Усл. Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a) \ |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Следствие: $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Д-во: 1) Известно, что $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, т.е.:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \ |f(x) - b| < \varepsilon$.

Расс-м $x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a)$. Для них выполняется:

$|f(x_1) - b| < \varepsilon$ и $|f(x_2) - b| < \varepsilon$.

$|f(x_2) - f(x_1)| = |f(x_2) - b + b - f(x_1)| \le |f(x_2) - b| + |f(x_1) - b| < 2\varepsilon$ ■

2) Вып. условие Коши, т.е.:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a) \ |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. (*)

Возьмем произвольную последоват. $x_n \in \mathring{U}_\delta(a) : x_n \to a$,

где δ взято из условия Коши (*). Тогда для этого

δ мы можем найти $N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in \mathring{U}_\delta(a)$.

По условию Коши: если $x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Тогда можем взять: $n, m \geq N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$,

а это значит, что выполн. крит. Коши для последов.

Значит $\exists$ конечный $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Т.е. мы доказали, что для $\forall x_n$ есть предел.

Нужно показать, что все x_n стремятся к одному

числу. Пусть это не так и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ и $\lim\limits_{m \to \infty} f(x_m) = B$

такие что $x_n \to x_0$ и $x_m \to x_0$. Расс-м послед.

$\{x_1, x_1', x_2, x_2', \dots\} = y_n$. Очевидно, что она стрем. к x_0.

Но $f(y_n)$ имеет 2 частичн. предела, что ?! с

опред. предела по Гейне ■