Т. 1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ – наиб. частичный предел.

2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ – наим. частичный предел.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует когда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.
тогда и только тогда, когда

Д-во:

а) Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная последовательность.

1) Тогда существует $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = b \in \mathbb{R}$

Известно, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N$ вып. $b - \varepsilon < z_n < b + \varepsilon$. и $z_n \downarrow$

Построим $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $x_{n_k} > b - \frac{1}{k}$.

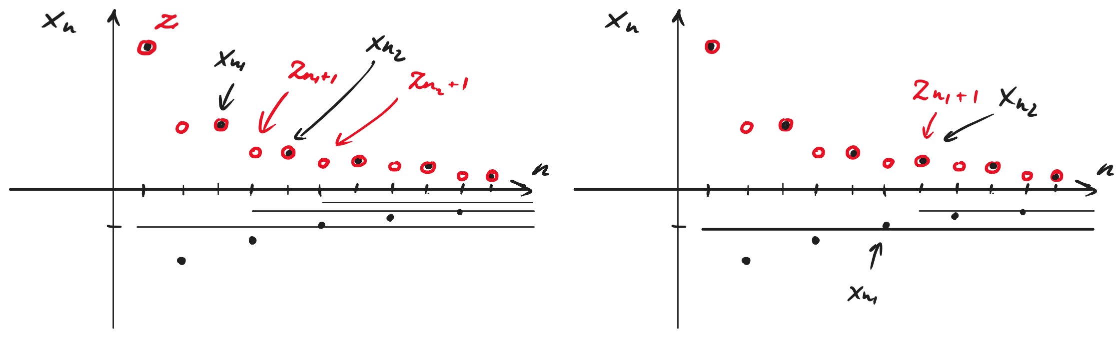
$z_1 = \sup\{x_1, x_2, \dots\}$. Выбираем x_{n_1} из этих x : $x_{n_1} > b - 1$.

Т.к. $z_n \geq b$, то всегда можно найти $x_{n_k} > b - \frac{1}{k}$.

При $k = 2$ мы должны брать x_{n_2} из $z_{n_1+1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\} > b - \frac{1}{2}$

т.к. так мы гарантируем, что x_{n_k} – подпоследовательность.

Значит для $k = 2$: $x_{n_2} > b - \frac{1}{2}$



В итоге построим x_{n_k} : $z_{n_{k-1}+1} = \sup\{x_{n_{k-1}+1}, x_{n_{k-1}+2}, \dots\}$

Значит: $x_{n_k} > b - \frac{1}{k}$. Тогда $\underset{\downarrow\atop b}{z_n} \geq x_{n_k} > \underset{\downarrow\atop b}{b - \frac{1}{k}} \Rightarrow$ по т° о 2-х милиц. $x_{n_k} \to b$.

Теперь покажем, что x_{n_k} – наиб. частичн. предел.

Пусть $x_{m_l} \xrightarrow{l\to\infty} \beta$. Известно, что $x_{m_l} \leq z_n \Rightarrow \beta \leq b$ ■

2) Тогда $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$.

Построим $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x_{n_k} < b + \frac{1}{k}$

Дальнейшее док-во строится аналогично п.1), с учетом $y_n \uparrow$.

3) Известно, что $y_n \leq x_n \leq z_n$.

Д-ть, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$\Rightarrow$: Т.к. предел $\exists$, то все его частичные пределы равны между собой $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

$\Leftarrow$: $\underset{\downarrow\atop b}{y_n} \leq x_n \leq \underset{\downarrow\atop b}{z_n} \Rightarrow$ по т° о 2 милиц. $x_n \to b$ ■

б) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена только сверху.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. Тогда по т° Больцано-Вейерштрасса можно выделить $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$, т.е. наим. частичный предел $\Rightarrow$ 2) выполняется

1) доказывается способом, опис. в а) 1).

3) Д-ть: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

$\Rightarrow$: Предел $\exists \Rightarrow$ все частичн. пределы $=$, а т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$.

$\Leftarrow$: $\underset{\downarrow\atop -\infty}{y_n} \leq x_n \leq \underset{\downarrow\atop -\infty}{z_n} \Rightarrow$ по т° о 2 милиц. $x_n \to -\infty$.

в) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ огр. только снизу.

Доказывается аналогично б)

г) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничена.

$\lim y_n = -\infty$; $\lim z_n = +\infty \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ■