Дискретная случайная величина. Матожидание и дисперсия

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 28.11.2023

Дискретная случайная величина

Определение: Для вероятностного пространства (S, Pr), $|S| < \infty$ функция $\xi : \ S \to \mathbb{R}$ называется **дискретной случайной величиной** (ДСВ).

Определение: **Образом** ξ называется множество $\mathrm{Im}(\xi) = \{\xi(s) \mid s \in S\}$.

$$Pr\{\xi = a\} = Pr(\{\omega \in S \ : \ \xi(\omega) = a\})$$
$$Pr\{\xi \leq a\} = Pr(\{\omega \in S \ : \ \xi(\omega) \leq a\})$$

Пример: Для вероятностного пространства, иллюстрирующего три броска монетки, можно ввести дискретную случайную величину φ, отражающую количество выпавших орлов.

Тогда, например, $Pr\{\varphi = 2\} = Pr(\{\text{РОО, ОРО, ООР}\}) = \frac{3}{8}$.

Арифметические операции над ДСВ:

1. $\eta = \xi + c$ определим как $\eta(\omega) = \xi(\omega) + c$.
   $Pr\{\eta = a\} = Pr\{\xi + c = a\} = Pr\{\xi = a - c\}$;
2. $\eta = \xi \cdot c$, $c \neq 0$ определим как $\eta(\omega) = \xi(\omega) \cdot c$.
   $Pr\{\eta = a\} = Pr\{\xi \cdot c = a\} = Pr\{\xi = \frac{a}{c}\}$;
3. $\eta = \xi^2$ определим как $\eta(\omega) = (\xi(\omega))^2$.
   $Pr\{\eta = a\} = Pr\{\xi^2 = a\}$.

Математическое ожидание ДСВ

Определение: **Математическим ожиданием** ДСВ ξ на вероятностном пространстве (S, Pr) называют $\mathbb{E}\,\xi := \sum\limits_{\omega \in S} \xi(\omega) \cdot Pr(\{\omega\})$.

Альтернативная формула:

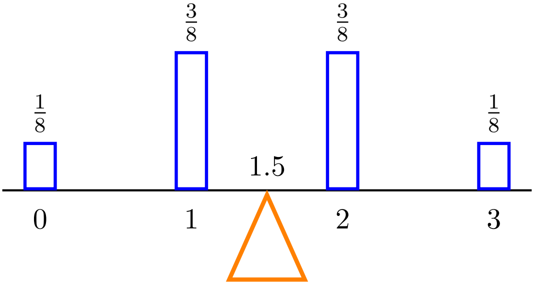
$$\mathbb{E}\,\xi = \sum_{a \in \mathrm{Im}(\xi)} \sum_{\omega \in S, \xi(\omega)=a} a \cdot Pr(\{\omega\}) = \sum_{a \in \mathrm{Im}(\xi)} a \cdot \sum_{\omega \in S, \xi(\omega)=a} Pr(\{\omega\}) =$$
$$= \sum_{a \in \mathrm{Im}(\xi)} a \cdot Pr(\{\omega \in S \ : \ \xi(\omega) = a\}) = \sum_{a \in \mathrm{Im}(\xi)} a \cdot Pr\{\xi = a\}.$$

Т.е. произведение всех возможных значений ДСВ на вероятности этих значений.

Интуитивное восприятие математического ожидания: если изобразить числовую прямую как балку, и на каждой точке a из $\mathrm{Im}(\xi)$ нарисовать столбик высоты $Pr\{\xi = a\}$, то мат. ожидание ξ будет лежать на числовой прямой в той точке, на которой эту балку можно сбалансировать.

Математическое ожидание ДСВ

Например, мат. ожидание количества орлов, выпавших после броска трех монет, можно визуализировать следующим образом:



