Частичный и линейный порядок, отношение строгого порядка. Топологическая сортировка. Min и max элементы

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 19.09.2023

Содержание лекции

- Бинарные отношения, свойства бинарных отношений
- Отношения порядка
- Топологическая сортировка (определение и пример)
- Минимальный, наименьший, максимальный, наибольший элементы в множестве
- Лемма о существовании минимального элемента в множестве

Бинарные отношения

Определение: **Бинарным (двуместным) отношением** R на непустых и конечных множествах A и B называют $R \subseteq A \times B$.
Замечание: Одноместные (унарные) и многоместные отношения.

Бинарные отношения

Определение: **Бинарным (двуместным) отношением** R на непустых и конечных множествах A и B называют $R \subseteq A \times B$.
Замечание: Одноместные (унарные) и многоместные отношения.

Определение: Отношение R^{-1} называют **обратным** к R, если

$$\forall\ (a, b) \in R\ (b, a) \in R^{-1}$$

Бинарные отношения

Определение: **Бинарным (двуместным) отношением** R на непустых и конечных множествах A и B называют $R \subseteq A \times B$.
Замечание: Одноместные (унарные) и многоместные отношения.

Определение: Отношение R^{-1} называют **обратным** к R, если

$$\forall\ (a, b) \in R\ (b, a) \in R^{-1}$$

Определение: Бинарное отношение R на множествах A и B называют **отображением**, если $\forall\ a \in A\ \exists! b \in B :\ (a, b) \in R$.

Бинарные отношения

Определение: **Бинарным (двуместным) отношением** R на непустых и конечных множествах A и B называют $R \subseteq A \times B$.
Замечание: Одноместные (унарные) и многоместные отношения.

Определение: Отношение R^{-1} называют **обратным** к R, если

$$\forall\ (a, b) \in R\ (b, a) \in R^{-1}$$

Определение: Бинарное отношение R на множествах A и B называют **отображением**, если $\forall\ a \in A\ \exists! b \in B :\ (a, b) \in R$.

Примеры: Отношение $>$, $\in$, достижимость в шахматах

Бинарные отношения

Определение: **Бинарным (двуместным) отношением** R на непустых и конечных множествах A и B называют $R \subseteq A \times B$.
Замечание: Одноместные (унарные) и многоместные отношения.

Определение: Отношение R^{-1} называют **обратным** к R, если

$$\forall\ (a,b) \in R\ (b,a) \in R^{-1}$$

Определение: Бинарное отношение R на множествах A и B называют **отображением**, если $\forall\ a \in A\ \exists! b \in B :\ (a,b) \in R$.

Примеры: Отношение $>$, $\in$, достижимость в шахматах

Определение: $W \subseteq A \times B$ – **композиция (произведение)** отношений U на $A \times C$ и V на $C \times B$, если $W = \{(a,b) \mid \exists c \in C : (a,c) \in U, (c,b) \in V\}$

Бинарные отношения

Определение: **Бинарным (двуместным) отношением** R на непустых и конечных множествах A и B называют $R \subseteq A \times B$.
Замечание: Одноместные (унарные) и многоместные отношения.

Определение: Отношение R^{-1} называют **обратным** к R, если

$$\forall\ (a,b) \in R\ (b,a) \in R^{-1}$$

Определение: Бинарное отношение R на множествах A и B называют **отображением**, если $\forall\ a \in A\ \exists! b \in B :\ (a,b) \in R$.

Примеры: Отношение $>$, $\in$, достижимость в шахматах

Определение: $W \subseteq A \times B$ – **композиция (произведение)** отношений U на $A \times C$ и V на $C \times B$, если $W = \{(a,b) \mid \exists c \in C : (a,c) \in U, (c,b) \in V\}$

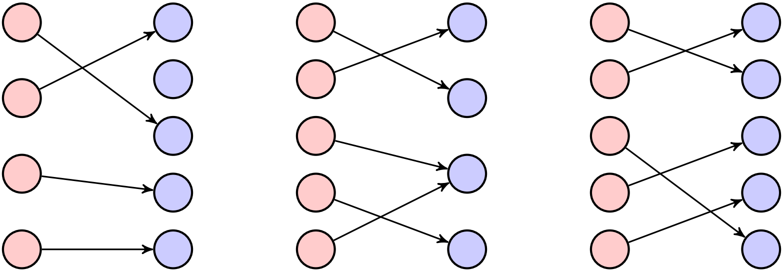
Задача 1: Докажите, что $(V^{-1})^{-1} = V$.
Задача 2: Докажите, что $(V_1V_2)V_3 = V_1(V_2V_3)$.

