Если определитель системы n линейных ур-ий с n неизвестными $\neq 0$, то система имеет единств. реш-е:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; ...; $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$;

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Δ_i получается заменой i-го столбца столбцом из свободных чл.

Д-во:

1) Предположим, что решение сущ-ет. Докажем, что оно единств.

Пусть $\alpha_1 \dots \alpha_n$ – р-е. Тогда имеем верные равенства

$$\begin{cases} a_{11}\cdot\alpha_1 + a_{12}\cdot\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \dots \qquad\qquad \dots \\ a_{n1}\cdot\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n = b_n \end{cases}$$

Умножим каждую строчку на $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$ соответств.:

$$\begin{cases} A_{11}\cdot a_{11}\cdot\alpha_1 + \dots + A_{11}\cdot a_{1n}\cdot\alpha_n = b_1\cdot A_{11} \\ \dots \qquad\qquad \dots \\ A_{n1}\cdot a_{n1}\cdot\alpha_1 + \dots + A_{n1}\cdot a_{nn}\cdot\alpha_n = b_n\cdot A_{n1} \end{cases}$$

Сложим левые и правые части:

$$\alpha_1(a_{11}A_{11} + \dots + a_{n1}A_{n1}) + \dots + \alpha_n(\underbrace{a_{1n}\cdot A_{11} + \dots + a_{nn}\cdot A_{n1}}_{=0,\text{ т.к. алгебр. 1 столбца на эл-ты другого.}}) = b_1\cdot A_{11} + \dots + b_n\cdot A_{n1}$$

$$\alpha_1\cdot\Delta = b_1\cdot A_{11} + \dots + b_n A_{n1} = \Delta_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

Тогда для $\forall k \in 1:n$ $\alpha_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$.

Допустим, что сущ-ют р-е $\beta_1, \dots, \beta_n$. Проведя ту же цепочку д-ий получим те же равенства.

Тогда $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. $\Rightarrow$ р-е единственно ■

2) Докажем, что р-е сущ-ют. Для этого подставим в исх. ур-е полученные $\alpha_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$. Достат. подст. в i-ое ур-е.

$$a_{i1}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta} + \dots + a_{in}\cdot\frac{\Delta_n}{\Delta} = b_i =$$

$$= \frac{a_{i1}}{\Delta}(b_1 A_{11} + \dots + b_n\cdot A_{n1}) + \dots + \frac{a_{in}}{\Delta}(b_1\cdot A_{1n} + \dots + b_n\cdot A_{nn}) =$$

$$= \frac{b_1}{\Delta}(\overset{=0}{a_{i1}\cdot A_{11} + \dots + a_{in}A_{1n}}) + \dots + \frac{b_n}{\Delta}(\overset{=0}{a_{i1}\cdot A_{n1} + \dots + a_{in}\cdot A_{nn}}) =$$

$$= \frac{b_i}{\Delta}(a_{i1}\cdot A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}) = \frac{b_i}{\Delta}\cdot\Delta = b_i \; ■$$