Элементарная теория вероятности

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 14.11.2023

Вероятностное пространство

Пусть S – конечное множество, $|S| = n$ и пусть задана функция $f : S \to [0, 1]$, $\forall \omega \in S\ \exists! f(\omega) \in [0, 1]$, при этом $\sum\limits_{\omega \in S} f(\omega) = 1$.

$\forall A \subseteq S$ определим $Pr(A) := \sum\limits_{\omega \in A} f(\omega)$, в частности:

$Pr(\varnothing) = 0;\ Pr(S) = 1;\ Pr(\{\omega\}) = f(\omega)$.
Таким образом, необходимость в исходной функции f пропадает, нам достаточно иметь Pr.

Определение: (S, Pr) называется **вероятностным пространством**; S – **пространством элементарных событий**; $\omega \in S$ – **элементарным событием** (исходом); $A \subseteq S$ – **событием**; $Pr(A)$ – **вероятностью A**.

Определение: События $A, B \subseteq S$ называются **несовместными**, если $Pr(A \cap B) = 0$.

Обозначение: С помощью $Pr\{P(x)\}$ будем обозначать вероятность $Pr(\{\omega \in S : P(\omega)\})$ множества таких элементарных исходов в S, что для них выполняется условие P. Причем условие может быть записано в произвольном формате, например, $Pr\{$Сборная России по футболу выиграет чемпионат мира$\}$.

Свойства вероятности. Парадокс Монти Холла

1. $\forall A, B \subseteq S\ Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$ (формула включений и исключений).
   Доказательство:
   $Pr(A \cup B) = \sum\limits_{\omega \in A \cup B} f(\omega) = \sum\limits_{\omega \in A} f(\omega) + \sum\limits_{\omega \in B} f(\omega) - \sum\limits_{\omega \in A \cap B} f(\omega)$.
2. $\forall A \subseteq S\ \overline{A} = S \setminus A$. $Pr(A) + Pr(\overline{A}) = 1$.
   Доказательство: по определению вероятности.
3. $\forall A, B \subseteq S\ Pr(A \cup B) \leq Pr(A) + Pr(B)$.
   Доказательство: Очевидно из пункта 1 и того факта, что вероятность неотрицательна.
4. $\forall A, B \subseteq S\ Pr(A) = Pr(A \setminus B) + Pr(A \cap B)$.

Парадокс Монти Холла: На некотором телешоу ведущий предлагает игроку выбрать одну из трех дверей. Известно, что за одной из дверей находится автомобиль, а за двумя другими – по козе. После того как игрок сделал выбор, ведущий открывает одну из двух оставшихся дверей (причем обязательно ту, за которой коза, открыть дверь с автомобилем он не может) и предлагает игроку изменить выбор.
Вопрос: **стоит ли менять выбор?**

Парадокс Монти Холла

Формализуем задачу:

- Нет оснований полагать, что приз скорее за одной дверью, чем за другой (организаторы выбирали дверь наугад);
- Нет оснований полагать, что игрок предпочитает одну дверь другой (игрок выбирает дверь наугад);
- Нет оснований полагать, что если у ведущего есть выбор, он предпочтет одну дверь другой;
- Нет оснований полагать, что кто-то из участников процесса нарушает правила игры.

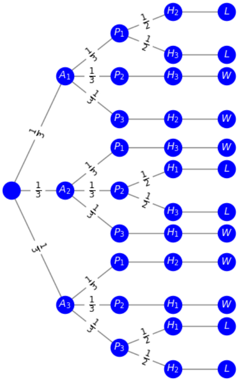
Исходя из этого, построим дерево вариантов.
Сначала организаторы случайно (то есть, вероятность каждого из трех выборов $= \frac{1}{3}$) выбирают дверь, за которой помещают автомобиль $(A1, A2, A3)$.
Затем игрок делает свой выбор $(P1, P2, P3)$, тоже случайно.
Далее ведущий выбирает, какую дверь ему открыть. Заметим, что выбор у ведущего есть только если игрок исходно выбрал дверь, за которой находится приз. В таком случае, мы считаем, что ведущий делает выбор случайным образом (то есть, вероятность каждого из 2 выборов – $\frac{1}{2}$).

