Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in \mathring{U}_\delta(a)\ f(x) \in U_\varepsilon(b).$

Гейне: $\forall x_n: x_n \in \mathring{U} a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$

Д-ть: Коши равносильно Гейне.

Д-во: 1) К. $\Rightarrow$ Г. Известно: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x: 0 < |x - a| < \delta \ |f(x) - b| < \varepsilon$

По опред-ю предела последоват.: $\forall \delta > 0\ \exists N: \forall n \geq N\ |x_n - a| < \delta$

в том числе

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N\ 0 < |x_n - a| < \delta\ |f(x_n) - b| < \varepsilon$ ■

2) Г. $\Rightarrow$ К. Известно: $\forall x_n: x_n \in \mathring{U}(a)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$

Пусть опр. по Коши не выполняется, т.е.:

$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0: \exists x: 0 < |x - a| < \delta\ \ |f(x) - b| \geq \varepsilon.$

в т.ч. x_n

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N\ |f(x_n) - b| < \varepsilon.$

$$\begin{cases} \forall x_n\ \exists \delta > 0: 0 < |x_n - a| < \delta \\ \forall \delta > 0\ \exists N: \forall n \geq N\ |x_n - a| < \delta \end{cases} \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \text{ и } x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} b$$

Получаем противор., т.к. $f(x_n) \to b$, но $|f(x) - b| \geq \varepsilon \Rightarrow$ К. вып. ■