Лемма о хар-ке промежутка.

$E \subset \mathbb{R}$; $E := \langle a, b \rangle \iff \forall x, y \in E : x < y$ вып.

$[x; y] \subset E$.

Д-во: $\Rightarrow$: Имеем: E - промежуток.

очевидно, верно 

$\Leftarrow$: Имеем $\forall x, y \in E : x < y$ $[x; y] \subset E$. (*)

Введем обозначен. $\inf E =: m$; $\sup E =: M$

Из опред. супремума и инфимума $\Rightarrow E \subset [m; M]$.

Д-ем, что $(m; M) \subset E$. Для этого возьмем произвольную т. $z \in (m; M)$. Тогда по опред. супр. и инфимума всегда $\exists x, y \in E : x < z < y$, но по усл. (*) $[x; y] \subset E$, а значит $z \in E$. Так мы доказали, что $\forall$ точка из промежутка (m, M) лежит в E.

$(m; M) \subset E \subset [m; M]$.

Тогда E один из промеж.: (m, M), $(m, M]$, $[m, M)$, $[m, M]$ ■

Лемма о сохранении промежутка

f - непр. на $\langle a, b \rangle \Rightarrow f(\langle a, b \rangle)$ – промежуток

Д-во: Возьмем $c, d \in f(\langle a, b \rangle)$. Тогда $\exists x_1, x_2$: $f(x_1) = c$, $f(x_2) = d$. Пусть $c < d$ (для определенности). Тогда по Т° Больцано-Коши о промежуточном значении $\forall y \in [c; d]\ \exists x : f(x) = y$, т.к. f-непрер. Тогда $[c; d] \subset f(\langle a, b \rangle)$ $\forall c, d \in f(\langle a, b \rangle)$

$\Rightarrow f(\langle a, b \rangle)$ - промежуток ■