Предел суммы = сумме пределов.

Д-во: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$

$\exists \delta_1 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(a) \cap D \ |f(x) - b| < \varepsilon$

$\exists \delta_2 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) \cap D \ |g(x) - c| < \varepsilon$

Тогда для $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$:

$|f(x) + g(x) - (b+c)| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < 2\varepsilon$ ■

Предел произведения = произведению пределов

Д-во: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$

$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(a) \cap D \ |f(x) - b| < \varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) \cap D \ |g(x) - c| < \varepsilon$

Тогда для $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$:

$\underline{|f(x)g(x) - bc|} = |f(x)g(x) - f(x)c + f(x) \cdot c - bc| =$

$= |f(x)(g(x) - c) + c(f(x) - b)| < \underline{f(x) \cdot \varepsilon + c \cdot \varepsilon}$

$|f(x)| = |f(x) - b + b| < \varepsilon + |b|$

$|f(x)g(x) - bc| < \varepsilon^2 + |b| \cdot \varepsilon + c \cdot \varepsilon$ ■

Предел частного = частному пределов.

Д-во: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\#)}{=} b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$; $g(x) \neq 0$

Достаточно доказать, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{c}$.

$|g(x) - c| < \varepsilon \Rightarrow c - \varepsilon < g(x) < c + \varepsilon$

$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c - g(x)}{g(x) \cdot c}\right| = \left|\frac{g(x) - c}{g(x) \cdot c}\right| < \frac{\varepsilon}{c^2 - \varepsilon \cdot c}$ (*)

Тогда для $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ вып. (*) и (#).

Значит по св-ву предела произв.:

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$; $c \neq 0$ по св-ву стабилизации знака ■