Перестановка – биективное отображение непустого множества X в множество X $(X \xrightarrow{bi} X)$.

Инверсия – пара эл-тов X: $i<j$ и $f(i)>f(j)$, где f – перестановка.

Четность перестановки определяется четностью кол-ва инверсий или кол-ва транспозиций.

Докажем, что после транспозиции 2-х эл-тов четность инверсий меняется на противоположную.

Пусть есть перестановка из n эл-тов $\begin{pmatrix} \alpha, \beta, \ldots, \mu, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \lambda, \ldots, \omega \\ \alpha, \beta, \ldots, \lambda, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \mu, \ldots, \omega \end{pmatrix}$

Разобьем C_n^2 пар на 4 группы и подсчитаем инверсии:

Пусть для определенности $\mu < \lambda$

	до транспозиции	после транспоз.
1) μ и λ	1) 0	1) 1
2) γ_i и λ	2) k	2) $m-k$
3) γ_i и μ	3) $m-t$	3) t
4) Остальные.	4)	4)

Пусть k – число пар, в к. $\gamma_i < \lambda$, а t – число пар, в к. $\gamma_i < \mu$. Обозначим пару из 4) группы, как (d_1, d_2). Если эти эл-ты не совпад. с μ и λ, то их располож. точно не изм. Пусть (НУО) $d_1 = \mu$, тогда d_2 не может $= \gamma_i$ и λ, иначе эта пара не принадлежит 4-й группе. Тогда $d_1 = \mu$; $d_2 = \alpha, \beta, \ldots, \omega$, а значит располож. не изм., и кол-во пар в 4-й группе не изм. после транспозиции.

Посмотрим, насколько изменилось кол-во инверсий:

$$0 + k + (\cancel{m} - t) - (1 + (\cancel{m} - k) + t) = 2(k-t) + 1 \not\vdots\, 2$$

Значит перестан. изменила свою четность ■

Докажем, что четность числа транспозиций = четности числа инверсий перестановки.

Любую перестановку можно представить виде транспозиций.

Представим перестан. f, как $f = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_k$, где σ_i – транспоз.

Т.к. в исходной перестан. f_0 все эл-ты стоят в натур. порядке, то инверсий в ней 0 шт. $\Rightarrow f_0$ – четн.

1) $k \vdots 2$. Четность изм. четн. кол-во раз $\Rightarrow f$ – четн.

2) $k \not\vdots 2$. Нечетное кол-во раз $\Rightarrow f$ – нечетн.

Любую перестановку можно разложить в произв-е независимых циклов.

И $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 3 & 5 & 10 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Циклы: 1) $1 \to 4 \to 1$

2) $2 \to 7 \to 10 \to 9 \to 8 \to 6 \to 5 \to 3 \to 2$

Цикл не может начать повтор. и с 8, т.к. 8 связана с 9.