Задача о назначениях. Венгерский метод.

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 07.05.2024

Содержание лекции

- Задача о назначениях: постановка задачи, ''допустимые'' преобразования матрицы весов.
- Венгерский метод (Кун-Кёниг-Эгервари) построения решения и его обоснование.

Постановка задачи

Пусть на двудольном графе G задана функция веса $l:\ E(G) \to \mathbb{N}_0$.
Заведём матрицу L размера $n \times n$ такую, что $\forall e \in E(G) = ij$ будет

$$L[i,j] = l(e).$$

Определение: Весом паросочетания M будем называть сумму весов ребер, входящих в это паросочетание: $w(M) = \sum\limits_{e \in M} l(e)$.

Задача о назначениях: построение максимального паросочетания минимального веса.

Замечание: решаем задачу о назначениях для полного двудольного графа с долями равной мощности.

Формально: пусть G – полный двудольный граф с долями I и J, $|I| = |J| = n$. Нужно построить такую биекцию $\phi:\ I \to J$, что $l(\phi) = l(M)$ минимален, где $M = \big\{e = (i, \phi(i)) \mid i \in I\big\}$.

Допустимые преобразования

Лемма 1: $\forall i_0 \in I, \alpha \in \mathbb{Z}$ пусть $L'[i,j] = L[i,j] + \alpha$, если $i = i_0$ и $L'[i,j] = L[i,j]$ иначе. Тогда $\forall \phi : I \to J$ – биекция: $l'(\phi) = l(\phi) + \alpha$.
Замечание: При добавлении к строке матрицы L числа α вес любого максимального паросочетания увеличится на α.

Док-во: в каждом максимальном паросочетании ровно одно ребро выходит из вершины i_0, и его вес увеличился на α, а веса ребер, выходящих из других вершин, не изменились.

Лемма 2: Аналогично для столбцов.

Определение: Преобразования матрицы L, описанные в леммах 1 и 2, будем называть **допустимыми**.

Замечание: пусть L' получена из L конечной последовательностью допустимых преобразований. Тогда, если ϕ_1, ϕ_2 – максимальные паросочетания, $l(\phi_1) \leq l(\phi_2) \Leftrightarrow l'(\phi_1) \leq l'(\phi_2)$.

Лемма 3: Если веса всех ребер графа неотрицательны и некоторое полное паросочетание состоит из ребер нулевого веса, то оно является оптимальным.

Венгерский метод решения задачи о назначениях

Шаг 1: в каждой строке найдем минимум и вычтем его из этой строки. Затем сделаем то же самое для столбцов. Получается матрица L_0, в каждой строке и каждом столбце которой есть хотя бы один ноль.

Шаг 2: Рассмотрим $G_0 \leq G$ такой, что $G_0 = (V(G), E_0)$, где $E_0 = \left\{e \in E(G) \mid l_0(e) = 0\right\}$. ϕ_0 – наибольшее паросочетание на G_0. ϕ_0 задаёт $M_0 \subseteq E(G)$ и C_0 – контролирующее множество для G_0, причем $|M_0| = |C_0|$ (теорема Кенига).

Если $|M_0| = n$, то решение найдено (по лемме 3)

Если $|M_0| < n$, то тогда $C_0 = I_0 \cup J_0, I_0 \subseteq I, J_0 \subseteq J$.
$\delta := \min\limits_{i \notin I_0, j \notin J_0} L_0[i,j]$ – вес минимального ребра, не контролируемого C_0 и минимальный ненулевой вес ребра в L_0.

$\forall i \notin I_0\ L_0'[i,j] = L_0[i,j] - \delta\ \forall j \in J$ и $\forall j \in J_0\ L_1[i,j] = L_0'[i,j] + \delta\ \forall i \in I$. Вычли δ из всех неподконтрольных строк, а потом прибавили ко всем подконтрольным столбцам.

$\forall \psi$ – наиб. паросочетание в $G:\ l_1(\psi) = l_0(\psi) - \delta(n - |I_0|) + \delta|J_0| = l_0(\psi) - \delta(n - (|I_0| + |J_0|)) = l_0(\psi) - \delta(n - |C_0|) < l_0(\psi)$, т.к. $|C_0| < n$.

Идём к шагу 1 и т.д. Алгоритм сходится (вес паросочетания уменьшается).

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 6 \\ 15 & 3 & 13 & 7 \\ 13 & 13 & 15 & 10 \\ 3 & 14 & 12 & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 12 & 0 & 10 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 12 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Ищем в текущем графе полное паросочетание из ребер нулевого веса. То есть ищем "независимые" нули. Его нет $\Rightarrow$ нужно модифицировать матрицу.

$|M_0| = 3$, $|C_0| = I_0 \cup J_0, I_0 = \{2, 3\}, J_0 = \{1\}$.

$$L_0 = \begin{pmatrix} 8 & \color{red}{2} & 5 \\ 11 & 4 & 14 \end{pmatrix}, \ \delta = \min_{i \in \{1,4\}, j \in \{2,3,4\}} L_0[i,j] = 2.$$

Вычитаем из неподконтрольных строк и прибавляем к подконтрольным столбцам a.k.a в сокращенной матрице вычли, а добавили в элементы на пересечениях вычеркнутых строк и столбцов.

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 9 & 2 & 12 \end{pmatrix}. \ L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & \color{red}{0} & 3 \\ 14 & \color{red}{0} & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & \color{red}{0} \\ \color{red}{0} & 9 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$