Арифметические операции над мат. ожиданием

1. $\eta = \xi + c$ определим как $\eta(\omega) = \xi(\omega) + c$.
   $\mathbb{E}\,\eta = c + \mathbb{E}\,\xi$ (по альтернативной формуле мат. ожидания);
2. $\eta = \xi \cdot c$, $c \neq 0$ определим как $\eta(\omega) = \xi(\omega) \cdot c$.
   $\mathbb{E}\,\eta = c \cdot \mathbb{E}\,\xi$ (по альтернативной формуле мат. ожидания);
3. $\eta = \xi^2$ определим как $\eta(\omega) = (\xi(\omega))^2$.
   $\mathbb{E}\,\eta = \sum\limits_{\omega \in S} \xi^2(\omega) \cdot Pr(\{\omega\})$;
4. $\eta = \xi + \psi$ определим как $(\xi + \psi)(\omega) = \xi(\omega) + \psi(\omega)$.
   $\mathbb{E}(\xi + \psi) = \sum\limits_{\omega \in S} (\xi(\omega) + \psi(\omega)) \cdot Pr(\{\omega\}) =$
   $= \sum\limits_{\omega \in S} \xi(\omega) \cdot Pr(\{\omega\}) + \sum\limits_{\omega \in S} \psi(\omega) \cdot Pr(\{\omega\}) = \mathbb{E}\,\xi + \mathbb{E}\,\psi$.

Дисперсия ДСВ. Испытания Бернулли

Определение: **Дисперсией** ДСВ ξ на вероятностном пространстве (S, Pr) называют мат. ожидание квадрата разности значения ДСВ и ее мат. ожидания: $D\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\,\xi)^2$.

$\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\,\xi)^2 = \mathbb{E}(\xi^2 - 2 \cdot \mathbb{E}\,\xi \cdot \xi + (\mathbb{E}\,\xi)^2) = \mathbb{E}\,\xi^2 - \mathbb{E}(2 \cdot \mathbb{E}\,\xi \cdot \xi)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}\,\xi)^2 =$
$= \mathbb{E}\,\xi^2 - 2 \cdot \mathbb{E}\,\xi \cdot \mathbb{E}\,\xi + (\mathbb{E}\,\xi)^2 = \mathbb{E}\,\xi^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2$.
Таким образом, $D\xi = \mathbb{E}\,\xi^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2$.

Испытания Бернулли. Пусть на произвольном вероятностном пространстве (S, Pr) задана ДСВ ξ такая, что $Pr\{\xi = 1\} = p, Pr\{\xi = 0\} = 1 - p$. Словами это можно обосновать так: каждый элементарный исход $\omega \in S$ считается либо успешным $(\xi(\omega) = 1)$, либо неудачным $(\xi(\omega) = 0)$. Тогда:
$\mathbb{E}\,\xi = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$.
$D\xi = \mathbb{E}\,\xi^2 - (\mathbb{E}\,\xi)^2 = (1 - p) \cdot 0^2 + p \cdot 1^2 - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

Определение: **Схема Бернулли** – последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода: "успех" с вероятностью p и "неудача" с вероятностью $1 - p$.
Давайте посчитаем вероятность получить в n испытаниях k успехов.

Схема Бернулли

Ω – пр-во элементарных событий, соответствующее схеме Бернулли.
$\Omega = \Big\{(a_1, \ldots, a_n) \;\Big|\; a_i \in \{0, 1\}, i \in 1 : n\Big\}$, т.е. $|\Omega| = 2^n$.
Вероятность любого элементарного события $\omega \in \Omega$ равна

$$Pr(\omega) = p^{\sum_{i=1}^{n} a_i} \cdot (1 - p)^{n - \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Если в $\omega \in \Omega$ наблюдается k успехов, то $Pr(\omega) = p^k (1 - p)^{n-k}$
Пусть событие $A_k = \Big\{\omega \in \Omega \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} a_i = k\Big\}$. Тогда

$$Pr(A_k) = \sum_{\omega \in A_k} Pr(\omega) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Задача на схему Бернулли

Задача: Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из лука равна $\frac{1}{3}$. Производится 6 выстрелов. Какова вероятность ровно двух попаданий? Какова вероятность не менее двух попаданий?

Решение. Обозначим исход $A = \{$попадание при одном выстреле$\}$, тогда $p = Pr(A) = \frac{1}{3}$, $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. Число выстрелов $n = 6$.

Естественно предположить, что выстрелы не зависят друг от друга. Тогда ответ на первый вопрос находим по формуле Бернулли:

$$Pr_6(2) = C_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243} \approx \frac{1}{3}.$$

Ответ на второй вопрос следующий:

$$Pr_6(2,6) = 1 - C_6^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6 - C_6^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{473}{729} \approx \frac{2}{3}.$$

Наивероятнейшее число попаданий лежит в пределах от $6 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ до $6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, т.е. от $1\frac{1}{3}$ до $2\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ оно равно 2.