Антицепи. Теорема о существовании разбиения на антицепи. Теорема Дилуорса

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 10.10.2023

Содержание лекции

В предыдущих сериях:

- Теорема о существовании топологической сортировки
- Цепь, путь, расписание
- Теорема о кратчайшем расписании

Сегодня:

- Антицепи. Теорема о существовании разбиения на антицепи
- Лемма Дилуорса
- Задача о построении наибольшей возрастающей подпоследовательности
- Теорема Дилуорса

Антицепи

Опр: A – произвольное множество, строго частично упорядоченное отношением R. $X \subseteq A$ называют **антицепью**, если $\forall x, y \in X\ (x, y) \notin \overline{R}(X)$

Опр: **Высота** множества – максимальная глубина элемента в нём.
Утв: Всякое конечное частично упорядоченное множество высоты h можно разбить на h антицепей.
Зам: Кратчайшее расписание является таким разбиением на антицепи.

Лемма Дилуорса: Во всяком конечном частично упорядоченном множестве A, $|A| = n\ \forall t \in 1 : n$ существует либо цепь длины $> t$, либо антицепь длины $\geq \frac{n}{t}$.

Док-во: От противного. Пусть максимальная цепь в A имеет длину $\leq t \Rightarrow$ A по предыдущему утверждению можно разбить на $\leq t$ антицепей.
Пусть l – длина самой длинной из них и $l < \frac{n}{t}$. Тогда в A не может быть больше, чем $l \times t$ элементов. Но тогда $n = |A| \leq l \times t < \frac{n}{t} \times t = n$ (?!)

$\square$

Последовательности

$S = \{3, 2, 1, 8, 9, 4, 5, 6, 7\}$ – последовательность.
$S_1 = \{2, 1, 4, 6\}$ – подпоследовательность.
$S_2 = \{1, 4, 5, 6\}$ – возрастающая подпоследовательность.
$S_3 = \{3, 2, 1\}$ – убывающая подпоследовательность.

$<_S$ – бинарное отношение на S. Тогда $a <_S b \Leftrightarrow a$ предшествует b в последовательности S.

$\prec$ – бинарное отношение на S. Тогда $a \prec b \Leftrightarrow \begin{cases} a <_S b \\ a < b \end{cases}$

Цепь в S (частично упорядоченной $\prec$) – возрастающая подпослед-ть.
Антицепь – убывающая подпоследовательность.

Возрастающая подпоследовательность наибольшей длины

Алгоритм: начнём строить разбиение последовательности на антицепи (убывающие подпоследовательности) следующим образом: проходя по последовательности слева направо, будем добавлять каждый следующий элемент последовательности в минимальный по номеру элемент разбиения, в который можем.

Пример: дана последовательность $3, 5, 8, 9, 4, 6, 1, 2, 7, 10$.
$3 \to \{3\}; 3 \prec 5 \Rightarrow \{3\}, \{5\}$; $5 \prec 8 \Rightarrow \{3\}, \{5\}, \{8\}$; $\{3\}, \{5\}, \{8\}, \{9\}$;
$\{3\}, \{5, 4\}, \{8\}, \{9\}$; $\{3\}, \{5, 4\}, \{8, 6\}, \{9\}$; $\{3, 1\}, \{5, 4\}, \{8, 6\}, \{9\} \ldots$
Итого: $\big\{\{3, 1\}, \{5, 4, 2\}, \{8, 6\}, \{9, 7\}, \{10\}\big\}$ – разбиение на антицепи.

Строим цепь: $h := |\Lambda|$, $\forall i \in 2 \ldots h\ \forall a \in \Lambda_i\ \exists \mathrm{prev}(a)$ – элемент, лежащий в $\Lambda_{i-1} : \mathrm{prev}(a) \prec a$ (если нет, то по алгоритму a попал бы в Λ_{i-1}).
Цепь A длины h: A_h – любой элемент Λ_h; $\forall i \in 2 \ldots (h-1)\ A_i = \mathrm{prev}(A_{i+1})$

В S $\exists$ цепь длины $h \Rightarrow S$ нельзя разбить менее, чем на h антицепей (по принципу Дирихле) $\Rightarrow$ разбиение Λ является минимальным.
Т.к. Λ минимально, то $\nexists$ цепи длины $> h$ (иначе два элемента более длинной цепи попадут в один элемент разбиения Λ)

Т.о. научились строить самую длинную возрастающую подпослед-ть и минимальное разбиение на убывающие подпоследовательности.

