2 + 𝑘2 + 𝑝2 ∙ √𝐴2 + 𝐵2 + 𝐶2  (**8.13**) |

# **6.** Расстояние от точки до прямой в пространстве.

𝐿: S−S1 = 𝑦−𝑦1 = 𝑍−𝑍1

, точка 𝑀 (𝑥 ; 𝑦 ; 𝑧 )

𝑚 𝑛 𝑝

0 0 0 0

𝑀0(𝑥0; 𝑦0; 𝑧0)

𝑀1

𝑠⃗ = {𝑚; 𝑘; 𝑝}

𝑑(𝑀 ; 𝐿) = |̅𝑀̅̅1̅𝑀̅̅0⃗×⃗𝑠|

0

|𝑠⃗|

(**8.14.**)

**Пример 8.1.** Составить уравнение плоскости, проходящей через

# прямую 𝐿: S+1 = 𝑦+2 = 𝑍−2

перпендикулярно плоскости

2 −3 −2

# 𝜎: 3𝑥 + 2𝑦 − 𝑧 − 5 = 0.

{3; 2; −1}



𝑘̅⃗ =

σ

̅1⃗

*M*1

σ1

Рассмотрим взаимное расположение векторов: ̅𝑘̅1⃗ ⊥ 𝑘̅⃗, ̅1⃗ ⊥ 𝑠⃗ ⇒ 𝑘

ı⃗ 𝑗⃗ 𝑘̅⃗

̅1⃗ = 𝑘̅⃗ × 𝑠⃗

̅1⃗ = 𝑘̅⃗ × 𝑠⃗ = |3 2 −1| = −7ı⃗ + 4𝑗⃗ − 13𝑘̅⃗

2 −3 −2

𝜎1: 𝑘̅1⃗ = {−7; 4; −13}, 𝑀1(−1; −2; 2)

𝐴 ∙ (𝑥 − 𝑥0) + 𝐵 ∙ (𝑦 − 𝑦0) + 𝐶 ∙ (𝑧 − 𝑧0) = 0.

−7 ∙ (𝑥 + 1) + 4 ∙ (𝑦 + 2) − 13 ∙ (𝑧 − 2) = 0 или −7𝑥 + 4𝑦 − 13𝑧 + 27 = 0

**Пример 8.2.** Найти точку *Q* симметричную точке 𝑃(1; 3; −4)

# относительно плоскости 𝜎: 3𝑥 + 𝑦 − 2𝑧 = 0.

*P* 𝑘̅⃗

*O*

σ

*Q*

Составим уравнение прямой (*PQ*): 𝑠⃗ = 𝑘̅⃗ = {3; 1; −2}, 𝑃(1; 3; −4)

# 𝑥 − 1 = 𝑦 − 3 = 𝑧 + 4

# 3 1 −2

Найдем координаты точки *О* – точки пересечения прямой и плоскости.

# Перейдем к параметрическим уравнениям прямой:

𝑥 = 3𝑡 + 1,

# { 𝑦 = 𝑡 + 3,

𝑧 = −2𝑡 − 4

# и подставим в уравнение плоскости:

3(3𝑡 + 1) + 𝑡 + 3 − 2(−2𝑡 − 4) = 0 ⇒ 14𝑡 + 14 = 0 ⇒ 𝑡 = −1

# Подставим найденное значение параметра в параметрические

𝑥 = −2,

# уравнения: {

𝑦 = 2,

# 𝑧 = −2.

Точка 𝑂(−2; 2; −2) – середина отрезка *PQ*.

# ⎧𝑥o

⎪

# = 𝑥𝑃 + 𝑥Q ,

2

# 𝑦𝑃 + 𝑦Q

𝑥Q

# = 2𝑥0

− 𝑥𝑃

# = −5,

⎨𝑦o =

# ⎪𝑧o =

𝗅

2 , ⇒ {

# 𝑧𝑃 + 𝑧Q .

2

# 𝑦Q = 2𝑦0 − 𝑦𝑃 = 1,

𝑧Q = 2𝑧0 − 𝑧 = 0.

Точка 𝑄(−5; 1; 0).

**Пример 8.3.** Найти расстояние между прямыми

a) 𝐿1: S−2 = 𝑦+1 = 𝑍 , 𝐿2: S−7 = 𝑦−1 = 𝑍−3

3 4 2 3 4 2

б) 𝐿1: S+7 = 𝑦+4 = 𝑍+3 , 𝐿2: S−21 = 𝑦+5 = 𝑍−2.

3 4 −2 6 −4 −1

a) 𝐿1 ∥ 𝐿2 , 𝑀1(2; −1; 0), 𝑀2(7; 1; 3), 𝑠⃗ = {3; 4; 2}

𝑀2

𝑀1

𝑠⃗ = {3; 4; 2}

# 𝑑(𝑀0

; 𝐿) = |̅

̅1̅𝑀

̅⃗2 × 𝑠⃗|

|𝑠⃗|

̅̅̅̅̅̅⃗

̅̅̅̅̅̅⃗

i⃗ j⃗

̅𝑘̅⃗

⃗ ⃗ ̅⃗

𝑀1𝑀2 = {5; 2; 3}, 𝑀1𝑀2 × 𝑠⃗ = |5 2 3| = −8i − j + 14𝑘

3 4 2

𝑑(𝑀0; 𝐿) = √64+1+196 = √261 = 3

√9+16+4 29

# б) Проверим расположение прямых

𝑀1(−7; −4; −3), 𝑀2(21; −5; 2),

̅𝑠̅1⃗ = {3; 4; −2}, ̅𝑠̅2⃗ = {6; −4; −1}, 𝑀̅̅̅1̅𝑀̅̅2⃗ = {28; −1; 5}

28 −1 5

| 3 4 −2| = 28 ∙ (−12) + 9 + 5 ∙ (−36) ≠ 0

6 −4 −1

𝐿1−̇ 𝐿2



𝑘̅⃗



*M*1

σ



*L*2

*M*2

Проведем плоскость, через прямую 𝐿1 параллельно 𝐿2.

