$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $D(f) = (-\infty;-1)\cup(0;\infty)$

По Гейне: $\forall x_n\to\infty \quad f(x_n)\overset{?}{\to} e$

Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

1) $x_n>0$, $x_n\to+\infty$

$\lfloor x_n\rfloor \le x_n < \lfloor x_n\rfloor + 1$

$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor x_n\rfloor}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{\lfloor x_n\rfloor}\right)^{\lfloor x_n\rfloor+1} \to e$

$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \ge \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{\lfloor x_n\rfloor} > \left(1+\frac{1}{\lfloor x_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor x_n\rfloor} \to e$

По т° о 2-х милиц. $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\to e$

2) $x_n<-1$; $x_n\to-\infty$; $y_n=-x_n$

$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n} =$

$= \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n}\to e$ по п. 2)

3) $x_n\in D$, $x_n\to\infty$

$\overset{\nearrow e}{y_k} = x_{n_k}>0$; $\overset{\nearrow e}{z_m} = x_{n_m}<-1$

$\{y_k\}\cup\{z_m\} = \{x_n\} \Rightarrow x_n\to e$ ■