Типы бинарных отношений

Определение: R – **сюръективно**, если $\forall b \in B\ \exists a \in A : (a, b) \in R$.
R – **инъективно**, если $(a_1, b) \in R, (a_2, b) \in R \Rightarrow a_1 = a_2$.
R – **биективно**, если оно сюръективно и инъективно.

Типы бинарных отношений

Определение: R – **сюръективно**, если $\forall b \in B\ \exists a \in A : (a, b) \in R$.
R – **инъективно**, если $(a_1, b) \in R, (a_2, b) \in R \Rightarrow a_1 = a_2$.
R – **биективно**, если оно сюръективно и инъективно.



(a) Инъекция (b) Сюръекция (c) Биекция

Типы бинарных отношений.

Свойства бинарных отношений

Определение: Бинарное отношение R над множеством A называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A\ (a, a) \in R$. Например, $\geq$ – да, $>$ – нет.
Бинарное отношение R над множеством A называется **антирефлексивным**, если $\forall a \in A\ (a, a) \notin R$.

Свойства бинарных отношений

Определение: Бинарное отношение R над множеством A называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A$ $(a, a) \in R$. Например, $\geq$ – да, $>$ – нет.
Бинарное отношение R над множеством A называется **антирефлексивным**, если $\forall a \in A$ $(a, a) \notin R$.

Определение: Бинарное отношение R над множеством A называется **транзитивным**, если $\forall a, b, c \in A$ $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$. $(>, <)$
Бинарное отношение R над множеством A называется **антитранзитивным**, если $\forall a, b, c \in A$ $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \notin R$.

Свойства бинарных отношений

Определение: Бинарное отношение R над множеством A называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A\ (a, a) \in R$. Например, $\geq$ – да, $>$ – нет.
Бинарное отношение R над множеством A называется **антирефлексивным**, если $\forall a \in A\ (a, a) \notin R$.

Определение: Бинарное отношение R над множеством A называется **транзитивным**, если $\forall a, b, c \in A\ (a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$. $(>, <)$
Бинарное отношение R над множеством A называется **антитранзитивным**, если $\forall a, b, c \in A\ (a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \notin R$.

Определение: Бинарное отношение R над множеством A называется **симметричным**, если $\forall a, b \in A\ (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$. ($=$, родство)
Бинарное отношение R над множеством A называется **антисимметричным**, если $\forall a, b \in A\ (a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$. (?)
Бинарное отношение R над множеством A называется **асимметричным**, если $\forall a, b \in A\ (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$.

Свойства бинарных отношений

Определение: Бинарное отношение R над множеством A называется **рефлексивным**, если $\forall a \in A \ (a,a) \in R$. Например, $\geq$ – да, $>$ – нет.
Бинарное отношение R над множеством A называется **антирефлексивным**, если $\forall a \in A \ (a,a) \notin R$.

Определение: Бинарное отношение R над множеством A называется **транзитивным**, если $\forall a,b,c \in A \ (a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$. $(>,<)$
Бинарное отношение R над множеством A называется **антитранзитивным**, если $\forall a,b,c \in A \ (a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \notin R$.

Определение: Бинарное отношение R над множеством A называется **симметричным**, если $\forall a,b \in A \ (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$. ($=$, родство)
Бинарное отношение R над множеством A называется **антисимметричным**, если $\forall a,b \in A \ (a,b) \in R, (b,a) \in R \Rightarrow a = b$. (?)
Бинарное отношение R над множеством A называется **асимметричным**, если $\forall a,b \in A \ (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$.

Определение: Бинарное отношение R над множеством A называется **эквивалентностью**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
$x \in A$, $E_x = \{y \in A \mid y \sim x\}$ – **класс эквивалентности** отношения R.