Рассмотрим взаимное расположение векторов: 𝑘̅⃗ ⊥ 𝑠̅1⃗, 𝑘̅⃗ ⊥ ̅𝑠̅2⃗ ⟹ 𝑘̅⃗ = 𝑠̅1⃗ × ̅𝑠̅2⃗

ı⃗ 𝑗⃗ 𝑘̅⃗

𝑘̅⃗ = 𝑠̅1⃗ × ̅𝑠̅2⃗ = |3 4 −2| = −12ı⃗ − 9𝑗⃗ − 36𝑘̅⃗ ∥ {4; 3; 12}

6 −4 −1

𝜎: 𝑘̅⃗ = {4; 3; 12}, 𝑀1(−7; −4; −3)

4 ∙ (𝑥 + 7) + 3 ∙ (𝑦 + 4) + 12 ∙ (𝑧 + 3) = 0 или 4𝑥 + 3𝑦 + 12𝑧 + 76 = 0. Найдем расстояние от точки 𝑀2(21; −5; 2) до плоскости 𝜎.

𝑑(𝑀2, 𝜎) = |Æ∙S0+𝐵∙𝑦0+𝐶𝑧0+𝐷| = |4∙21+3∙(−5)+12∙2+76| = 169 = 13.

√𝐴2+𝐵2+𝐶2 √42+32+122 13

## КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Определение.** *Алгебраической кривой второго порядка* называется кривая, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

*Ax*2  2*Bxy*  *Cy*2  *Dx*  *Ey*  *F*  0 (**1**), где *А*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* – вещественные

коэффициенты, причем *A*2  *B*2  *C* 2  0 .

Уравнение (1) может определять, так называемую вырожденную кривую (пустое множество точек, точку, прямую, пару прямых).

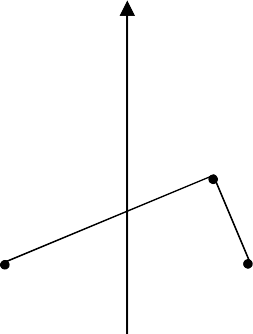
Если же кривая невырожденная, то уравнение (1) определяет одну из кривых: окружность, эллипс, гиперболу или параболу.

## §1. Эллипс

**Определение 1.1.** *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых, сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Эту постоянную величину обозначим как 2*а*.

*x*



*y*

*M*

*F1*

*O*

*F2*

Пусть фокусы расположены на оси *Ox* и имеют координаты

*F*1(*c*; 0) и

*F*2 (*c*; 0) ,

то есть расстояние между фокусами

*F*1*F*2

 2*c*

(2*a* > 2*c*). Если произвольная

точка *M* (*x*; *y*) с текущими координатами принадлежит эллипсу, то согласно

определению 1.1:

*F*1*M*

* *F*2 *M*

 2*a* .

Вычислим длины векторов

*F*1*M* и *F*2 *M* :

*F*1*M*  {*x*  *c*; *y*}, *F*2 *M*  {*x*  *c*; *y*},

––––→

*F*1*M* 

––––→

, *F*2 *M*  .

(*x*  *c*)2  *y*2

(*x*  *c*)2  *y*2

Упростим уравнение квадрат отделим один корень: 

(*x*  *c*)2  *y*2



(*x*  *c*)2  *y*2 2  2*a* 

(*x*  *c*)2  *y*2

 2*a* , перед возведением в

(*x*  *c*)2  *y*2 2

*x*2  2*xc*  *c*2  *y*2  4*a*2  4*a*  *x*2  2*xc*  *c*2  *y*2

(*x*  *c*)2  *y*2

Снова отделим корень в одной части:

4*a*  4*a*2  4*xc*

(*x*  *c*)2  *y*2

или *a*

(*x*  *c*)2  *y*2 2  *a*2  *xc*2

*a*2 *x*2  2*a*2 *xc*  *a*2*c*2  *a*2 *y*2  *a*4  2*a*2 *xc*  *x*2*c*2

*x*2 (*a*2  *c*2 )  *a*2 *y*2  *a*2 (*a*2  *c*2 )

Пусть *b*2  *a*2  *c*2 (*a*  *b*) (**1.1.**), тогда

*x*2*b*2  *a*2 *y*2  *a*2*b*2 . Разделим обе части на

*a*2*b*2 .

*x*2  *y*2 

1

(**1.2.**). Формула (1.2.) называется *каноническое уравнение эллипса*.

*a*2 *b*2

Формула (1.1.) называется *формула связи между a,b и с*.

**Определение 1.2.** Параметры *а* и *b* ( *a*  *b*  0 ) называются *полуосями эллипса*

(*большая и малая* соответственно), точки

*A*1 (*a*; 0), *A*2 (*a*; 0), *B*1 (0; *b*), *B*2 (0;*b*) – его

*вершинами*. Отрезок

*A*1 *A*2

называется *большая ось*, отрезок *B*1*B*2 – *малая ось*.

Точка пересечения осей симметрии эллипса (оси *Ox* и оси *Oy*) точка *O*

называется *центром эллипса*. Ось на которой лежат фокусы называется *фокальной осью*. Расстояние от точки эллипса до фокуса называется

*фокальным радиусом*:

*r*1 

––––→

*F*1*M* ,

*r*2 

––––→

*F*2 *M* .

Покажем, что при возведении в квадрат не появились «лишние ветви», т.е. любая точка, удовлетворяющая уравнению (1.2.) также удовлетворяет

определению эллипса. Выразим *y*2 из уравнения (1.2.):

2 2 

*x*2 

*y*  *b*

1 

 

*a*2

*r*1 



––––→

*F*1*M*   

(*x*  *c*)2  *y*2

*x*  2*xc*  *c*  *b* 1

2

2

2 



*x*2 



*a*

2





 

*x*  2*xc*  *c*  (*a*  *c* )  1

2

2

2 2

 *x*2 





*a*

2





*x*  2*xc*  *c*  *a*  *x*  *c* 

2

2 2 2 2

*c*2 *x*2

*a*2

 

*a*  2*xc* 

2

*c*2 *x*2

*a*2

––––→

*r* 

 *a*  *cx*

*a*

 *cx* 2

 *a* 



*a* 



*cx*

Аналогично, 2 *F*2*M*

 *a* 

, тогда

*a*

*r*1  *r*2  2*a* .

*Исследование формы эллипса*

1. Оси симметрии OX и OY и центр симметрии (центр эллипса) – начало координат.
2. *x*  *a* , *y*  *b* . Следовательно, эллипс находится внутри прямоугольника со сторонами 2*а* и 2*b*.

