Определитель транспонированной матрицы совпадает с определителем исходной матрицы.

Д-во: A - матрица; B - транспонир. матрица.

Матрицы A и B состоят из одних и тех же $n!$ произведений P. При транспонировании меняется только порядок следования при суммировании.

Тогда $|A| = |B|$ ■

Подробнее:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots \\ a_{1n} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

P - произв. произв., вход. в $|A|$

$P = a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \dots a_{n\alpha_n}$. После транспонирования:

$$P = \overset{(*)}{b_{\alpha_1 1} \cdot b_{\alpha_2 2} \cdot \dots \cdot b_{\alpha_n n}} = \overset{(\#)}{b_{1\beta_1} \cdot b_{2\beta_2} \cdot \dots \cdot b_{n\beta_n}}$$

Д-ем, что $(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ имеют одинаковую четность.

Перейдем из произвед. (*) в произвед. (#). Пусть для этого понадобилось r транспозиций.

Тогда: $\alpha_1 \dots \alpha_n \xrightarrow{r} 1 \dots n$

$1 \dots n \xrightarrow{r} \beta_1 \dots \beta_n$

Предположим, что $\alpha_1 \dots \alpha_n$ - четн. Тогда r - четн., т.к. $1 \dots n$ - четн. перест. $\Rightarrow \beta_1 \dots \beta_n$ - четн.

Предположим, что $\alpha_1 \dots \alpha_n$ - нечет. Тогда r - нечет., т.к. $1 \dots n$ - четн. перест. $\Rightarrow \beta_1 \dots \beta_n$ - нечетн.

Тогда P в $|A|$ и P в $|B|$ имеют одинак. знаки ■