Пусть посл. огр. сверху (снизу). Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ или $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ называют верхним пределом ($\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ наз-ют нижним пределом).

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ всегда существуют.
и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Д-во:

Введем обозначение: $y_n = \inf\{x_n, x_{n+1} \dots\}$
$z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$; $y_n \uparrow$, $z_n \downarrow$.

1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху и снизу.
$y_1 \leq y_n$, т.к. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$; $y_n \leq x_n$, т.к. y_n – инфимум.
$z_1 \geq z_n$, т.к. $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \searrow$; $z_n \geq x_n$, т.к. z_n – супремум.
Тогда: $y_1 \leq y_n \leq x_n \leq z_n \leq z_1$.
Значит $z_n \searrow$ и ограничено y_1, а $y_n \uparrow$ и огр. z_1.
Тогда по теореме о существовании предела монотонн. огранич. последов. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ и, т.к. $y_n \leq z_n$, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

2) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена только сверху.
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$
Т.к. $z_n \searrow \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n \in [-\infty; +\infty)$
Очевидно, что нер-во $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ выполняется.

3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена только снизу
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$.
Т.к. $y_n \uparrow \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in (-\infty; +\infty]$
Уравнение $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ выполняется.

4) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограничено
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty \Rightarrow$ ур-е вып. ∎