Производящие функции

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 28.05.2024

Содержание лекции

- Производящие функции. Элементарные преобразования.
- Вычисление производящей функции некоторых известных последовательностей.
- Решение комбинаторных задач методом производящих функций.

Выбор из отрицательного числа элементов

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k!)} =: f(n)$. Имеет смысл $f(-n)$?

Ровно в таком виде не особо.
Но $f(n) = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \Rightarrow f(-n) = \frac{(-n)(-n-1)...(-n-k+1)}{k!}$. Четность k ...

$|f(-n)| = \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!} = C_{n+k-1}^k$ – комбинаторный смысл есть, а у $|f(-n)|$?

C_{n+k-1}^k – сочетание из n элементов по k элементов с повторениями (эклеры и картошки).
Почему бы тогда просто не сказать $f(-n) = C_{-n}^k = (-1)^k C_{n+k-1}^k$?

Производящие функции

Для посл-ти $\{a_n\}$ рассмотрим формальную сумму $\sum a_n t^n$, $t \in \mathbb{C}$.

Определение: Если посл-ть $\{a_n\}$ конечна, то эта сумма всегда определяет функцию (многочлен) $F(t) = \sum a_n t^n$, которая называется **производящей функцией** для $\{a_n\}$.
Определение: Если посл-ть $\{a_n\}$ бесконечна, то получается степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ – может сходиться в некоторой области D к некоторой функции $F(t)$, которая также называется **производящей функцией** для a_n.
Определение: Если задана производящая функция $F(t)$ для некоторой посл-ти a_n, то говорят, что посл-ть a_n **полностью определена**.

Пример: Дана конечная посл-ть $a_k = C_n^k, 0 \leq k \leq n$. Найти $F_n(t)$.

Решение: $F_n(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k = (t+1)^n$ – бином Ньютона по сути!

Тогда для сочетаний без повторений C_n^k производящая функция это $(t+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k$. А для сочетаний из n по k с повторениями будет $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{n+k-1}^k t^k$ – что за производящая функция?

Элементарные преобразования

Определение: **Суммой** двух производящих функций

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

и

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots$$

называется производящая функция

$$A(s) + B(s) = a_0 + b_0 + a_1 s + b_1 s + a_2 s^2 + b_2 s^2 + \dots$$

Определение: **Произведением** двух производящих функций A и B называется производящая функция

$$A(s)B(s) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)s + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)s^2 + \dots$$

Операции сложения и умножения производящих функций коммутативны и ассоциативны.

Элементарные преобразования

Даны две производящие функции

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

и

$$B(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

причём $B(0) = 0$.
Определение: **Подстановкой** производящей функции B в производящую функцию A называется производящая функция

$$A(B(t)) = a_0 + a_1 B(t) + a_2 B(t)^2 + \dots = a_0 + a_1 b_1 t + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) t^2 + \dots$$

Пример: $B(t) = -t$

$$A(B(t)) = A(-t) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3 + \dots$$

Всякий раз записывать производящие функции в виде ряда неудобно. Поэтому для некоторых часто встречающихся функций используется сокращенная запись.

1. $(1+s)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}s^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}s^3 + \ldots$, где $\alpha \in \mathbb{C}$;
2. $e^s = \exp(s) = 1 + \frac{1}{1!}s + \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{3!}s^3 + \ldots$;
3. $\ln\left(\frac{1}{1-s}\right) = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \ldots$;
4. $\sin s = s - \frac{1}{3!}s^3 + \frac{1}{5!}s^5 - \ldots$;
5. $\cos s = 1 - \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{4!}s^4 - \ldots$

Дифференцирование и интегрирование

Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ – производящая функция.

Определение: **Производной** этой функции называется функция

$$A'(s) = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + \ldots + n a_n s^{n-1} + \ldots$$

Определение: **Интегралом** называется функция

$$\int A(s) = a_0 s + a_1 \frac{s^2}{2} + \ldots + a_2 \frac{s^3}{3} + a_n \frac{s^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Формула интеграла соответствует значению интеграла с переменным верхним пределом $\int A(s) = \int_0^s A(\xi) d\xi$

$$\left(\int A(s) \right)' = A(s), \int A'(s) = A(s) - a_0$$

Дифференцирование и интегрирование

Пример: Вычислить производящую функцию

$$f(s) = \frac{1}{1\cdot 2}s^0 + \frac{1}{2\cdot 3}s^1 + \frac{1}{3\cdot 4}s^2 + \ldots + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}s^n + \ldots$$

Решение: Умножим функцию f на s^2 и продифференцируем. Получаем элементарную производящую функцию:

$$(s^2 f(s))' = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \ldots = \ln\left(\frac{1}{1-s}\right)$$

откуда

$$f(s) = s^{-2}\int \ln\left(\frac{1}{1-s}\right) = s^{-2}((s-1)\ln\left(\frac{1}{1-s}\right) + s)$$