*x*

*y*

*B2*

*M*

*A1*

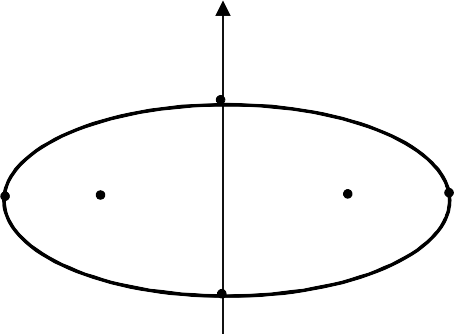
*F1*

*O*

*F2*

*A2*

*B1*



**Определение 1.3.** Число   *c*

*a*

Рис. 1.1.

(**1.3**) называется *эксцентриситетом*, где *a* –

большая полуось.

Так как *a*  *c* , эксцентриситет эллипса всегда меньше 1 ( 0    1) и является мерой его «сплюснутости».

**Замечание 1.1.** В частном случае при *a*  *b* ( *c*  0    0 ) уравнение эллипса

примет вид:

*x*2  *y*2  

2  2 

2 – уравнение окружности с центром в точке

*a*2 *a*2 1

*x y a*

(0;0) и радиусом *а*.

**Определение 1.4.** Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, одинаково удаленных от данной точки, называемой центром.

––––→

Пусть *М*(*x*;*y*) – точка с текущими координатами, тогда *CM*  *R* , где *С*(*x*0;*y*0) –

––––→ ––––→

координаты центра окружности. *CM*  *x*  *x*0; *y*  *y*0, *CM*  ,

(*x*  *x* )2  ( *y*  *y* )2

0

0

 *R* 

(*x*  *x*

0

)  ( *y*  *y* )

2

2

0

(*x*  *x* )2  ( *y*  *y* )2  *R*2

(**1.4**) уравнение окружности с

центром в точке (*x*0;*y*0) и радиусом *R*.

0 0



*y*

*M*(*x;y*)

*R*

*O*

*x*

*С*(*x*0;*y*0)

Таким образом, окружность есть частный случай эллипса, у которого полуоси равны между собой и эксцентриситет равен 0.

**Замечание 1.2.** Если выразить *y* через *x* из уравнения (1.2), то получим два

уравнения, которые определяют эллипс

*y*   *b*

*a*

*a*2  *x*2 . Причем

*y*   *b*

*a*

*a*2  *x*2

определяет верхнюю половину эллипса, а

половину. Аналогично, выражая *x* через *y*:

*y*   *b*

*a*

*x*   *a*

*b*

*a*2  *x*2

*b*2  *y*2

определяет нижнюю

определяет правую

половину эллипса, а

*x*   *a*

*b*

*b*2  *y*2

определяет левую половину эллипса.

**Определение 1.5.** Прямые, перпендикулярные фокальной оси эллипса и

расположенные симметрично относительно центра эллипса на расстоянии *a* ,



называются *директрисами эллипса*. (Изображены на рис. 1.1. красным цветом)

*x*   *a*



(**1.5**) – уравнения директрис, где *a* – большая полуось.

**Замечание 1.3.** Директрисы не пересекают эллипс, так как *a*  *a* .



**Свойство эллипса**: Отношение фокального радиуса произвольной точки к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина

постоянная и равная эксцентриситету:

  *r*

*d*

(**1.6**), *r* – фокальный радиус, *d* –

расстояние до соответствующей директрисы.

*x*

*y*

*М d*

*r*

*F1*

*O*

*F2*

*Доказательство.*

*r*  *a*  *cx*  *a*   *x* . Уравнение соответствующей директрисы:

*x*  *a*

или

*x*  *a*  0

1 *a*

*d*  *x*  *a*  *x*  *a* 

 

*r*1  *a*   *x*  



1  

*d*1 *x*  *a*



Второй случай:

*r*2  

*d*2

доказать самостоятельно **!**

**Пример 1.1.** Дан эллипса 9*x*2  25 *y*2  225 . Определить полуоси эллипса,

координаты вершин и фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис. Сделать рисунок.

*Решение*. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду (1.2). Для этого

2

2

разделим обе части уравнения на 225: *x*  *y*  1 тогда

,

*a*2  25, *a*  5 и

*b*2  9, *b*  3 .

25 9

Координаты вершин: *A*1 (5; 0), *A*2 (5; 0), *B*1 (0; 3), *B*2 (0;3) .

Используем формулу (1.1)

*c*2  *a*2  *b*2  25  9  16 ,

*c*  4 . Координаты фокусов

*F* (4; 0), *F* (4; 0) . Эксцентриситет находим по формуле (1.3):   *c*  4  0,8 .

1 2 *a* 5

Уравнения директрис находим по формуле (1.5)

*x*  *a* ,



*x*   25 , *x*  6, 25 .

4

Построим эллипс. Для этого отметим вершины эллипса: точки *A*1 и *A*2 на расстоянии *a*=5 влево и право от центра *О* и точки *B*1 и *B*2 на расстоянии *b* =3 вниз и вверх от центра *О*. Затем соединяем вершины эллипса.

*x*

*y*

*B2* 3

*A1*

–5

*F1*

*O*

1

*F2*

*A2*

5

*B1* –3

*Оптическое свойство эллипса*

Лучи света, исходящие из одного фокуса после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус.

*x*



*y*

*F1*

*O*

*F2*

*x*  *a* cos *t*

 *y*  *b* sin *t*



(**1.7.**)

*Параметрические уравнения эллипса*

## Частные случаи эллипса

1. Эллипс, у которого *b* > *a.* В этом случае *b* – большая полуось, *a* – меньшая.

Фокуcы будут расположены на оси *Oy* и иметь координаты поэтому *Oy* называется фокальной осью.

*F*1(0; *c*) и

*F*2 (0; *c*) ,

В этом случае уравнение эллипса

*x*2  *y*2  не изменится, но другие

формулы примут вид:

*a*2 *b*2 1

*a*2  *b*2  *c*2

– связь между *a*, *b* и *c*,

  *c*

*b*

* эксцентриситет,

*y*  *b*



* уравнения директрис.

*x*

1. Эллипс с центром в точке *C*(*x*0; *y*0), c осями симметрии параллельными осям координат и *a* > *b*.

