Если у матриц все строчки совпадают за исключ. 2 строк, то соотв. эл-ты этих строк имеют одинаковые алгебр. дополнения.

Д-во: Миноры получаются одинаковыми и снабжаются одинак. знаком $(-1)^{i+k}$ $\Rightarrow$ Алгебр. дополнения совпадают. ■

Разложением определителя по эл-там $j$-го столбца называют сумму произведений эл-тов $j$-го столбца на их алгебраические дополнения.

$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj} \quad \forall j \in 1:n$

Д-во:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots x_1 \ldots a_{1n} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} \ldots x_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$ где $x_1 \ldots x_n$ - перем.

Алгебр. дополнения эл-тов $a_{ij}$ и $x_i$ совпадают.

Каждый из $x_1 \ldots x_n$ входит в каждое произвед. 1 раз.

Тогда $|B| = S_1 + S_2 + \ldots S_n$, где $S_i$ - сумма произвед. $\ni x_i$.

Вынесем $x_i$: $|B| = x_1 \cdot T_1 + x_2 T_2 + \ldots + x_n T_n$.

$\forall i$ мы можем привести: $|B| = 0 \cdot T_1 + 0 \cdot T_2 + \ldots + 1 \cdot T_i + \ldots + 0 \cdot T_n = T_i$,

а матрица имеет строку с ед. ненул. эл-том $\Rightarrow |B| = \underline{A_{ij} = T_i}$

Тогда $|B| = x_1 \cdot A_{1i} + \ldots + x_n \cdot A_{ni}$. Поставим вместо $x_1 \ldots x_n$ $a_{1i} \ldots a_{ni}$: $B = A \Rightarrow |A| = a_{1i} \cdot A_{1i} + \ldots + a_{ni} \cdot A_{ni}$. ■