Сеть. Разрез. Поток. Теорема о величине потока. Теорема Форда-Фалкерсона

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 23.04.2024

Содержание лекции

- Сеть: определения и вспомогательные обозначения.
- Разрез, пропускная способность разреза.
- Поток: определение и лемма о величине потока.
- Теорема Форда-Фалкерсона, алгоритм построения наибольшего потока.
- Небольшое введение в экстремальные задачи.

Необходимые обозначения

Пусть есть граф $G = (V, E)$.
$\forall e \in E(G)$ $e = xy$ определим $\overrightarrow{e} = (e, x, y), \overleftarrow{e} = (e, y, x)$.

$\overrightarrow{E} := \big\{(e, x, y) : e = xy;\ x, y \in V(G); e \in E(G)\big\}$ – заметим, что сюда входят ребра в обе стороны.
Тогда $|\overrightarrow{E}| = 2|E(G)|$.

Для двух подмножеств множества вершин $X, Y \subseteq V(G)$ определим множество $\overrightarrow{E}(X, Y) := \big\{(e, x, y) : x \in X, y \in Y, (e, x, y) \in \overrightarrow{E}\big\}$.

Для любой функции $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}$ определим $\forall X, Y \subseteq V(G)$ значение $f(X, Y) = \sum\limits_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(X,Y)} f(\overrightarrow{e})$.

Сеть и поток

Пусть имеется произвольный неорграф G.
Определение: Вершины $s, t \in V(G)$, $s \neq t$ назовем **истоком** (source) и **стоком** (sink), если любая другая вершина лежит на пути из s в t.

Определение: Функция $c : \overrightarrow{E} \to \mathbb{N}_0$ на G – **пропускные способности** ребер.

Определение: (G, s, t, c) называют **сетью**.

Определение: Функция $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}$ – **поток** (flow) в сети (G, s, t, c), если:

- $\forall e \in E(G)\ f(\overrightarrow{e}) = -f(\overleftarrow{e})$ (антисимметричность, кососимметричность).
- $\forall v \in V(G), v \neq s, v \neq t\ f(\{v\}, V(G)) = 0$ (закон сохранения потока).
- $\forall \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}\ f(\overrightarrow{e}) \leq c(\overrightarrow{e})$ (ограничение пропускной способности).

Разрез. Лемма о величине потока

Определение: **Разрезом** (или $(s,t)-$разрезом) в сети (G,s,t,c) называют пару $(S,\bar{S})$, где $S \subset V(G)$, $\bar{S} := V(G) \setminus S$, $s \in S$, $t \notin S$.

Определение: $f(\{s\},V) =: |f|$ – **величина потока в сети**.

$$c(S,\bar{S}) = \sum_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(S,\bar{S})} c(\overrightarrow{e})$$ – **пропускная способность разреза**.

Лемма (о величине потока): $(S,\bar{S})$ – разрез в $G \Rightarrow f(S,\bar{S}) = |f|$.

Док-во: $f(S,\bar{S}) = f(S,V) - f(S,S) = f(\{s\},V) + f(S \setminus \{s\},V) - f(S,S)$.

Второе слагаемое обнуляется по второму свойству из определения потока, третье – по третьему (ведь для любого ребра, поток по которому мы будем прибавлять, мы будем прибавлять и поток по обратному ребру).

Лемма: $(S,\bar{S})$ – разрез в G. Тогда $|f| \leq c(S,\bar{S})\ \forall f$.

Док-во: $$|f| = f(S,\bar{S}) = \sum_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(S,\bar{S})} f(\overrightarrow{e}) \leq \sum_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(S,\bar{S})} c(\overrightarrow{e}) = c(S,\bar{S}).$$

Теорема Форда-Фалкерсона

Определение: **Минимальным разрезом** (minimum cut) называется разрез с минимально возможной пропускной способностью.
Определение: **Остаточная пропускная способность** (residual capacity) ребра $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$. Она всегда неотрицательна из-за условия на ограничение пропускной способности.
Определение: **Остаточная сеть** – граф $G_f = (V, E_f)$, где E_f – множество рёбер с положительной остаточной пропускной способностью.

Задача о максимальном потоке (maximum flow problem): найти поток f такой, что величина потока максимальна.

Теорема (Форда-Фалкерсона): Пусть в сети целые пропускные способности. Тогда величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза: $\max|f| = \min c(S, \bar{S})$.

Док-во: Уже знаем, что $\forall f,\ (S, \bar{S})$ справедливо $|f| \leq c(S, \bar{S})$.
f_0 – нулевой поток (поток на всех рёбрах равен 0).
Рассмотрим следующую итеративную процедуру: пусть есть f_n – целочисленный поток и $S_n = \left\{v \in V(G) \;\middle|\; (s = v_0, \dots, v_k = v) -\right.$ простой путь, $\left.(e_i, v_i, v_{i+1}) = \vec{e_i} \in \vec{E}, c(\vec{e_i}) - f_n(\vec{e_i}) > 0\right\}$ – множество вершин, достижимых из s простыми путями.

1°: $t \in S_n$, т.е. есть простой путь $(s = v_0, \ldots, v_k = t)$ из истока в сток. Обозначим $\varepsilon \coloneqq \min\limits_{i \in 0:(k-1)} (c(\overrightarrow{e_i}) - f_n(\overrightarrow{e_i}))$ и определим f_{n+1}:

- $f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = f_n(\overrightarrow{e}) + \varepsilon$, если $\exists\ j \in \overline{0:(k-1)}: \ \overrightarrow{e} = \overrightarrow{e_j}$,
- $f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = f_n(\overrightarrow{e}) - \varepsilon$, если $\exists\ j \in \overline{0:(k-1)}: \ \overrightarrow{e} = \overleftarrow{e_j}$,
- $f_{n+1}(\overrightarrow{e}) = f_n(\overrightarrow{e})$ иначе.

Проверкой определения убеждаемся, что f_{n+1} – поток.

$|f_{n+1}| = |f_n| + \varepsilon$, т.е. на каждой итерации величина потока увеличивается на положительное целое число, а поскольку поток ограничен сверху пропускной способностью минимального разреза, алгоритм сделает конечное количество шагов.

2°: если $t \notin S_n$, то $(S_n, \bar{S_n})$ – разрез, причём

$\forall\ \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(S_n, \bar{S_n}) : f_n(\overrightarrow{e}) = c(\overrightarrow{e}) \Rightarrow c(S_n, \bar{S_n}) = f_n(S_n, \bar{S_n}) = |f_n|$. $\square$

Замечание: Равенство величины максимального потока и пропускной способности минимального разреза доказано конструктивно. Использовавшийся в теореме алгоритм – **алгоритм Форда-Фалкерсона**.

Замечание: Алгоритм работает только для целых пропускных способностей. В противном случае он может работать бесконечно долго, не сходясь к правильному ответу!

Самостоятельно

Лемма: Сумма потоков из источника равна сумме потоков в сток.

Лемма: Максимальный поток положителен тогда и только тогда, когда существует путь из источника в сток, проходящий по рёбрам с положительной пропускной способностью.

Определение: **Увеличивающий путь** – путь $(s = u_1, u_2, \ldots, u_k = t)$ в остаточной сети и $c_f(u_i, u_{i+1}) > 0$.

Теорема: Поток максимален тогда и только тогда, когда нет увеличивающего пути в остаточной сети.