Реберно и вершинно непересекающиеся пути. Реберные и вершинные разделители. Теоремы Менгера

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 30.04.2024

Содержание лекции

- Реберно- и вершинно-непересекающиеся пути.
- Реберные и вершинные разделители.
- Реберная версия теоремы Менгера.
- Вершинная версия теоремы Менгера.

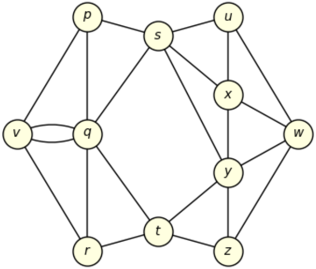
Непересекающиеся пути

Пусть $G = (V, E)$ – связный граф, v, w – две несмежные вершины.

Определение: Пути из v в w называются **реберно-непересекающимися**, если у них нет общих рёбер.

Определение: Пути из v в w – **вершинно-непересекающиеся**, если никакие два из них не имеют общей вершины (кроме v и w).

Задачи: Может быть поставлена задача о поиске максимального количества реберно-непересекающихся путей или максимального количества вершинно-непересекающихся путей.



4 реберно-непересекающихся пути и 2 вершинно-непересекающихся пути.

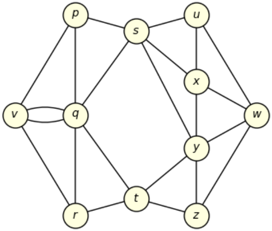
Разделители

Определение: v, w-**разделяющим множеством** (v, w-disconnecting set) графа G будем называть множество $\bar{E}$ ребер $G(E)$, такое, что каждый путь от v до w включает в себя ребро из $\bar{E}$.

Определение: v, w-**отделяющим множеством** (v, w-separating set) графа G является множество S вершин, отличных от v и w, таких, что каждый путь из v и w проходит через вершину из S.

Определения (альтернативные): Множество S рёбер/вершин графа G **разделяет/отделяет** две вершины v и w, если v и w принадлежат разным компонентам связности графа $G \setminus S$.

Замечание: Разделяющее множество рёбер мы называли разрезом.



$E_1 = \{ps, qs, ty, tz\}$, $E_2 = \{uw, xw, yw, zw\}$ – v, w-разделяющие множества
$V_1 = \{s, t\}$, $V_2 = \{p, q, y, z\}$ – v, w-отделяющие множества.

Реберная теорема Менгера

Задача: Хотим посчитать реберно-непересекающиеся пути от v в w. Если E представляет собой v, w-разделяющее множество с k ребрами, то число реберно-непересекающихся путей не может превышать k (иначе некоторое ребро из E будет включено более чем в один путь).

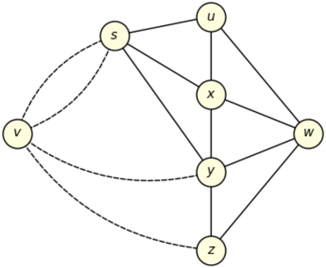
То есть, если E – v, w-разделяющее множество минимально возможного размера, то число реберно-непересекающихся путей равно k и в каждом таком пути имеется ровно одно ребро из E. Это, по сути, и есть реберная форма теоремы Менгера.

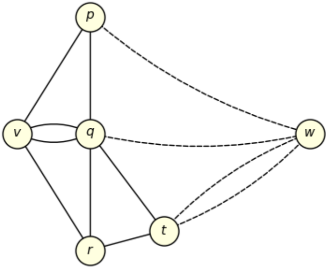
Теорема (Менгер; Ф.-Ф., 1955 | реберная): Максимальное количество реберно-непересекающихся путей, соединяющих две различные вершины v и w связного графа, равно минимальному числу ребер в v, w-разделяющем множестве.

Док-во: Максимальное число реберно-непересекающихся путей, соединяющих v и w, не превышает минимальное количество ребер в v, w-разделяющем множестве.
Равенство покажем индукцией по числу ребер в графе G. **База** очевидна. **Предположение и переход**: предположим, что $|E(G)| = m$ и что теорема верна для всех графов (с любым числом вершин + связность!) с менее чем m ребрами.

1°: Пусть $\exists$ v, w-разделяющее множество E минимального размера k, такое, что не все его ребра инцидентны v и не все инцидентны w (E_1 из примера).
Удалим из G ребра из E, останется два непересекающихся подграфа, V и W, содержащих вершины v и w соответственно.

Определим два подграфа G_1 и G_2 из G: сожмем V (каждое его ребро) до вершины v и получим G_1; сожмем W до w и получим G_2:





Ребер в G_1 и G_2 меньше, чем в G; E является v, w-разделяющим множеством минимального размера и для G_1, и для G_2.

По гипотезе индукции в G_1 имеется k реберно-непересекающихся путей от v до w; аналогично для G_2. Комбинируем пути в G_1 и G_2 и получаем k реберно-непересекающихся путей в G.