*y*

*F2*

*O*

*F1*

(*x*  *x* )2 ( *y*  *y* )2

Уравнение эллипса: 0  0  1. (**1.8**)

*a*2 *b*2

Координаты вершин: Координаты фокусов:

*A*1 (*x*0  *a*; *y*0 ), *A*2 (*x*0  *a*; *y*0 ), *B*1 (*x*0 ; *y*0  *b*), *B*2 (*x*0 ; *y*0  *b*)

*F*1 (*x*0  *c*; *y*0 ), *F*2 (*x*0  *c*; *y*0 )

Связь между *a*, *b* и *c*:

Эксцентриситет:   *c*

*a*

*b*2  *a*2  *c*2

Уравнения директрис:

*x*  *x*0  

Для построения эллипса: отмечаем центр эллипса – точку *C*(*x*0; *y*0), затем отмечаем вершины эллипса: точки *A*1 и *A*2 на расстоянии *a* влево и право от центра *С* и точки *B*1 и *B*2 на расстоянии *b* вниз и вверх от центра *С* и соединяем вершины эллипса.

*a*

*x*

*y*

*B2*

*A1 F1 y*0 *C*

*F2 A*

*2*

*B1*

*O*

*x*0

**Замечание 1.4.** Аналогично, можно рассмотреть эллипс с центром в точке *C*(*x*0; *y*0), c осями симметрии параллельными осям координат и с большей полуосью *b*.

Рассмотреть самостоятельно **!**

**Пример 1.2.** Определить и построить линию координаты центра и вершин.

4*x*2 16*x*  9 *y*2 18 *y* 11  0 . Найти

*Решение*. Приведем уравнение к виду (1.8) для этого дополним до полного

квадрата, используя формулу:

*x*2  *px*   *x* 

*p* 2



 *p* 2

  

(**1.9**).

 2   2 



Сгруппируем члены, содержащие *x* и члены, содержащие *y*:

4(*x*2  4*x*)  9( *y*2  2 *y*) 11  0. Внутри каждой из скобок используем формулу (1.9):

4((*x*  2)2  4)  9(( *y* 1)2 1) 11  0  4(*x*  2)2  9( *y* 1)2  36 . Разделив обе части на 36,

получим уравнение:

(*x*  2)2  ( *y* 1)2  .

9 4

1

Следовательно, данное уравнение определяет эллипс с центром в точке *С*(2;1) и

полуосями *а* =3, *b* =2. Вершины эллипса: *A*1 (1;1), *A*2 (5;1), *B*1 (2; 1), *B*2 (2;3) .

*x*

*y*

*B2*

*A1* 1 *C*

*A2*

*O*

2

*B1*

**Пример 1.3.** Определить и построить линию *x*  2 

3  *y*2  2 *y*

3  *y*2  2 *y*

*Решение*: Перенесем –2 в левую часть

*x*  2  

, так как справа стоит

неположительное число, то

*x*  2  0 ,

*x*  2 .

Возведем обе части уравнения в квадрат (*x*  2)2  3  *y*2  2 *y*  (*x*  2)2  *y*2  2 *y*  3 .

Дополним до полного квадрата (формула (1.9)) (*x*  2)2  ( *y* 1)2 1  3 .

Получаем уравнение

(*x*  2)2  ( *y* 1)2  4

* уравнение окружности с центром в точке

*С*(–2;1) и радиусом 2. Исходное уравнение определяет левую половину окружности.

*y*

*С*(–2;1)

*O*

*x*

*Ответ*: Левая половина окружности с центром в точке *С*(–2;1) и радиусом 2.

## §2. Гипербола

**Определение 2.1.** *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых, абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

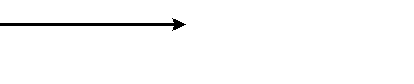
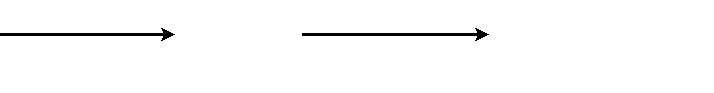
Постоянную величину обозначим как 2*a*. Пусть фокусы расположены на оси

*Ox* и имеют координаты

*F*1(*c*; 0) и

*F*2 (*c*; 0) , то есть расстояние между фокусами

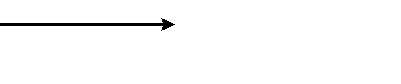
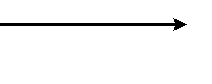
*F*1*F*2



 2*c*

(2*с* > 2*a*). Если произвольная точка

*M* (*x*; *y*) с текущими координатами

принадлежит гиперболе, то согласно определению 2.1:

*F*1*M*

* *F*2 *M*

 2*a* .

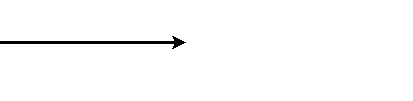
Вычислим длины векторов

,



*F M*  (*x*  *c*)2  *y*2

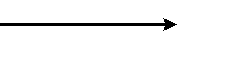
1



*F M*  (*x*  *c*)2  *y*2

2

*F*1*M* и

.

*F*2*M* : *F*1*M*  {*x*  *c*; *y*},

*F*2*M*  {*x*  *c*; *y*} ,

*x*

*y*

*M*

*F1*

*O*

*F2*

Получаем уравнение   2*a* .

(*x*  *c*)2  *y*2

(*x*  *c*)2  *y*2

Самостоятельно **!** возвести дважды в квадрат и упростить к уравнению

*x*2  *y*2 

*a*2 *b*2 1

(**2.1**) *каноническое уравнение гипербол*, где

*между a,b и с*.

*b*2  *c*2  *a*2

(**2.2**) – *формула связи*

**Определение 2.2.** Параметры *а* и *b* называются *полуосями гиперболы*

(*действительная и мнимая* соответственно), точки *A*1(*a*; 0), *A*2 (*a*; 0) – ее *вершинами*

(горизонтальными). Отрезок *А*1*А*2 называется *действительная ось*, отрезок *B*1*B*2 – *мнимая ось*. Точка пересечения осей симметрии гиперболы (оси *Ox* и оси *Oy*) точка *O* называется *центром гиперболы*. Ось симметрии, пересекающая гиперболу, называется *фокальной осью* (на ней всегда лежат фокусы). Расстояние от точки гиперболы до фокуса называется *фокальным радиусом*.

