2 Т° Вейерштрасса:

Если f непр. на замкн. огран. мн-ве (K),

то она достигает своих наиб. и наим. зн-ий.

Д-во: (для наиб. зн-я, т.к. для наим. аналогично):

По 1 т° Вейерштр. f - огран. $\Rightarrow$ sup - конечный.

Из определ. супремума:

$\exists M: \forall x \in K \ |f(x)| \leq M$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in K: \ f(x) > M - \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{n}$, тогда:

$\underset{\downarrow \atop M}{M - \frac{1}{n}} < f(x_n) \leq \underset{\downarrow \atop M}{M} \ \Rightarrow f(x_n) \to M$

Т.к. $x_n \in K$, она огранич. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по 7° Б.-В. $\exists x_{n_k} \to x_0$, а в силу непрерывности

на K: $f(x_{n_k}) \to f(x_0) \Longrightarrow f(x_0) = M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ ∎

Следствие о сохранении отрезка.

Если f непр. на $[a;b]$, то $f([a,b])$ - отрезок.

Д-во: $[a,b]$ - замкнут. огр. мн-во. Тогда

по 1-й т. Вейерштрасса f - ограничена,

а по 2-й т. Вейерштрасса f достиг. мин. и

макс. значений. По лемме о сохр. промеж.

$f([a,b])$ - промеж. $\Rightarrow f([a,b])$ - отрезок,

а если быть точнее $[\inf f([a;b]); \sup f([a;b])]$ ∎