2 Т° Вейерштрасса:

Если f непр. на замкн. огран. мн-ве (K),
то она достигает своих наиб. и наим. зн-ий.

Д-во: (для наиб. зн-я)
Пусть $M = \sup f(x)$. По 1-й т. Вейерштрасса
f - ограничена $\Rightarrow M$ - конечное.
Предположим, что максим. зн-е не достигается,
т.е. $\forall x \in K \quad f(x) < M$.
По опред-ю супремума $\forall n \ \exists x_n \in K : f(x_n) > M - \frac{1}{n}$.
(т.е. в любой $U(M)$ есть т. x_n).
Выразим n: $n < \frac{1}{M - f(x_n)}$ и расс-м ф-ю
$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x_n)}$. Т.к. f - непр. на K, то $\varphi(x)$ тоже
непрер. на K как частн-е непрер. ф-ий.
Известно, что $\varphi(x_n) > n \quad (\forall n)$, т.е. φ - неогранич.,
но, т.к. она непр. на K, она должна быть ограничена
по 1-й т. Вейерштрасса ?! $\Rightarrow$ макс. знач. достигается ■

Д-во: (для наим. зн-я)
Пусть $m = \inf f(x)$. Тогда по 1-й т. Вейерштрасса
f - ограничена $\Rightarrow m$ - конечное число.
Предположим, что миним. зн-е не достигается,
т.е. $\forall x \in K \quad x > m$.
По опред. инфимума $\forall n \ \exists x_n : f(x_n) < m + \frac{1}{n}$,
т.е. в любой $U(m)$ существует $x_n \in K$.
Выразим n: $n < \frac{1}{f(x_n) - m}$ и расс-м ф-ию
$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - m}$. Она непрер. на K как частное
непр. на K ф-ий.
Известно, что $\varphi(x_n) > n \ (\forall n)$, т.е. φ - неогр.,
но она д.б. огран. по 1-й т. Вейерштрасса ?!
$\Rightarrow$ мин. знач-е достигается ■

Следствие о сохранении отрезка.
Если f непр. на $[a, b]$, то $f([a, b])$ - отрезок.
Д-во: $[a, b]$ - замкнут. огр. мн-во. Тогда
по 1-й т. Вейерштрасса f - ограничена,
а по 2-й т. Вейерштрасса f достиг. мин. и
макс. значений. По лемме о сохр. промеж.
$f([a, b])$ - промеж. $\Rightarrow f([a, b])$ - отрезок,
а если быть точнее $[\inf [a, b]; \sup [a, b]]$ ■