Покажем, что при возведении в квадрат не появились «лишние ветви», т.е. любая точка, удовлетворяющая уравнению (2.1.) также удовлетворяет

определению гиперболы. Выразим *y* 2 из уравнения (2.1.):

2 2  *x*2

 или

2 2 2

 *x*2 

*y*  *b*

 1

 

*a*2

*y*  (*c*

 *a* )  1

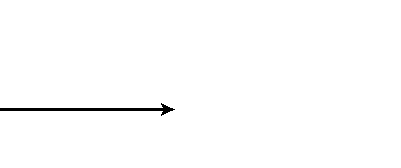
 

*a*2

*r*1 

 

*c*2 *x*2



*F M*  (*x*  *c*)2  *y*2

1

*x*  2*xc*  *c*  (*c*  *a* ) 1

2

2

2

2  *x*2







*a*

2





*a*2  2*xc* 

*c*2 *x*2

*a*2

 *cx* 2

 *a* 



*a* 



*cx*

*a*

 *x*2  2*xc*  *c*2   *c*2  *x*2  *a*2 

*a*2

  *a* 

*a*  *cx* , *x*  0

*r*   *a*

1 

*a* 



*cx* , *x*  0

*a*

*a*  *cx* , *x*  0

Аналогично, *r*2







*a* 



*a*

*cx* , *x*  0

*a*

, тогда

*r*1  *r*2

 2*a* .

*Исследование формы гиперболы*

1. Оси симметрии OX и OY и центр симметрии (центр гиперболы) – начало координат.
2. Для построения гиперболы строят прямоугольник со сторонами параллельными осям симметрии гиперболы и длинами 2*а* и 2*b*. Диагонали прямоугольника, пересекающиеся в центре гиперболы, являются асимптотами гиперболы.

*x*  *a* . Следовательно, гипербола находится вне прямоугольника со сторонами 2*а* и 2*b*.

*x*

*y*

*M*

*F1 A1*

*A2 F2*

*O*

**Определение 2.3.** *Асимптота гиперболы* – прямая, к которой стремится (неограниченно приближается) точка *М* гиперболы при неограниченном удалении точки по ветви гиперболы от начала координат.

*y*  *b x*

*a*

пунктиром.

(**2.3**) уравнения асимптот гиперболы, изображены на рис. красным

**Замечание 2.1.** Если выразить *y* через *x* из уравнения (2.1), то получим два

уравнения, которые определяют гиперболу

*y*   *b*

*a*

*x*2  *a*2 . Причем

*y*   *b*

*a*

*x*2  *a*2

определяет верхнюю половину гиперболы, а

половину. Аналогично, выражая *x* через *y*:

*y*   *b*

*a*

*x*   *a*

*b*

*x*2  *a*2

*b*2  *y*2

определяет нижнюю

определяет правую

половину гиперболы, а

*x*   *a*

*b*

*b*2  *y*2

определяет левую половину гиперболы.

**Определение 2.4.** Число

действительная полуось.

  *c*

*a*

(**2.4**) называется *эксцентриситетом*, где *a* –

Так как *c*  *a* , эксцентриситет гиперболы всегда больше 1 (  1 ) и является мерой его «сплюснутости».

**Определение 2.5.** Прямые, перпендикулярные фокальной оси гиперболы и

расположенные симметрично относительно центра гиперболы на расстоянии *a* ,



называются *директрисами гиперболы*. (Изображены на рис. синим цветом)

*x*  *a*



(**2.5**) – уравнения директрис, где *a* – действительная полуось.

**Замечание 2.2.** Директрисы не пересекают гиперболу, так как *a*  *a* .



**Свойство гиперболы**: Отношение фокального радиуса произвольной точки к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина

постоянная и равная эксцентриситету:

  *r*

*d*

(**2.6**), *r* – фокальный радиус, *d* –

расстояние до соответствующей директрисы.

*d*

*M*

*r*

*F1 A1*

*A2 F2*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *y* |  |
|  | *O* |  |
|  |  |  |

*x*

*Доказательство.*

*Самостоятельно* **!**

*Оптическое свойство гиперболы*

Лучи света, исходящие из одного фокуса гиперболы после зеркального отражения от гиперболы кажутся исходящими из другого ее фокуса.



*y*

*M*

*F1 A1*

*A2 F2*

*x*

*O*

## Частные случаи гиперболы

1. Гипербола, у которой полуоси равны (*a*=*b*) имеет уравнение

*x*2  *y*2 

или

*a*2 *a*2

*x*2  *y*2  *a*2 и называется *равнобочной гиперболой*. Асимптоты равнобочной

1

гиперболы перпендикулярны.

1. *Сопряженная гипербола* имеет уравнение

 *x*2  *y*2  1 (**2.7.**).

*a*2 *b*2

В этом случае вершины гиперболы *B*1(0; *b*), *B*2 (0;*b*) , фокальная ось – ось *Оy*.

Прямоугольник гиперболы будет таким же, как и у гиперболы, заданной уравнением (2.1).

*b*2  *c*2  *a*2 – связь между *a*, *b* и *c*

  *c*

*b*

*y*  *b*



* эксцентриситет гиперболы
  + уравнения директрис

*y*  *b x* – уравнения асимптот

*a*

*x*

*y*

*F2*

*а*

*F1*

*B1*

*O*

*B2 b*

1. Гипербола с центром в точке *С*(*x*0;*y*0), с осями симметрии параллельными

(*x*  *x* )2 ( *y*  *y* )2

осям координат имеет уравнение 0  0  1. (**2.8.**)

*a*2 *b*2

Для построения гиперболы: отмечаем точку *С*(*x*0;*y*0) – центр гиперболы,

затем отмечаем точки

*A*1 (*x*0  *a*; *y*0 ) и

*A*2 (*x*0  *a*; *y*0 ) – вершины гиперболы на

расстоянии *a* влево и право от центра *С* и точки *B*1 и *B*2 на расстоянии *b* вверх и вниз от центра *С*. Строим прямоугольник гиперболы и диагонали – асимптоты гиперболы. Затем строим ветви гиперболы.