Теорема Дилуорса

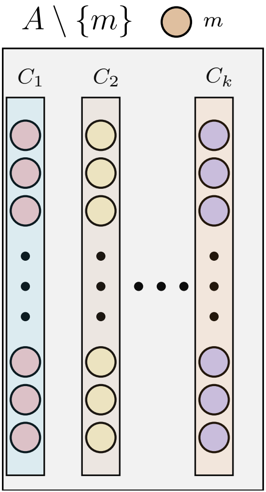
Теорема Дилуорса: Пусть A – конечное частично упорядоченное множество. Обозначим через m наименьшее число непересекающихся цепей, которыми может быть покрыто множество A, а через M – наиб. мощность антицепи в A. Тогда $M = m$ (размер наибольшей антицепи равен размеру наименьшего разбиения на непересекающиеся цепи).

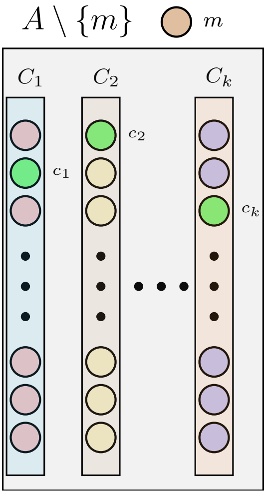
Док-во: Для любой антицепи c в A справедливо $|c| \leq$ кол-во цепей в любом разбиении. От противного: если существует разбиение на цепи Λ такое, что $|c| > |\Lambda|$, то тогда по принципу Дирихле найдутся два элемента антицепи c, которые лежать одной цепи из разбиения Λ (?!).

$\forall c$ – антицепь: $|c| \leq |c_{\max}|$, $\forall\ \Lambda$ – разбиение: $|\Lambda_{\min}| \leq |\Lambda| \ \Rightarrow$ $|c_{\max}| \leq |\Lambda_{\min}|$. Если найдется пара $c_0, \Lambda_0 : \ |c_0| = |\Lambda_0|$, то c_0 – это $c_{\max}$, $\Lambda_0 = \Lambda_{\min}$.
Покажем строгое равенство методом математической индукции.

База индукции: $A = \varnothing$ или $R = \varnothing$, $|A| = 1$ – очевидны.
Рассмотрим случай $|A| \geq 2, R \neq \varnothing$, $m :=$ максимальный в A.
Предположение индукции: теорема справедлива для любого множества $B : |B| < |A|$.

Переход: $A \setminus \{m\}$ разбивается на цепи $C_1, \dots, C_k$ (см. Рис. 1) и в $A \setminus \{m\}$ существует хотя бы одна антицепь размера k.





Каждая антицепь размера k пересекается с каждой цепью разбиения по одному элементу (по принципу Дирихле). Определим $\forall i \in 1 : k \; c_i \in C_i$ – максимальный элемент C_i, который лежит в хотя бы в одной антицепи размера k (см. Рис. 2). Докажем, что $Y = \{c_1, \dots, c_k\}$ – антицепь.

$Y = \{c_1, \ldots, c_k\}$ – антицепь

Зафиксируем для каждого c_i какую-нибудь антицепь Y_i размера k: $c_i \in Y_i$. Тогда $\forall i \neq j \in 1:k\ |Y_i \cap C_j| = 1$ (антицепь длины k пересекается с каждой цепью разбиения ровно по одному элементу), обозначим $Y_i \cap C_j =: \{y_{ij}\}$. По определению $c_j : (y_{ij}, c_j) \in R$ (оба из цепи C_j и c_j – максимальный из принадлежащих антицепям длины k).
Предположим, что $(c_j, c_i) \in R \Rightarrow$ по транзитивности $(y_{ij}, c_i) \in R$ (?!) т.к. $c_i \in Y_i$ и $y_{ij} \in Y_i$, а Y_i – антицепь. Значит $(c_j, c_i) \notin R$.
Аналогичные рассуждения для $Y_j \cap C_i$ означают справедливость $(c_i, c_j) \notin R$. Таким образом, Y – антицепь, $|Y| = k$.

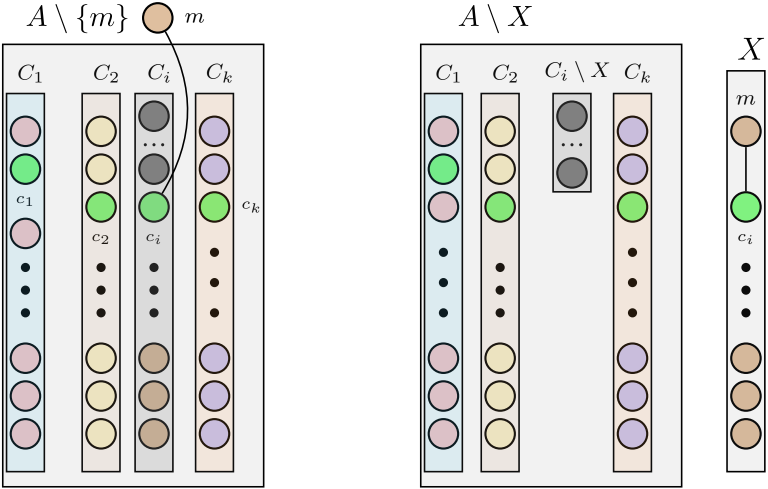
Вспомним про m – максимальный элемент A.
Заметим, что не существует $i : (m, c_i) \in R$, иначе получается противоречие с максимальностью m в множестве A.

