Т. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=a^x$, $a>0$, $a\ne 1$

1) При $a>1$ $f\uparrow$ на $\mathbb{R}$

При $a<1$ $f\downarrow$ на $\mathbb{R}$

2) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $\quad a^{x+y}=a^x a^y$

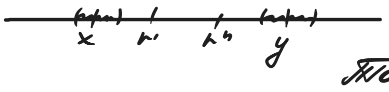
3) f - непрер. на $\mathbb{R}$

4) $f(\mathbb{R})=(0;\infty)$

Д-во: при $a>1$ ($a<1$ заменой)

1) Возьмем $x,y\in\mathbb{R}: x<y$. Выберем r' и r'': $x<r'<r''<y$. Тогда можно выбрать последоват.

$$\left.\begin{aligned}&\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall x_n\in U(x) \text{ и } \forall x_n<r',\ x_n\to x\\ &\{y_n\}_{n=1}^{\infty} : \forall y_n\in U(y) \text{ и } \forall y_n>r'',\ y_n\to y\end{aligned}\right\}\in\mathbb{Q}$$



Тогда $a^{x_n}<a^{r'}<a^{r''}<a^{y_n}$

$$\begin{array}{ccccccc} a^{x_n} & < & a^{r'} & < & a^{r''} & < & a^{y_n}\\ \downarrow & & & & & & \downarrow\\ a^{x} & \le & a^{r'} & < & a^{r''} & \le & a^{y}\end{array}$$

Значит $\forall x,y: x<y$ $\quad a^x<a^y$ ■

2) $x,y\in\mathbb{R}$. Возьмем $r'\to x$ и $r''\to y$ ($r',r''\in\mathbb{Q}$)

$$\begin{array}{ccccc} a^{r'+r''} & = & a^{r'} & \cdot & a^{r''}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ a^{x+y} & = & a^{x} & \cdot & a^{y}\end{array}$$ ■

3) $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x\in U_\delta(x_0)\quad |a^x-a^{x_0}|<\varepsilon$

$x_0-\delta<x<x_0+\delta \Rightarrow a^{x_0-\delta}<a^x<a^{x_0+\delta}$

Тогда $a^{x_0-\delta}-a^{x_0}<a^x-a^{x_0}<a^{x_0+\delta}-a^{x_0}$

$$a^{x_0}(a^{-\delta}-1)<a^x-a^{x_0}<a^{x_0}(a^{\delta}-1)$$

Будем искать δ в виде $\frac{1}{n}=\delta$.

$$\underbrace{a^{x_0}(a^{-\frac{1}{n}}-1)}_{\substack{\downarrow n\to\infty\\ 0<\varepsilon\Rightarrow>-\varepsilon}}<a^x-a^{x_0}<\underbrace{a^{x_0}(a^{\frac{1}{n}}-1)}_{\substack{\downarrow n\to\infty\\ 0<\varepsilon}}$$

Значит $-\varepsilon<a^x-a^{x_0}<\varepsilon$ ■

4) $f\uparrow$ на $\mathbb{R}$ (из п. 1) $\Rightarrow \sup f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

Пусть $x=n \Rightarrow f(n)=a^n$. ($a>1\Rightarrow a=1+\alpha$ при $\alpha>0$)

$(1+\alpha)^n\ge 1+n\cdot\alpha\to+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty=\sup f(x)$

$\inf f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

Пусть $x=-n\Rightarrow f(-n)=a^{-n}=\frac{1}{a^n}\to 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

По т. о сохранении промежутка ф-я принимает все значения между sup. и inf $\Rightarrow f(\mathbb{R})=\langle 0;\infty)$

Предположим, что $0\in f(\mathbb{R})$. Тогда $\exists x_0: a^{x_0}=0$, но $f\uparrow\Rightarrow$ из $x<x_0\Rightarrow a^x<a^{x_0}$, т.е. $a^x<0$?! ■

($a^x\ge 0$, т.к. $\inf=0$)