*b*2  *c*2  *a*2 – связь между *a*, *b* и *c*

  *c*

*a*

– эксцентриситет гиперболы

*x*  *x*0  

*a*

* + уравнения директрис

*y*  *y*  *b* (*x*  *x* ) – уравнения асимптот

0 *a* 0

*x*

*y*

*B*2

*M*

*y*0

*F*1 *A*1

*A*2 *F*2

*O*

*x*0

*С*

*B*1

**Замечание 2.3.** Сопряженная гипербола с центром в точке *С*(*x*0;*y*0), с осями симметрии параллельными осям координат имеет уравнение

(*x*  *x* )2 ( *y*  *y* )2

 0  0  1

(**2.9**)

*a*2 *b*2

*x*

*y*

*B*2

*M*

*y*0

*A*1

*A*2

*O*

*x*0

1

*B*

*С*

Для сопряженной гиперболы написать все формулы самостоятельно **!**

**Пример 2.1.** Дано уравнение гиперболы 4*x*2  *y*2  1. Определить полуоси

гиперболы, координаты вершин и фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис и асимптот. Сделать рисунок.

*Решение*. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду (2.1):

*x*2  *y*2 

тогда

*a*2  1 , *a*  1 и *b*2  1, *b*  1 . Координаты вершин:

4 2

*A*1 (0, 5; 0), *A*2 (0, 5; 0) .

1

1/ 4 1 ,

Используем формулу (2.2)

*c*2  *a*2  *b*2  1 1  5 ,

4 4

*c*  5 . Координаты фокусов

2



5

*F* ( 5 ; 0), *F* ( 5 ; 0) . Эксцентриситет находим по формуле (2.4):   *c* 



5 : 1  .

1 2 2 2

*a* 2 2

Уравнения директрис находим по формуле (2.5.)

Уравнения асимптот находим по формуле (2.3)

*x*  *a* ,



*y*  *b x* ,

*a*

*x*  1 .

2



5

*y*  2*x* .

Построим гиперболу. Для этого отметим точки *А*1 и *А*2– вершины гиперболы на расстоянии *a*=0,5 влево и право от центра *О* и точки *B*1 и *B*2 на расстоянии *b* =1 вниз и вверх от центра *О*. Строим прямоугольник гиперболы и его диагонали – асимптоты гиперболы. Проводим гиперболу через вершины *А*1 и *А*2.

*y*

*F1*

*F2*

*A1 A2*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 |  |
|  | *O* |  |
|  |  |  |

*x*

*Ответ*: *a*  0, 5, *b*  1,

*A* (0, 5; 0), *A* (0, 5; 0) , *F* ( 5 ; 0), *F* ( 5 ; 0) ,   ,

*x*  ,

*y*  2*x* .

1 2 1 2 2 2



5

**Пример 2.2.** Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее



1

2 5

вершинами равно 24 и фокусы имеют координаты *F*1 (3; 8), *F*2 (3;18) .

*Решение*: Фокусы гиперболы расположены на прямой параллельной оси *Oy*,

(*x*  *x* )2 ( *y*  *y* )2

значит искомое уравнение будет иметь вид:  0  0  1 .

*a*2 *b*2

Найдем координаты центра гиперболы *С*(*x*0;*y*0). Так как центр гиперболы лежит посередине между фокусами, то используем формулы нахождения координат

середины отрезка:

*x*  *x*1  *x*2

и *y*  *y*1  *y*2 , где (*x*1;*y*1) и (*x*2;*y*2) – координаты

0 2 0 2

фокусов.

*x*  3  3  3,

0 2

*y*  8 18  5 , то есть центр гиперболы имеет координаты *С*(–3;5).

0 2

(3  3)2  (18  8)2

Из условия 2*b*  24  *b*  12 ,

2*c*  *F*1*F*2 

 26

 *c*  13 . Используем

формулу связи между *а*, *b* и *c* и найдем *а*:

*a*2  *c*2  *b*2  169 144  25 ,

*a*  5 .

Получаем уравнение гиперболы:

 (*x*  3)2  ( *y*  5)2  1 .

25 144

*Ответ*:

 (*x*  3)2  ( *y*  5)2  1 .

25 144

**Пример 2.3.** Определить и построить линию

*y*  3  1

2

*x*2  2*x*  5

*Решение*: Перенесем 3 в левую часть

*y*  3  1

2

*x*2  2*x*  5 , так как справа стоит

неотрицательное число, то

*y*  3  0 ,

*y*  3 .

Возведем обе части уравнения в квадрат

( *y*  3)2  1 (*x*2  2*x*  5) ,

4

( *y*  3)2  1 (*x*2  2*x*  5)  0 . Дополним до полного квадрата (формула (1.9))

4

( *y*  3)2  1 (*x* 1)2 1 5  0 ,

4

( *y*  3)2  1 (*x* 1)2 1  0 ,

4

( *y*  3)2  1 (*x* 1)2  1 4

Получаем уравнение

 (*x* 1)2  ( *y*  3)2 

4 1

– уравнение сопряженной гиперболы с

центром в точке *С*(1;3) и полуосями *a*=2, *b*=1. Исходное уравнение определяет

1

верхнюю половину гиперболы, так как *y*  3 .

*x*

*y*

*B*2

*B*1

*O*

1

3 *С*

*Ответ*: Верхняя половина сопряженной гиперболы с центром в точке *С*(1;3).

## §3. Парабола

**Определение 3.1.** *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых, расстояние до данной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до данной прямой, называемой директрисой.

*x*

*D*   *p* ; *y* 





2





*M*(*x*;*y*)

*O*

*F* ( *p* ; 0) 2

*x*  *p*

2

Пусть расстояние между фокусом и директрисой равно *p* и фокус лежит на

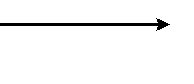
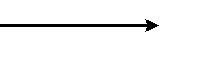
оси *Ox*. Тогда координаты фокуса

*F*  *p* ;0  и уравнение директрисы *x*  *p* . Если

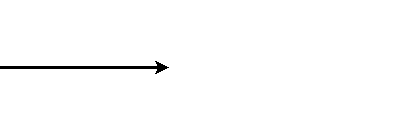
 2  2

произвольная точка

 

*M* (*x*; *y*) с текущими координатами принадлежит параболе,



то согласно определени:



*DM*   *x* 

 *p* 2

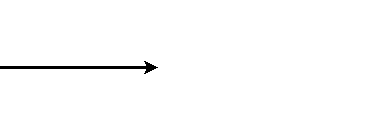


2 



*FM*  *DM*

. Вычислим длины векторов *FM* и *DM* :

*FM*  {*x* 

*p* ; *y*},

2

*DM*  {*x* 

*p* ; 0},

2

*FM* 

 *x* 





*p* 2



2



 *y*2 , .