2°: каждое v, w-разделяющее множество минимального размера k состоит только из ребер, которые все инцидентны v, либо все инцидентны w (множество E_2 из примера).

В этом случае можно считать, что каждое ребро графа G содержится в некотором v, w-разделяющем множестве размером k, так как в противном случае удаление соответствующего ребра не влияет на величину k и мы можем воспользоваться гипотезой индукции для получения k реберно-непересекающихся путей.

Если P – произвольный путь от v до w, то он должен состоять либо из единственного ребра, либо из двух ребер, и поэтому может содержать не более одного ребра из любого v, w-разделяющего множества размером k. Удаляя из G ребра, принадлежащие P, мы получим граф, содержащий по крайней мере $k - 1$ реберно-непересекающихся путей (согласно гипотезе индукции). Вместе с P эти пути дают искомые k путей в G.

$\square$

Реберная теорема Менгера (и не только)

Задача: Хотим найти число вершинно-непересекающихся путей из v в w.

Теорема (Менгер, 1927 | вершинная): Максимальное число вершинно-непересекающихся путей, соединяющих две различные несмежные вершины, v и w, графа, равно минимальному числу вершин в v, w-отделяющем множестве.

Док-во: Докажем по индукции. **База**: в графе три вершины v, u, w и два ребра $(v, u), (u, w)$. Тогда максимальное количество вершинно-непересекающихся путей равно 1: (v, u, w), что равно минимальному числу вершин в v, w-отделяющем множестве: $\{u\}$.

Предположение и переход: Пусть справедливо для все графов, где не более n вершин и m ребер. Пусть V_1 – наименьшее множество вершин, разделяющее v и w, $|V_1| = k$. Необходимо разобрать три случая:

1. Пусть в V_1 есть вершины, несмежные с v и несмежные с w.
2. все вершины отделяющего множества V_1 смежны с v или w (пусть с v) и среди вершин V_1 есть вершина u, смежная одновременно и с v, и с w.
3. все вершины V_1 смежны с v или с w (пусть с v) и среди вершин V_1 нет вершин, смежных одновременно с v и w.

1°: в этом случае поступаем аналогично реберной теореме Менгера:

- Обозначим G_1 и G_2 два графа, которые получатся, если из исходного графа выкинуть вершины из V_1; Заметим, что они нетривиальны в силу существования вершин, не смежных с v и не смежных с w.
- Аналогично образуем два новых графа G_v и G_w: в исходном графе стянем G_1 в вершину v с сохранением ребер до V_1 и стянем G_2 в вершину w с сохранением ребер до V_1.

Тогда V_1 будет минимальным v, w-отделяющим множеством в G_v и G_w. При этом оба графа G_v и G_w содержат меньше вершин или ребер и для них справедливо предположение индукции. Теперь скомбинируем (состыкуем) участки k вершинно-непересекающихся путей в G_v и k вершинно-непересекающихся путей в G_w по вершинам из V_1 и получим k вершинно-непересекающихся путей в исходной графе G.

2°: Рассмотрим граф G' – граф G без вершины u. Тогда $V_1 \setminus \{u\}$ будет минимальным v, w-отделяющим множеством. По предположению индукции в графе G' есть $k-1$ вершинно-непересекающихся путей. Заметим, что путь (v, u, w) не пересекается с этим путями по вершинам. Тогда, добавив этот путь к $k-1$ вершинно-непересекающемуся пути из G', получим k вершинно-непересекающихся путей в исходной графе G.

3°: Рассмотрим кратчайший вершинно-непересекающийся путь $(v, u_1, u_2, \ldots, w)$. Заметим, что $u_2 \notin V_1$ иначе вершинно-непересекающийся путь $(v, u_2, \ldots, w)$ был бы короче. Рассмотрим новый граф G', образованный из G стягиванием u_2 в u_1. Тогда V_1 будет v, w-отделяющим множеством в G'. По предположению индукции в G' есть k вершинно-непересекающихся путей. По построению G' пути, не пересекающиеся в G', не пересекаются и в G. Таким образом, в G есть k вершинно-непересекающихся путей.

Следствия

Определение: Граф называется реберно k-связным (или k-реберно-связным), если удаление любых $k-1$ ребер оставляет граф связным.
Следствие: Граф G является k-реберно-связным тогда и только тогда, когда любые две различные вершины G соединяются по крайней мере k реберно-непересекающимися путями.

Определение: Граф G называется k-связным, если k – наибольшее из чисел, таких, что каждая пара несмежных вершин соединена не менее чем k вершинно-непересекающимися простыми путями.
Определение (альтернативное): Граф G называется вершинно k-связным (или k-связным), если удаление любых $k-1$ вершин оставляет граф связным.
Следствие: Граф G с как минимум $k+1$ вершиной является k-связным тогда и только тогда, когда любые две различные вершины G соединяются по крайней мере k вершинно-непересекающимися путями.