Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \ f(x) \in U_\varepsilon(b).$

Гейне: $\forall x_n : x_n \in \mathring{U} a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \ \exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$

Д-ть: Коши равносильно Гейне.

Д-во: 1) К. $\Rightarrow$ Г. Известно: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

По опред-ю предела последоват.: $\forall \delta > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ |x_n - a| < \delta$

в том числе

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ 0 < |x_n - a| < \delta \ |f(x_n) - b| < \varepsilon$ ■

2) Г. $\Rightarrow$ К. Известно: $\forall x_n : x_n \in \mathring{U}(a)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b.$

Пусть опр. по Коши не выполняется, т.е.:

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : \exists x : 0 < |x - a| < \delta \ |f(x) - b| \geq \varepsilon.$ (вып. в т.ч. для x_n)

Знаем, что $x_n \to a$ и $x_n \neq a \overset{Г.}{\Rightarrow} f(x_n) \in U_\varepsilon(b)$, но, по

нашему предположению, опред. Коши не вып. $\Rightarrow b$ – не предел.?! ■