Упростив уравнение

 *p* 2

 *x*    *y*2



2 

*каноническое уравнение параболы*: *параболы*.



*y*2  2 *px*

 *p* 2

 *x* 



2 



, возведя его в квадрат, получим (**3.1**), где *p* называется *параметром*

*x*

*y*

*D*   *p* ; *y* 





2





*M*(*x*;*y*)

*O*

*F* ( *p* ; 0) 2

*x*  *p*

2

Парабола имеет одну ось симметрии. В случае уравнения (3.1) ось симметрии – ось *Ox*, *ветви параболы направлены вправо*. Точка *О*(0;0) называется *вершиной параболы*.

Исходя из определения для всех точек параболы выполняется

*r*    1 , где *r* –

*d*

фокальный радиус, *d* – расстояние от точек параболы до директрисы. Таким образом, эксцентриситет параболы равен 1.

*Оптическое свойство параболы*

Лучи света, исходящие из фокуса параболы после зеркального отражения от параболы идут параллельным пучком.

*O*

*F*

*x*

## Частные случаи расположения параболы

1. Парабола с вершиной в точке *O*(0;0), у которой *ветви направлены*

*влево*, имеет каноническое уравнение

*y*2  2 *px*

(**3.2**). Координаты

фокуса

*F*   *p* ; 0  и уравнение директрисы *x*  *p* .

 2  2

 

*y*

*F* ( *p* ; 0)

2

*x*

*x*  *p*

2

1. Парабола с вершиной в точке *O*(0;0), у которой *ветви направлены*

*O*

*вверх*, имеет каноническое уравнение

*x*2  2 *py*

(**3.3**). Координаты фокуса

 *p*  и уравнение директрисы *y*   *p* .

*F*  0; 

  2

2

*x*

*y*

*F* (0; *p* )

2

*O*

*y*   *p*

2

1. Парабола с вершиной в точке *O*(0;0), у которой *ветви направлены вниз*,

имеет каноническое уравнение

*x*2  2 *py*

(**3.4**). Координаты фокуса

  *p*  и уравнение директрисы *y*  *p* .

*F*  0; 

  2

2

*x*

*y*

*y*  *p*

2

*O*

*F* (0;  *p* )

2

1. Уравнение параболы с вершиной в точке *С*(*x*0;*y*0), у которой ось параллельна оси *Ох*:

0 0

–ветви параболы направлены вправо:

( *y*  *y* )2  2 *p*(*x*  *x* )

(**3.5**)

координаты фокуса:

  *p* ; *y*

 , уравнение директрисы

*x*  *x*  *p*

*F*  *x*0

2 0  0 2

 

–ветви параболы направлены влево:

( *y*  *y* )2  2 *p*(*x*  *x* )

0 0

(**3.6**)

координаты фокуса:

  *p* ; *y*  , уравнение директрисы *x*  *x*  *p*

*F*  *x*0 2 0  0 2

 

Уравнение параболы с вершиной в точке *С*(*x*0;*y*0), у которой ось параллельна оси *Оy*:

–ветви параболы направлены вверх:

(*x*  *x* )2  2 *p*( *y*  *y* )

(**3.7)**

координаты фокуса, уравнение директрисы самостоятельно **!**

0 0

–ветви параболы направлены вниз:

(*x*  *x* )2  2 *p*( *y*  *y* )

(**3.8**)

координаты фокуса, уравнение директрисы самостоятельно **!** Параметр параболы *p* – расстояние от фокуса до директрисы параболы.

2*x*  6

0 0

**Пример 3.1.** Определить и построить линию а)

*x*  

3  *y* ; б)

*y*  2 

а) *x*2  3  *y* , вынесем коэффициент при y за скобку *x*2  ( *y*  3)

Используем уравнение параболы (3.8.): вершина параболы в точке *С*(0;3) ветви направлены вниз. Параметр параболы *p* равен 0,5. Исходное уравнение определяет левую половину параболы.

*x*

*y*

*С* 3

*O*

б) *y*  2   2*x*  6

( *y*  2)2  2*x*  6 , ( *y*  2)2  2(*x*  3)

Используем уравнение параболы (3.5): вершина параболы в точке *С*(–3;–2), ветви направлены вправо. Параметр параболы *p* равен 1. Исходное уравнение определяет нижнюю половину параболы.

*x*

*y*

–3

*O*

–2

**Пример 3.2.** Составить уравнение параболы с фокусом

*F* 3;1 и

директрисой *y*  5 . Сделать рисунок.

Параметр параболы

*p*  4

(расстояние от фокуса до директрисы).

Вершина параболы лежит посередине между фокусом и директрисой

*C* 3;3 . Используем уравнение (3.8.), т.к. ветви направлены вниз:

(*x*  *x* )2  2 *p*( *y*  *y* )

0 0

(*x*  3)2  8( *y*  3)

*x*



*y*

*O*

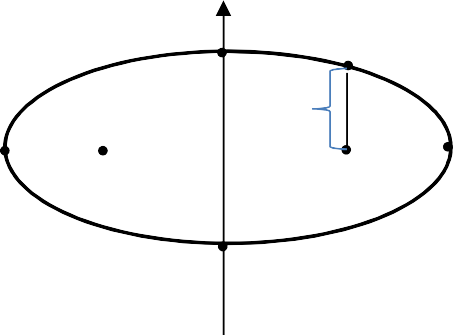
*Фокальный параметр кривой 2-го порядка*

**Определение 3.2.** Длина отрезка, перпендикулярного оси кривой один конец которого совпадает с фокусом называется параметром кривой второго 2-го порядка.

Вывод формулы для параметра эллипса:

*y*

*x*



*p*

*F1*

*O*

*F2*

*x*2 *y*2

*c*2 *y*2

2 2 

*c*2 



*a*2 *b*2

 1 - уравнение эллипса ,

*xF*  *c* 



*a*2 *b*2

 1 

*y*  *b*

1  

 

*a*2

*y*2  *b*2

 *b*2   *b*2 *a a*

. Таким образом, параметр эллипса

*p*  *b* .

