Предел композиции:

$f: D \to \mathbb{R}$

$g: E \to \mathbb{R} \quad f(D) \subset E$

a - пред. т. D : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

b - пред. т. E : $\lim\limits_{t \to b} g(t) = c$

При этом должно вып. 1-е или 2-е условие:

1) $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap D \quad f(x) \neq b$

2) $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap D \quad g(b) = c$

Док-во:

1) Имеем:
$$\quad g(y) \qquad\qquad f(x)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad \Big| \quad \forall \delta > 0 \; \exists \gamma > 0 :$$
$$\forall y \in \mathring{U}_\delta(b) \qquad \Big| \quad \forall x \in \mathring{U}_\gamma(a)$$
$$g(y) \in U_\varepsilon(c) \qquad \Big| \quad f(x) \in \mathring{U}_\delta(b)$$

Пусть выполняется 1). Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \gamma > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\gamma(a) \quad g(f(x)) \in U_\varepsilon(c) \; \blacksquare$$

2) Имеем:
$$\quad g(y) \qquad\qquad f(x)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad \Big| \quad \forall \delta > 0 \; \exists \gamma > 0 :$$
$$\forall y \in \bar{U}_\delta(b) \qquad \Big| \quad \forall x \in \mathring{U}_\gamma(a)$$
$$g(y) \in U_\varepsilon(c) \qquad \Big| \quad f(x) \in U_\delta(b)$$

Пусть выполняется 2). Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \gamma > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\gamma(a) \quad g(f(x)) \in U_\varepsilon(c) \; \blacksquare$$