Ступенчатая матрица с нулевым углом — матрица, в к эл-ты на пересечении $1 \le i \le m$ строк и $m+1 \le j \le n$ столбцов равны нулю.

Определитель такой матрицы: $|A| = \begin{vmatrix} A_1 & O \\ B & A_2 \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2|$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ a_{m+1\,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{m+1\,n} \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1\,m+1} & \dots & a_{m+1\,n} \\ \dots & & \\ a_{n\,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Д-во: Докажем по индукции по порядку $m$ верхней диагонали $A_1$.

База индукции: $m = 1$. Тогда $A_1 = (a_{11})$, а значит $|A| = a_{11} \cdot |A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$ — верно.

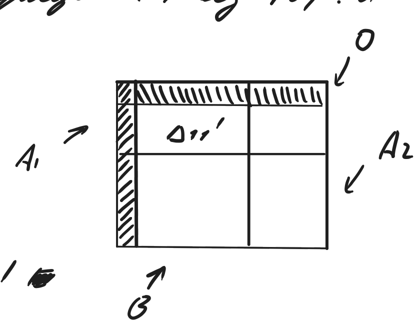
Инд. предположение: $m \ge 2$ и для порядка $m-1$ док.

Инд. переход: Разложим опред-ль $A$ по первой строке:

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + \dots + a_{1m} A_{1m} + \dots + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{a_{1n}}} \cdot A_{1n} = a_{11} \cdot A_{11} + \dots + a_{1m} A_{1m}$$
$$= (-1)^2 \cdot a_{11} \cdot \Delta_{11} + \dots + (-1)^{1+m} \cdot a_{1m} \Delta_{1m}.$$

Все $\Delta_{1i}$ — определители ступенчат. матриц с порядком $A_1 = m-1$. Для них выполняется теорема.

Тогда $\Delta_{1i} = \Delta_{1i}' \cdot |A_2|$, где $\Delta_{1i}'$ — матрица $A_1$ без 1 стр. и $i$ столбца. Обозначим $A_{1i}' = \Delta_{1i}' \cdot (-1)^{1+i}$




Тогда $A_{1i} = A_{1i}' \cdot |A_2|$

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11}' \cdot |A_2| + \dots + a_{1m} \cdot A_{1m}' \cdot |A_2| =$$
$$= |A_2| \cdot (\underbrace{a_{11} \cdot A_{11}' + \dots + a_{1m} \cdot A_{1m}'}_{\text{разлож. по эл-там 1-й строки } A_1}) = |A_2| \cdot |A_1| \blacksquare$$