*a*

2

Для гиперболы вывести самостоятельно **!**

2 *y*

**§4. Уравнения кривых второго порядка в полярных координатах** *Уравнение эллипса*

Пусть полюс – фокус, полярная ось – фокальная ось , направлена в противоположную сторону от ближайшей директрисы.

*x*

*y*

*ρ*

*M*(*x;y*)

*O*

*F1*

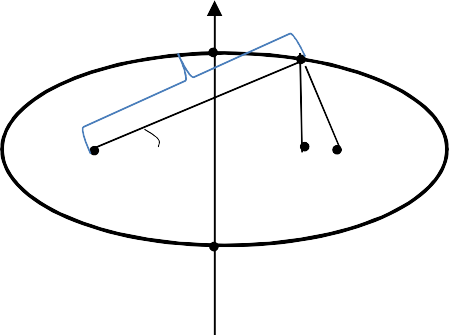
*φ O*

*M1*

*F2*

*P*

*a*   *x*  



––––→

*r*1  *F*1*M*

 *a*  *cx* 

*a*

*F*1*M*1  *c*  *x*   cos 

*x*  *c*   cos

  *a*   (*c*   cos)   (1  cos)  *a*  *c*

*c*2 *a*2  *c*2 *b*2

*a*  *c*  *a*     *p*

*a a a*

 (1  cos)  *p* 

 *p*

1  cos



(**4.1.**)

Формула (4.1.) уравнение эллипса в полярных координатах.

**Замечание 4.1.** Уравнение (4.1) является уравнением для правой ветви гиперболы. Вывести уравнение для левой ветви гиперболы. Самостоятельно **!** *Уравнение параболы* получается из уравнения (4.1.) при   1

 *p*



1 cos

(**4.2.**) уравнение параболы в полярных координатах.

**§5. Поверхности второго порядка Определение 5.1.** Алгебраической поверхностью второго порядка

называется поверхность, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид:

*Ax*2  *By*2  *Cz*2  2*Dxy*  2*Exz*  2*Fyz*  *Gx*  *Hy*  *Iz*  *K*  0 (**5.1.**), где *А*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F, G,*

*H, I, K* – вещественные коэффициенты, причем *A*2  *B*2  *C*2  *D*2  *E*2  *F* 2  0 .

Уравнение (5.1.) может определять, так называемую вырожденную поверхность (пустое множество точек, точку, плоскость, пару плоскостей).

Если же поверхность невырожденная, то уравнение (5.1.) определяет одну из поверхностей: эллипсоид, гиперболоид (однополостный и двуполостный), параболоид (эллиптический и гиперболический), конус и цилиндр (эллиптический, гиперболический, параболический).

1. Эллипсоид:

*x*2  *y*2  *z*2 

(**5.2.**)

*a*2 *b*2 *c*2

Если *a*  *b*  *c*  *R*

1

сфера:

*x*2  *y*2  *z*2  *R*2

*y*

*z*

О

*x*

1. Гиперболоид

а) однополостный

1

*x*2  *y*2  *z*2 

(**5.3.**)

*a*2 *b*2 *c*2

*y*

*z*

О

*x*

б) двуполостный

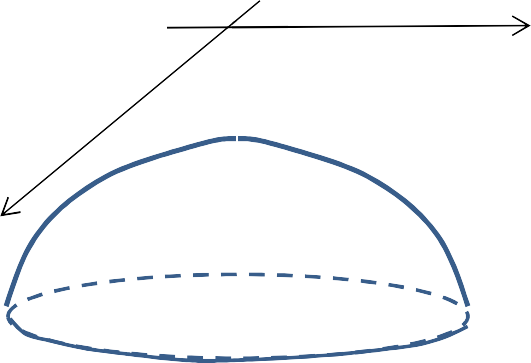
*x*2  *y*2  *z*2  

(**5.4.**)

*a*2 *b*2 *c*2

1

*y*



*z*

О

*x*

1. Конус

*x*2  *y*2  *z*2 

0

(**5.5.**)

*a*2 *b*2 *c*2

*y*

*z*

О

*x*

*x*2 *y*2

1. Параболоид а) эллиптический

*z*  

*a*2 *b*2

*z*

О

(**5.6.**)

*y*

*x*

*x*2 *y*2

б) гиперболический

*z*  

*a*2 *b*2

(**5.7.**)

*z*

О

*y*

*x*

1. Цилиндры второго порядка

а) эллиптический

*x*2  *y*2 

(**5.8.**)

*a*2 *b*2

1

*y*

*z*

О

*x*

б) гиперболический

*x*2  *y*2 

(**5.9.**)

*a*2 *b*2

1

*y*

*z*

О

*x*

в) параболический

*y*2  2 *pz*

(**5.10.**)

*y*

О

*x*

*z*

**Замечание 5.1.** Если в уравнении поверхности отсутствует одна из переменных, то поверхность является цилиндром и образующие параллельны той оси, которая соответствует отсутствующей переменной.

**§6. Цилиндрическая и сферическая системы координат** а) цилиндрические координаты

*y*

*z*

*M*(*ρ;φ;z*)

О

*φ*

*ρ*

*x*

*x*   cos

 *y*   sin



*z*  *z*



(**6.1.**) – связь цилиндрических координат с декартовыми.

*Координатные поверхности*:

  *const*(  0) – цилиндр, образующие которого параллельны оси *OZ*,

  *const*

*z*  *const*

* + полуплоскость
  + плоскость параллельная *OXY*.

б) сферические координаты

*y*



*z*

*M*(*r;φ;ϑ*)

*ϑ*

*r*

О

*φ*

*x*

*r*  0 ,   (*OM* ;*Oz*) , 0     .

*x*  *r* sin cos

 *y*  *r* sin sin  (**6.2.**) – связь сферических координат с декартовыми.



*z*  *r* cos



Доказать самостоятельно **!**

Координатные поверхности:

*r*  *const*(*r*  0) – сфера с центром в точке (0;0;0), радиуса *r* .

  *const*

  *const*

* + полуплоскость
  + бесконечный конус (половина конической поверхности).