Если не существует $i : (c_i, m) \in R$, то $Y \cup \{m\}$ – антицепь в A размера $k+1$, а $\left(C_1, \ldots, C_k, \{m\}\right)$ – разбиение A на $k+1$ цепь. В этом случае теорема доказана.

Рассмотрим далее случай $\exists i \in 1:k\ (c_i, m) \in R$.

Случай $\exists i \in 1 : k\ (c_i, m) \in R$

Рассмотрим $X \coloneqq \left\{x \in C_i : (x, c_i) \in R\right\} \cup \{m\}$. По построению это цепь.



Завершение доказательства теоремы Дилуорса

Заметим, что $A \setminus X$ не содержит антицепи длины k, т.к. любая антицепь длины k должна иметь один элемент в каждой цепи разбиения $A \setminus X$ на цепи $(C_1, \ldots, C_i \setminus X, \ldots, C_k$, но в $C_i \setminus X$ по определению c_i нет элементов, которые принадлежат какой-нибудь антицепи длины k (иначе c_i не макс. такой элемент цепи).

При этом $A \setminus X$ точно содержит антицепь размера $k - 1$ (это $Y \setminus \{c_i\}$) $\Rightarrow$ по предположении индукции $A \setminus X$ разбивается на $k - 1$ цепь. Добавляем к этому разбиению X и получаем разбиение исходного множества A на k цепей. $\square$

Альтернативное доказательство (необязательно)

$A = \varnothing$ или $R = \varnothing$, $|A| = 1$ – очевидны.
Рассмотрим случай $|A| \geq 2, R \neq \varnothing, \exists x \neq y \in A : (x, y) \in R$.
В таком множестве можно выбрать минимальный элемент m и максимальный M: $(m, M) \in R$, $m \neq M$. Почему?

Док-во: Рассмотрим произвольные $x, y \in A : x \neq y, (x, y) \in R$. Если y – максимальный, то $M := y$, иначе $\exists y_1 : (y, y_1) \in R$. "Увеличиваем" y_i пока не наткнемся на $y_{\max}$. Очевидно $y_{\max} \neq x$ (антисимметричность R). Тогда $M := y_{\max}$. Аналогично для m. ■

Рассмотрим $A \setminus \{m, M\}$, Y – антицепь наибольшей длины в A, $|Y| = s$.

1°: наибольшая антицепь в $A \setminus \{m, M\}$ имеет длину $s - 1$ ($s - 2$ не может, т.к. тогда в Y должны входить и m, и M, но $(m, M) \in R$).
тогда по предположению индукции: $A \setminus \{m, M\}$ разбивается на $s - 1$ цепь.
Добавляем $\{m, M\}$ и $\Rightarrow$ есть разбиение размера s для A.
Разбиения размера $s - 1$ для A быть не может, тк иначе макс. антицепь в A будет иметь размер $s - 1$.

2°: наибольшая антицепь V в $A \setminus \{m, M\}$ имеет длину s. Определим
$A^+ = \{a \in A : \exists v \in V \ (a, v) \in R\}$
$A^- = \{a \in A : \exists v \in V \ (v, a) \in R\}$

Докажем, что $A^+ \cap A^- = V$.
$V \subseteq A^+ \cap A^-$ по рефлексивности. Почему $A^+ \cap A^- \subseteq V$?

Пусть $\exists v_\pm \in (A^+ \cap A^-) \setminus V : \exists v_1, v_2 \in V : (v_\pm, v_1) \in R$ и $(v_2, v_\pm) \in R$, но по транзитивности $(v_2, v_1) \in R$, а V антицепь (?!)

Докажем, что $A^+ \cup A^- = A$.
Пусть $\exists v_\mp \in A \ \forall v \in V \ (v, v_\mp) \notin R, (v_\mp, v) \notin R$, но тогда $V \cup \{v_\mp\}$ – антицепь длины $s + 1$ (?!) с максимальностью V.

$m \notin A^-$, тк m – минимальный элемент в A, и при этом $m \notin V$, т.к. V строилось в $A \setminus \{m, M\} \Rightarrow m \in A^+$. Аналогично $M \in A^-$.

Итого: A^+ и A^- содержат $V \Rightarrow$ каждая цепь в A^+ и A^- пересекает V в одной точке, причем $\forall v \in V$ цепь $C_v^+ \subseteq A_+, v \in C_v^+$ заканчивается в v, а цепь $C_v^- \subseteq A_-, v \in C_v^-$ в v начинается $\Rightarrow A$ разбивается на цепи вида $C_v^+ \cup C_v^-$, которых ровно s штук, поскольку каждая из этих цепей проходит через свой элемент V.

■