Пусть A, B, C – матрицы, где $\exists$ имеют смысл AB и BC. Тогда $(AB)C$ и $A(BC)$ тоже имеют смысл.

$$A = \underset{m}{\boxed{\quad\quad}}\, n \;;\; B = \overset{p}{\boxed{\quad\quad}}\, m \;;\; C = \overset{t}{\boxed{\quad\quad}}\, p$$

Д-во: $AB = \overset{p}{\boxed{\quad\quad}}\, n \;;\; C = \overset{t}{\boxed{\quad\quad}}\, p \Rightarrow (AB)C$ – имеет смысл

$BC = \overset{t}{\boxed{\quad\quad}}\, m \;;\; A = \overset{m}{\boxed{\quad\quad}}\, n \Rightarrow A(BC)$ – имеет смысл

Тогда $(AB)C$ и $A(BC)$ имеют размер. $n \times t$

Докажем, что эл-ты этих матриц равны:

$$A = \overset{m}{\boxed{\quad\quad}}\, n \;;\; B = \overset{p}{\boxed{\quad\quad}}\, m \;;\; C = \overset{t}{\boxed{\quad\quad}}\, p$$

Пусть $u_{ij} \in (AB)C = g_{i1} \cdot c_{1j} + \dots + g_{ip} \cdot c_{pj}$, где $g_{id} \in AB$

$u_{ij} = c_{1j} \cdot (a_{i1} \cdot b_{11} + \dots + a_{im} \cdot b_{m1}) + \dots + c_{pj}(a_{i1} \cdot b_{1p} + \dots + a_{im} \cdot b_{mp})$

Пусть $v_{ij} \in A(BC) = a_{i1} \cdot s_{1j} + \dots + a_{im} \cdot s_{mj}$

$v_{ij} = a_{i1}(b_{11} \cdot c_{1j} + \dots + b_{1p} \cdot c_{pj}) + \dots + a_{im}(b_{m1} \cdot c_{1j} + \dots + b_{mp} \cdot c_{pj})$.

Перегруппируем слагаемые u_{ij}, вынося $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$.

$u_{ij} = a_{i1}(b_{11} \cdot c_{1j} + \dots + b_{1p} \cdot c_{pj}) + \dots + a_{im}(b_{m1} \cdot c_{1j} + \dots + b_{mp} \cdot c_{pj}) = v_{ij}$ ■