Отношения порядка

Определение (Частичный порядок)). Бинарное отношение R над множеством A называется **частичным порядком** на A (или говорят, что A частично упорядочено R), если R:

- рефлексивно
- транзитивно
- антисимметрично

Отношения порядка

Определение (Частичный порядок)). Бинарное отношение R над множеством A называется **частичным порядком** на A (или говорят, что A частично упорядочено R), если R:

- рефлексивно
- транзитивно
- антисимметрично

Определение (Строгий частичный порядок)). Бинарное отношение R над множеством A называется **строгим частичным порядком** на A (или говорят, что A строго частично упорядочено R), если R:

- транзитивно
- асимметрично

Отношения порядка

Определение (Частичный порядок)). Бинарное отношение R над множеством A называется **частичным порядком** на A (или говорят, что A частично упорядочено R), если R:

- рефлексивно
- транзитивно
- антисимметрично

Определение (Строгий частичный порядок)). Бинарное отношение R над множеством A называется **строгим частичным порядком** на A (или говорят, что A строго частично упорядочено R), если R:

- транзитивно
- асимметрично

Определение ((Строгий) линейный порядок)). Бинарное отношение R над множеством A называется **(строгим) линейным порядком** на A (или говорят, что A **(строго) линейно упорядочено** R), если R является (строгим) частичным порядком на A и $\forall\, a, b \in A : a \neq b$ верно, что либо $(a, b) \in R$, либо $(b, a) \in R$.

Отношения порядка

Определение (Частичный порядок)). Бинарное отношение R над множеством A называется **частичным порядком** на A (или говорят, что A частично упорядочено R), если R:

- рефлексивно
- транзитивно
- антисимметрично

Определение (Строгий частичный порядок)). Бинарное отношение R над множеством A называется **строгим частичным порядком** на A (или говорят, что A строго частично упорядочено R), если R:

- транзитивно
- асимметрично

Определение ((Строгий) линейный порядок)). Бинарное отношение R над множеством A называется **(строгим) линейным порядком** на A (или говорят, что A **(строго) линейно упорядочено** R), если R является (строгим) частичным порядком на A и $\forall\ a, b \in A : a \neq b$ верно, что либо $(a, b) \in R$, либо $(b, a) \in R$.

Примеры. $\subseteq$ – частичный, но не линейный порядок, $\leq$ – линейный порядок на $\mathbb{N}$, $<$ – строгий линейный порядок на $\mathbb{N}$.

Топологическая сортировка. Min и max элементы

Определение: **Топологической сортировкой** множества A, (строго) частично упорядоченного отношением R, называется такой (строгий) линейный порядок Q на A, что $(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in Q$.

Топологическая сортировка. Min и max элементы

Определение: **Топологической сортировкой** множества A, (строго) частично упорядоченного отношением R, называется такой (строгий) линейный порядок Q на A, что $(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in Q$.

Определение: A – множество, R – (строгий) частичный порядок на A

- $m \in A$ – **минимальный элемент**, если $\nexists\ x \in A : x \neq m$, такой что $(x, m) \in R$
- $m_o \in A$ – **наименьший элемент**, если $\forall\ x \in A : x \neq m_o$, верно что $(m_o, x) \in R$
- $M \in A$ – **максимальный элемент**, если $\nexists\ x \in A : x \neq M$, такой что $(M, x) \in R$
- $M_o \in A$ – **наибольший элемент**, если $\forall\ x \in A : x \neq M_o$, верно что $(x, M_o) \in R$

Топологическая сортировка. Min и max элементы

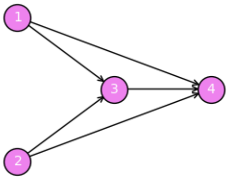
Определение: **Топологической сортировкой** множества A, (строго) частично упорядоченного отношением R, называется такой (строгий) линейный порядок Q на A, что $(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in Q$.

Определение: A – множество, R – (строгий) частичный порядок на A

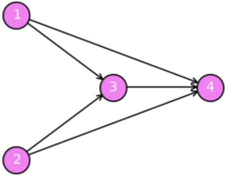
- $m \in A$ – **минимальный элемент**, если $\nexists\ x \in A : x \neq m$, такой что $(x, m) \in R$
- $m_o \in A$ – **наименьший элемент**, если $\forall\ x \in A : x \neq m_o$, верно что $(m_o, x) \in R$
- $M \in A$ – **максимальный элемент**, если $\nexists\ x \in A : x \neq M$, такой что $(M, x) \in R$
- $M_o \in A$ – **наибольший элемент**, если $\forall\ x \in A : x \neq M_o$, верно что $(x, M_o) \in R$

Замечание. В ЧУМ-е минимальных элементов м.б. несколько, но наименьших не более одного (аналогично с максимальными и наибольшими).
Замечание. В ЛУМ-е минимальный элемент всего один, и он также является наименьшим (аналогично с максимальным и наибольшим).

