Пусть $f$ монотонна на $<a,b>$. Тогда:

1) $f$ не может иметь разрыва 2-го рода

2) $f$ непр. $\Longleftrightarrow$ $f(<a,b>)$ – промеж.

$\nearrow$ работает в обе стороны в отл. от леммы

Д-во: 1) Возьмем $x_0 \in <a;b>$, и НУО $f\nearrow$.

$f\nearrow$ на $<a,x_0>$ и огр. сверху $f(x_0)$.

$f\nearrow$ на $<x_0,b>$ и огр. снизу $f(x_0)$.

Тогда из т. о предел монотонной ф-ии

Существуют конечные пределы:

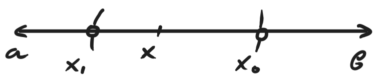
$f(x_0-0) = \sup <a,x_0>$ и $f(x_0+0) = \inf <x_0,b>$

$\Rightarrow$ не м.б разрыва 2-го рода (левый и правый $\nexists$ // $= \pm\infty$)

2) $\Rightarrow$: известно из леммы о сохранении промеж.

$\Leftarrow$: Д-ем $f(x_0-0) = f(x_0)$

Выберем ещё одну т. $x_1 \in <a;x_0>$, а затем ещё одну $x \in (x_1,x_0)$




Т.к. $f\nearrow$, то $f(x_1) \le f(x) \le f(x_0)$

$x \to (x_0-0)$. Т.к. ф-я непр.: $f(x) \to f(x_0-0)$.

Тогда $f(x_1) \le f(x_0-0) \le f(x_0)$.

Предположим, что $f(x_0-0) \ne f(x_0)$ (т.е. $<$)

Возьмем $y$: $y \in (f(x_0-0), f(x_0))$ тогда точно известно, что $y \in (f(x_1), f(x_0))$.

По условию $f(<a,b>)$ – промежуток, тогда по лемме о хар-ке промеж. $[f(x_1); f(x_0)] \subset f(<a,b>)$

Значит $\exists x : f(x) = y$

1. $x \in <a;x_0)$. Тогда $f(x) \le \overset{\sup f(<a,x_0))}{\overset{\parallel}{f(x_0-0)}} < y$

2. $x \in [x_0;b>$. Тогда $f(x) \ge f(x_0) > y$

Получаем противоречие, т.к. одновременно имеем $f(x) = y$ и $f(x) \ne y \Rightarrow f(x_0-0) = f(x_0)$ ■

$f(x_0+0)$ доказыв. аналогично.