Парадокс Монти Холла

Получаем набор элементарных исходов (листья дерева), каждый из которых имеет вид (Ax, Py, Hz) – выбор организаторов, выбор игрока, выбор ведущего.

Вероятность каждого из таких исходов можно посчитать как произведение вероятностей на пути из корня дерева в лист, соответствующий данному исходу (то есть, $Pr(\{(A1, P1, H2)\}) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$).

Теперь нужно посчитать $Pr\{$Игрок выиграет, если сменит выбор$\}$. На картинке все исходы, удовлетворяющие этому условию, отмечены буквой W. Посчитав сумму их вероятностей, получим $\frac{2}{3}$.



Парадокс Монти Холла. Условная вероятность

Интуитивно понятное объяснение (очень грубое и не совсем корректное): вероятность того, что игрок исходно угадал равна $\frac{1}{3}$. Т.е. с вероятностью $\frac{2}{3}$ автомобиль находится за одной из двух других дверей.
Когда ведущий открывает дверь, мы не получаем никакой новой информации, т.к. заранее известно, что он должен был открыть дверь с козой. Значит, исходные $\frac{2}{3}$ вероятности, что игрок выбрал не ту дверь, остаются и сосредотачиваются на оставшейся двери, а значит, сменив выбор, игрок с вероятностью $\frac{2}{3}$ выиграет.

Определение: Пусть (S, Pr) – вероятностное пространство, $A, B \subseteq S$, $Pr(B) \neq 0$. **Условной вероятностью**

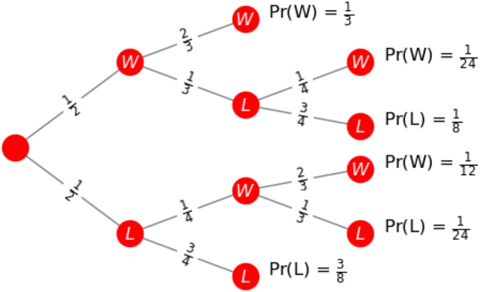
$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

называют вероятность наступления события A при условии, что событие B произошло.

Задача о хоккейной команде

Задача: ХК Локомотив играет серию до двух побед против СКА. Вероятность победы Локомотива в первой игре – $\frac{1}{2}$, для остальных игр действует следующее правило: если Локомотив выиграл предыдущую игру, вероятность его победы поднимается до $\frac{2}{3}$, а если проиграл – падает до $\frac{1}{4}$.

Построим дерево возможных вариантов. Множество элементарных исходов $S = \{WW, WLW, WLL, LWW, LWL, LL\}$.



Задача о хоккейной команде

Найдём несколько вероятностей:

1. $Pr\{\text{Локомотив выиграет серию}\} = Pr(\{WW, WLW, LWW\}) =$
   $= \frac{1}{3} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}.$
2. $Pr\{\text{Локомотив выиграет серию, если он выиграл первую игру}\} =$
   $Pr(\{WW, WLW, LWW\}|\{WW, WLW, WLL\}) =$
   $= \frac{Pr(\{WW,WLW\})}{Pr(\{WW,WLW,WLL\})} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{24}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$
3. $Pr\{\text{Локомотив выиграл первую игру, если он выиграл серию}\} =$
   $= Pr(\{WW, WLW, WLL\}|\{WW, WLW, LWW\}) =$
   $= \frac{Pr(\{WW,WLW\})}{Pr(\{WW,WLW,LWW\})} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{24}}{\frac{11}{24}} = \frac{9}{11}.$
4. $Pr\{\text{Локомотив выиграет вторую игру, если он выиграл первую игру}\}$
   $= Pr(\{WW, LWW, LWL\}|\{WW, WLW, WLL\}) =$
   $= \frac{Pr(\{WW\})}{Pr(\{WW,WLW,WLL\})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$