Частичный порядок на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$

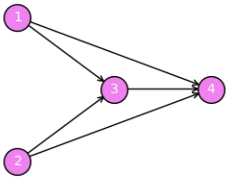


Частичный порядок на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$

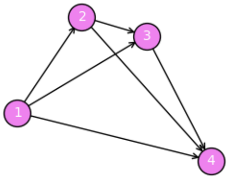


$1, 2$ – минимальные, но не наименьшие; 4 – максимальный и наибольший.

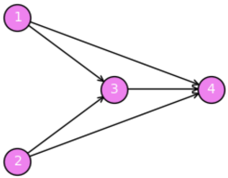
Частичный порядок на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$



$1, 2$ – минимальные, но не наименьшие; 4 – максимальный и наибольший.
Построим топологическую сортировку на A:

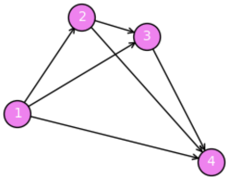


Частичный порядок на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$



$1, 2$ – минимальные, но не наименьшие; 4 – максимальный и наибольший.

Построим топологическую сортировку на A:



1 – минимальный и наименьший; 4 – максимальный и наибольший.

Лемма о существовании min элемента

Лемма: Во всяком конечном частично упорядоченном непустом множестве X существует минимальный элемент.

Лемма о существовании min элемента

Лемма: Во всяком конечном частично упорядоченном непустом множестве X существует минимальный элемент.

Доказательство.
Воспользуемся методом математической индукции (по $|X|$).
База индукции: $X = \{x\}$. Минимальный элемент существует и равен x.
Переход индукции: пусть $|X| = n + 1, n \geq 1$ и известно, что в любом множестве мощности n существует минимальный элемент. Тогда выберем какой-то $x \in X$ и рассмотрим $X' := X \setminus \{x\}$.
По предположению индукции в X' есть минимальный элемент, обозначим его x_0. Если $(x, x_0) \in R$, то x — минимальный элемент X, так как $\forall\ x' \in X \quad (x', x) \notin R$ (в противном случае $(x', x_0) \in R$, из чего следует, что x_0 — не минимальный элемент X'). Иначе x_0 остаётся минимальным элементом.

■

Лемма о существовании min элемента

Лемма: Во всяком конечном частично упорядоченном непустом множестве X существует минимальный элемент.

Доказательство.
Воспользуемся методом математической индукции (по $|X|$).
База индукции: $X = \{x\}$. Минимальный элемент существует и равен x.
Переход индукции: пусть $|X| = n+1, n \geq 1$ и известно, что в любом множестве мощности n существует минимальный элемент. Тогда выберем какой-то $x \in X$ и рассмотрим $X' := X \backslash \{x\}$.
По предположению индукции в X' есть минимальный элемент, обозначим его x_0. Если $(x, x_0) \in R$, то x — минимальный элемент X, так как $\forall\ x' \in X \quad (x', x) \notin R$ (в противном случае $(x', x_0) \in R$, из чего следует, что x_0 — не минимальный элемент X'). Иначе x_0 остаётся минимальным элементом.

■

Замечание: Для максимального элемента существует аналогичная лемма и её доказательство.

Лемма о существовании min элемента

Лемма: Во всяком конечном частично упорядоченном непустом множестве X существует минимальный элемент.

Доказательство.
Воспользуемся методом математической индукции (по $|X|$).
База индукции: $X = \{x\}$. Минимальный элемент существует и равен x.
Переход индукции: пусть $|X| = n+1, n \geq 1$ и известно, что в любом множестве мощности n существует минимальный элемент. Тогда выберем какой-то $x \in X$ и рассмотрим $X' := X \backslash \{x\}$.
По предположению индукции в X' есть минимальный элемент, обозначим его x_0. Если $(x, x_0) \in R$, то x — минимальный элемент X, так как $\forall\ x' \in X \quad (x', x) \notin R$ (в противном случае $(x', x_0) \in R$, из чего следует, что x_0 — не минимальный элемент X'). Иначе x_0 остаётся минимальным элементом.

■

Замечание: Для максимального элемента существует аналогичная лемма и её доказательство.

Задача 4: Докажите без индукции.