Основы комбинаторики. Нумерация перестановок

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 24.10.2023

Содержание лекции

- Нумерация перестановок и перестановка, следующая за данной
- Подсчет подмножеств размера k
- Разбиение на подмножества фиксированного размера
- Свойства сочетаний C_n^k

Нумерация перестановок

Построили биекцию из множества $\langle 1 : n \rangle$ через множество чисел, имеющих $\leq n$ знаков в факториальной системе счисления, в множество $0 : (n! - 1)$
Поймём как она устроена (по перестановке найти следующую за ней)
Пример: $a = \langle 3, 8, 7, 6, 2, 4, 9, 5, 1 \rangle$, $T(a) = (2, 6, 5, 4, 1, 1, 2, 1, 0)$.
В факториальной с.с.: 26541121_f. Прибавляем 1. Что получится?
$26541121_f + 1_f = 26541200_f$
По получившемуся числу восстановим перестановку b, следующую за a.
$T(b) = (2, 6, 5, 4, 1, 2, 0, 0, 0), b = \langle 3, 8, 7, 6, 2, 5, 1, 4, 9 \rangle$. Что изменилось?

"Убывающий хвост" перестановки и еще один элемент левее изменят свое положение (все разряды, соответствующие "убывающему хвосту", переполнятся, а к следующему разряду прибавится единица):
l – длина "убывающего хвоста", $T(a)_{n-l} = k$, то последние $l+1$ элементы $T(b)$ будут выглядеть так: $(k+1, 0, \ldots, 0)$

- первые $n - l - 1$ элементов перестановки останутся неизменны
- на $(n - l)$-й позиции в b будет стоять минимальный элемент x множества $\{a_j : j \geq n - l\}$, такой, что $x > k$
- оставшиеся l элементов множества $\{a_j : j \geq n - l\} \setminus \{x\}$ будут стоять в конце перестановки b в порядке возрастания.

Пример расчета ''следующей'' перестановки

$a = \langle 5, 4, 1, 3, 2 \rangle$, $n = 5$

''Убывающий хвост'' a – $(3, 2) \Rightarrow l = 2$

$(n - 2)$-й элемент a равен 1.

Минимальный элемент множества $\{a_j : j \geq n - l\}$ $(= \{1, 2, 3\})$, больший 1, равен 2.

Таким образом, перестановка, следующая за a, имеет вид $\langle 5, 4, 2, 1, 3 \rangle$

Подсчет подмножеств размера k

A – произвольное конечное множество, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $|A| = n$
$S := \{M \subseteq A : |M| = k\}$. Чему равна мощность S?
$\forall a_i \in \langle A \rangle\ a_i = \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}, \ldots, a_{i_n} \rangle$
$M = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$. Так как $M \subseteq A$ и $|M| = k$, $M \in S$.
$A \setminus M = \{a_{i_{k+1}}, \ldots, a_{i_n}\} = \bar{M}$
$\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \rangle \in \langle M \rangle$, $\langle a_{i_{k+1}}, \ldots, a_{i_n} \rangle \in \langle \bar{M} \rangle$

Таким образом, $\forall M' \in S$ можно установить биекцию
$f : \langle M' \rangle \times \langle \bar{M}' \rangle \to \langle A \rangle$, определенную следующим образом:
$\forall b \in \langle M' \rangle\ \forall c \in \langle \bar{M}' \rangle f((b, c)) = \langle b_1, \ldots b_k, c_1, \ldots c_{n-k} \rangle$
(любую перестановку можно разрезать на перестановку некого подмножества размера k (первые k элементов перестановки) и некую перестановку его дополнения (остальные элементы)).

Комбинаторно получаем равенство $|S| \times k! \times (n-k)! = n!$ (количество перестановок множества A равно количеству способов выбрать подмножество A размера k, затем упорядочить его элементы и затем упорядочить элементы дополнения этого подмножества в множестве A). Отсюда получаем формулу для искомого $|S|$: $|S| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Для таких чисел существует специальное обозначение C_n^k (в англоязычной литературе $\binom{n}{k}$).

Разбиение на подмножества фиксированного размера

Сколькими способами можно разбить множество A мощности n на m упорядоченных подмножеств A_i: $|A_i| = k_i, \sum_{i=1}^{m} k_i = n$ (внутри подмножеств порядка нет)?

Аналогично предыдущей задаче (одно из P разбиений, в каждой A_i не учитываем порядок, получаем биекцию разрезанием перестановки длины n на m перестановок соответствующих длин):

$\langle 1 : k_1 \rangle \times \cdots \times \langle 1 : k_n \rangle \to \langle A \rangle \Rightarrow$

$P \times k_1! \times \cdots \times k_m! = n!$, где P – искомое число разбиений множества A на m упорядоченных подмножеств фиксированных размеров $\Rightarrow P = \frac{n!}{\prod_m^{i=1} k_i!}$

Обозначают искомое P как $C_n^{k_1,\ldots,k_m}$ или $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}$.

Пример: Количество анаграмм слова ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД?

Каждой анаграмме можно сопоставить набор множеств позиций, на которых стоят конкретные буквы.

Т.е. для исходного слова будет А – $\{2, 4\}$, Е – $\{7, 9, 13\}$ и т.д.

Объединение всех таких множеств для всех букв из слова – $\langle 1 : n \rangle$

Эти множества можно упорядочить (e.g., по алфавиту соответствующие им буквы); эти множества не пересекаются. **Итого**: $\frac{14!}{2!3!1!1!3!3!1!}$

Свойства C_n^k

Утверждение: $C_n^k = C_n^{n-k}$

Док-во: выбрав подмножество размера k множества размера n, мы однозначно выбрали и его дополнение — множество размера $n-k$

Утверждение: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Док-во: зафиксируем какой-то элемент a исходного множества. Мы можем либо взять его в наше подмножество размера k, и тогда нам останется выбрать оставшиеся $k-1$ элементов из $n-1$ других элементов множества, либо не брать, и тогда нам нужно набрать все k элементов из оставшихся $n-1$ элементов исходного множества, а тк множество способов выбрать подмножество размера k, содержащее a, и множество способов выбрать подмножество размера k, не содержащее a, не пересекаются, мощность их объединения равна сумме их мощностей, т.е. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Утверждение: $C_{3n}^n = \sum_{r=0}^n C_n^r \times C_{2n}^{n-r}$

Док-во: n — заклинания, $2n$ — существа. Составить колоду размера n
Зафиксируем r — кол-во заклинаний в колоде. Для конкретного r можно составить колоду $C_n^r C_{2n}^{n-r}$ способами. Причем $r \in 0 \ldots n$.
сумма количества способов составить колоду с r заклинаниями для всех r равна общему количеству способов составить колоду из n карт из $3n$ карт коллекции, т.е. $C_{3n}^n = \sum_{r=0}^n C_n^r \times C_{2n}^{n-r}$.

Самостоятельно

Задача 1: $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

Задача 2: $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$

Задача 3: $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = 0$