

**Вопросы к экзамену (ПИ+ИИ, 2 семестр, весна 2024).**

1. Определенный интеграл Римана, определение, примеры.
2. Теорема об ограниченности интегрируемой функции.
3. Нижняя и верхняя суммы Дарбу; их свойства.
4. Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману.
5. Критерий интегрируемости в терминах колебаний функций.
6. Интегрируемость непрерывной функции.
7. Интегрируемость монотонной функции.
8. Интегрируемость кусочно-непрерывной функции.
9. Интегрируемость сужения. Аддитивность интеграла по множеству.
10. Арифметические действия над интегрируемыми функциями.
11. Свойства определенного интеграла: аддитивность по отрезку, линейность, монотонность.
12. Условия знакоопределенности интеграла, доказательство неравенства  $|\int f| \leq \int |f|$ .
13. Первая теорема о среднем для определенного интеграла. Следствия, замечания.
14. Непрерывность интеграла с переменным верхним пределом.
15. Существование производной интеграла с переменным верхним пределом.
16. Теорема о формуле Ньютона-Лейбница. Замечания.
17. Интегрирование по частям и замена переменной интегрирования в определенном интеграле.
18. Вторая теорема о среднем для определенного интеграла.
19. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.
20. Несобственные интегралы первого и второго рода.
21. Свойства несобственных интегралов.
22. Замена переменной в несобственном интеграле.
23. Признак сравнения сходимости несобственных интегралов в допредельной и предельной форме.
24. Абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы, сходимость абсолютно сходящегося интеграла.
25. Признаки Абеля и Дирихле сходимости интеграла.
26. Исследование интеграла  $\int_1^{+\infty} g(x) \sin \lambda x dx$ .
27. Область определения гамма-функции.
28. Главное значение несобственного интеграла. Примеры.
29. Понятия  $d$ -мерного линейного пространства  $\mathbb{R}^d$ , нормированного пространства, метрического пространства, примеры норм и метрик.
30. Определения: открытый шар, замкнутый шар, сфера, открытые и замкнутые множества; внутренние, внешние, граничные, предельные, изолированные точки, точки прикосновения множеств; замыкание, внутренность, граница множества.
31. Характеристика замкнутого множества.
32. Метрическое подпространство. Открытость и замкнутость в подпространстве.
33. Компактное множество. Компактность подпространства.
34. Свойства компактов.
35. Компактность замкнутого параллелепипеда в  $\mathbb{R}^d$ .
36. Достаточное условие компактности в  $\mathbb{R}^d$ .
37. Сходимость в произвольном метрическом пространстве, в частности, в  $\mathbb{R}^d$ , в  $\mathbb{C}$ : предел последовательности, эквивалентность сходимости и покоординатной сходимости последовательности.
38. Принцип выбора Больцано - Вейерштрасса.
39. Понятие отображения в  $\mathbb{R}^d$ . Предел отображения в метрическом пространстве, в частности в  $\mathbb{R}^d$ , Кратные и повторные пределы.
40. Непрерывное отображение в метрическом пространстве.
41. Критерий непрерывности отображения в терминах прообразов.
42. Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях.
43. Теорема Вейерштрасса для ФНП.
44. Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в  $\mathbb{R}^d$ .
45. Равномерная непрерывность в метрическом пространстве. Теорема Кантора.
46. Линейно связное множество. Теорема Больцано-Коши.

47. Определение линейного оператора. Структура линейного оператора из  $\mathbb{R}^d$  в  $\mathbb{R}^m$ .
48. Операции на множестве всех линейных операторов: линейная комбинация, произведение. Норма оператора.
49. Лемма о вычислении нормы линейного оператора.
50. Оценка нормы линейного оператора из  $L(l_2^d, l_2^m)$ . Равномерная непрерывность линейного оператора из  $L(l_2^d, l_2^m)$ .
51. Дифференцируемое отображение, дифференциал, матрица Якоби, якобиан.
52. Производная композиции.
53. Производная по направлению, частные производные, экстремальное свойство градиента. Структура матрицы Якоби и градиента.
54. Достаточное условие дифференцируемости ФНП.
55. Примеры, проясняющие связь понятий “дифференцируемость” и “частная производная”.
56. Определение частных производных высших порядков. Равенство смешанных производных второго порядка.
57.  $r$ -гладкие отображения. Равенство смешанных производных высших порядков.
58. Определение дифференциала высших порядков. Лемма о производных функции  $f(x + th)$ .
59. Многомерная формула Тейлора-Лагранжа в дифференциалах.
60. Лемма о дифференциале в мультииндексных обозначениях. Формула Тейлора-Лагранжа в мультииндексных обозначениях.
61. Многомерная формула Тейлора-Пеано.
62. Определение экстремума ФНП. Необходимое условие экстремума, достаточное условие экстремума ФНП.
63. Обратимый оператор. Обратимость оператора, близкого к обратимому.
64. Непрерывность отображения  $A \mapsto A^{-1}$ .
65. Лемма о непрерывности операторнозначного отображения.
66. Теорема Лагранжа для вектор-функций и отображений.
67. Теорема об обратном отображении.
68. Открытое отображение. Следствие об открытом отображении. Диффеоморфизм и гомеоморфизм.
69. Теорема о неявном отображении.
70. Относительный экстремум. Необходимое условие существования относительного экстремума. Функция Лагранжа.
71. Достаточное условие существования относительного экстремума (без доказательства).
72. Наибольшее и наименьшее значения квадратичной формы на единичной сфере.
73. Норма линейного оператора из  $L(l_2^d, l_2^m)$ .
74. Определение числового ряда. Простейшие свойства.
75. Остаток ряда. Теорема об остатке.
76. Положительный ряд. Основная теорема для положительных рядов.
77. Признак сравнения положительных рядов. Следствие.
78. Критерий Коши сходимости числового ряда.
79. Радикальный признак Коши сходимости положительных рядов.
80. Признак Даламбера сходимости положительных рядов.
81. Интегральный признак Коши сходимости положительных рядов.
82. Условно и абсолютно сходящиеся ряды.
83. Признаки Абеля и Дирихле сходимости рядов (с леммой). Признак Лейбница как следствие.
84. Сочетательное свойство рядов.
85. Теорема о “снятии скобок” в рядах.
86. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов.
87. Теорема Римана об условно сходящихся рядах (без доказательства).
88. Безусловно сходящийся ряд. Эквивалентность безусловной и абсолютной сходимости ряда.
89. Теорема Коши об умножении рядов.