f равномерно непрерывна на D, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in D\ \ |x_2 - x_1| < \delta\ \ |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

Т. Кантора: Если f непр. на замкн. огран. мн-ве, то ф-я равномерно непрерывна на этом мн-ве.

Д-во: f непрерывна з.о. K.

Предположим, что f не явл. равн. непр. на K:

$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta\ \ \exists x_1, x_2 \in K : \ |x_1 - x_2| < \delta\ \ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$

Возьмем последоват. $\delta_n \to 0$. Тогда $\exists x_n', x_n'' \in K$:

$|x_n' - x_n''| < \delta_n\ \ |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0$

Т.к. K-огр., то x_n' -огран. $\Rightarrow$ по принц. выб. Б.-В.

$\exists$ сходящ. x_{n_k}'. Пусть $x_{n_k}' \to x_0$.

$|x_{n_k}' - x_{n_k}''| < \delta_{n_k}$

$\underbrace{x_{n_k}' - \delta_{n_k}}_{\downarrow\, x_0} < x_{n_k}'' < \underbrace{x_{n_k}' + \delta_{n_k}}_{\downarrow\, x_0} \Rightarrow$ по т. о 2 милиц.

$x_{n_k}'' \to x_0$

Тогда x_0 - пред. т $\Rightarrow x_0 \in K$ (K-замкнут.)

f непр. на $K \Rightarrow f$ непр. в т. x_0 и $(x_{n_k}' \to x_0,\ x_{n_k}'' \to x_0)$

$\Rightarrow f(x_{n_k}') \to f(x_0)$ и $f(x_{n_k}'') \to f(x_0)$

Тогда $f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'') \to 0$

Для $\varepsilon_0\ \exists k_0 : \forall k > k_0\ \ |f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| < \varepsilon_0$?! с

предположением $\Rightarrow f$ равном. непрерывна ■