Система стягивающихся полуинтервалов.

Пусть $[a_{n+1}, b_{n+1}) \subset [a_n; b_n)$ и $b_n - a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Если $\nexists n': \forall n \geq n' \ b_n = b_{n'}$, то $\exists! c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n)$

Д-во: Расс-м сист. стягив. отрезков $\{[a_n; b_n]\}$.

Известно, что $\exists! c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$. Если $c \neq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n)$,

то $\exists n': n \geq n' \ b_n = b_{n'}$. Т.к. $c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$, то $c = b_{n'}$ ■

Представл. вещ. числа в виде десятичн. дроби.

Пусть $x \in \mathbb{R}$, $x \in [0; 1)$ и $[0; 1) = \bigcup\limits_{k=0}^{9} [\frac{k}{10}; \frac{k+1}{10})$

$x \in [\frac{\varepsilon_1}{10}; \frac{\varepsilon_1 + 1}{10}) = \bigcup\limits_{k=0}^{9} [\frac{\varepsilon_1}{10} + \frac{k}{100}; \frac{\varepsilon_1}{10} + \frac{k+1}{100})$

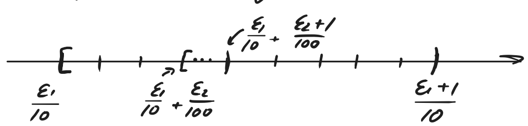
$x \in [\frac{\varepsilon_1}{10} + \frac{\varepsilon_2}{100}; \frac{\varepsilon_1}{10} + \frac{\varepsilon_2 + 1}{100}) \Rightarrow x = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$

Единственность представления в виде десят. дроби.

Пусть $0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ – беск. десятичн. дробь.

Тогда $\exists! x: 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ – его десятичн. представление.

Д-во: По $0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ построим последоват. стягив. полуотрезков J_k:



Т.к. в $0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ отсутствует „9" в периоде

Значит $\nexists n': n \geq n' \ J_n = J_{n'}$ ⇒ По лемме о стягив. отрезках $\exists! c: c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$ и $c = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$ ■