$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$

Рассм-м $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Д-ем, что $b_n \downarrow$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = (1+\frac{1}{n-1})^n : (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (\frac{n}{n-1})^n : (\frac{n+1}{n})^{n+1} =$$

$$= \frac{n^n \cdot n^{n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n}\cdot n}{(n^2-1)^n(n+1)} = (\frac{n^2}{n^2-1})^n(\frac{n}{n+1}) =$$

$$= (1+\frac{1}{n^2-1})^n(\frac{n}{n+1}) \geq (1+\frac{n}{n^2-1})(\frac{n}{n+1}) =$$

(Т. о пределе монот. ф-ии)

$$= \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1 \Rightarrow b_n \downarrow \text{ и } b_n > 0 \Rightarrow \exists \text{ кон. предел.}$$

Вернемся к изначальной последоват.:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot 1 = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $\exists$ и конечен

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \blacksquare$$