

# Экзаменационные вопросы

## Алгебра, I курс

1. Операции над множествами. Тождества, связывающие объединения и пересечения множеств.
2. Отображения, композиции отображений. Ассоциативность композиции.
3. Бинарные отношения, отношение эквивалентности.
4. Инъективные, сюръективные и биективные отображения, их композиции. Обратное отображение.
5. Разбиение множества на классы, связь с отношением эквивалентности. транспозиций.
6. Свойства делимости целых чисел. Теорема о делении с остатком.
7. Теорема о представлении НОД в виде линейной комбинации чисел.
8. Взаимно простые числа и их свойства.
9. Основная теорема арифметики.
10. Связь между НОД и НОК.
11. Сравнения по модулю целого числа. Свойства сравнений.
12. Полная и приведенная система вычетов по модулю  $n$ .
13. Малая теорема Ферма.
14. Функция Эйлера, ее мультипликативность.
15. Вычисление функции Эйлера.
16. Теорема Эйлера.
17. Китайская теорема об остатках.
18. Целочисленные линейные уравнения с двумя неизвестными.
19. Поле комплексных чисел, правила действий над комплексными числами.
20. Модуль и аргумент комплексного числа. Формула Муавра.
21. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы.
22. Многочлены, теорема о делении с остатком для многочленов.
23. Теорема о представлении НОД двух многочленов.
24. Теорема о разложении многочленов на неприводимые множители.
25. Основная теорема алгебры (формулировка). Лемма о сопряженных корнях вещественного многочлена.
26. Разложение вещественного многочлена на неприводимые множители.
27. Производная и кратная производная многочлена, свойства производной.
28. Формула Тейлора.
29. Кратность корня многочлена, ее связь с кратными производными.
30. Интерполяционная формула Лагранжа.
31. Разложение правильной дроби в сумму простейших.
32. Определение группы, примеры. Простейшие свойства групп.

33. Подгруппы, разложение группы в объединение смежных классов.
34. Связь между порядком группы и порядком элемента. Доказательство малой теоремы Ферма с помощью теории групп.
35. Нормальные подгруппы. Факторгруппа.
36. Гомоморфизм групп. Ядро и образ гомоморфизма. Ядро как нормальная подгруппа.
37. Изоморфизм групп. Примеры. Гомоморфизмы с тривиальным ядром.
38. Теорема о связи между группой, и ядром и образом гомоморфизма.
39. Циклические группы, их описание.
40. Векторные пространства, примеры. Линейная зависимость и независимость векторов.
41. Конечномерные векторные пространства. Базис, эквивалентные определения базиса.
42. Теорема о числе элементов в базисе. Определение размерности пространства.
43. Подпространство векторного пространства. Примеры. Связь между размерностями пространства и его подпространства.
44. Гомоморфизм векторных пространств, его ядро и образ.
45. Соотношение между размерностями пространства, ядра и образа.
46. Равенство строчного и столбцового рангов матрицы.
47. Критерий максимальности ранга квадратной матрицы.
48. Вычисление ранга матрицы через миноры.
49. Матрица линейного оператора в данном базисе. Соответствие между линейными операторами и их матрицами.
50. Соотношение между матрицами линейного оператора в разных базисах.
51. Собственные числа и собственные пространства линейных операторов. Характеристический многочлен.
52. Линейная независимость векторов из разных собственных пространств.
53. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного числа, связывающее их неравенство.
54. Диагонализируемые линейные операторы. Условие диагонализируемости оператора в терминах собственных подпространств.
55. Диагонализируемые линейные операторы. Условие диагонализируемости оператора в терминах кратностей собственных чисел.
56. Теорема Гамильтона-Кэли.