Геометрическая прогрессия

Определение: Простейшая посл-ть – это постоянная посл-ть $1, 1, 1, \ldots$ Производящая функция для нее имеет вид:

$$G(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \ldots,$$

выражаем посл-ть через элементарные производящие функции, умножив обе части равенства на s, получим:

$$sG(s) = s + s^2 + s^3 + s^4 + \ldots = G(s) - 1$$

откуда:

$$G(s) = \frac{1}{1-s}$$

Геометрическая прогрессия

Тот же вывод с незначительными изменениями проходит для произвольной последовательности вида $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$:

$$G_{a,r}(s) = a + ars + ar^2s^2 + ar^3s^3 + \ldots = a(1 + (rs) + (rs)^2 + (rs)^3 + \ldots),$$

откуда:

$$rs \cdot G_{a,r}(s) = G_{a,r}(s) - a$$
$$G_{a,r}(s) = \tfrac{a}{1-rs}.$$

Приведенные выше выкладки представляют собой вывод формулы для суммы геометрической прогрессии. Результат этих выкладок согласуется с определением производящей функции $(1-s)^{-1}$.

Пример с C^k_{n+k-1}

Фиксируем, например, $n = 3$.
Тогда $\{a_k\} = C^k_{n+k-1} = 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \dots$
$f(t) = 1 + 3t + 6t^2 + 10t^3 + \dots$ – так какая производящая функция?

Рассмотрим, например, $21t^5$ и будем рассуждать как для бинома Ньютона. Рассмотрим сочетание из $1, 2, 3$ размера 5 и смотрим на $n = 3$ бесконечных разложений $1 + t + t^2 + t^3 + \dots$

$\{1, 1, 2, 3, 3\}$ будет соответствовать t^2, t, t^2, $\{1, 1, 1, 1, 3\} \to t^4, 1, t$, $\{2, 2, 2, 2, 2\} \to 1, t^5, 1$, то есть получаем члены, которые в произведении дадут как раз t^5. Собрав все сочетания мы получим как раз коэффициент перед t^5

$\Rightarrow$ для получения производящей функции необходимо перемножить $n = 3$ бесконечные суммы: $1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{1}{1-t} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{(1-t)^3} = (-t+1)^{-3}$

Тогда $t \to -t$ и $(t+1)^{-n} = \sum_{k=0}^{n} C^k_{n+k-1}(-t)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C^k_{n+k-1} t^k$

Числа Шрёдера

Определение: *Числа Шрёдера* S_n в комбинаторике описывают количество путей из левого нижнего угла квадратной решётки $n \times n$ в противоположный по диагонали угол, используя ходы вверх (0,1), вправо (1,0) или вверх-вправо (1,1), при этом пути не поднимаются выше диагонали квадратной решётки.

- Числа Шрёдера равны количеству способов разрезания данного прямоугольника на $n+1$ меньших прямоугольников с помощью n разрезов. Эти разрезы проводятся через заданные n точек внутри прямоугольника,никакие две из которых не лежат на одной прямой, параллельной сторонам прямоугольника, при этом каждый разрез проходит через одну из этих точек и делит только один прямоугольник на два.

- Числа Шрёдера считают количество путей из точки (0,0) в (2n,0), использующих только шаги вправо-вверх или вправо-вниз (шаги (1,1) или (1,–1)) или двойные шаги вправо (2,0), которые не опускаются ниже оси x.

Числа Шрёдера

- Чтобы вывести производящую функцию для чисел Шрёдера, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел:

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} S_k S_{n-1-k}$$

- Будем искать производящую функцию в виде $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$. Решая это соотношение, находим ПФ для чисел Шрёдера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n = \frac{1-x-\sqrt{1-6x+x^2}}{2x}$$

- Явная формула для вычисления чисел Шрёдера:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k C_{n+k}^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{2k} c_k,$$

где c_k – k-ое число Каталана (чтооо?)

Метод производящих функций

• С производящими функциями можно работать как с обычными функциями и рядами.

• Иначе говоря, их можно складывать и умножать, а также почленно дифференцировать и интегрировать.

• Рассмотрим примеры подсчета комбинаторных сумм, доказательства тождеств при помощи метода производящих функций, обсудим алгоритм метода производящих функций и решим две комбинаторные задачи, применив данный метод.

Примеры производящих функций

Рассмотрим производящие функции для различных комбинаторных последовательностей:

- $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$ – производящая функция для разности количества разбиений числа n в четное и нечетное число различных слагаемых. Правильность этого легко осознать, если понять, что каждая скобка представляет какое-то слагаемое и мы можем его взять или не взять.
- $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1-x^n})$ – производящая функция для последовательности p_n, где p_i является числом разбиений числа i на слагаемые.
- $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$ – производящая функция для последовательности d_n, где d_i – число разбиений на различные слагаемые.

Подсчет комбинаторной суммы

Задача. Найти значение суммы $\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$.

Решение.

Рассмотрим конечную последовательность биномиальных коэффициентов $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$
и ее производящую функцию $F(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot \binom{n}{k} = (t+1)^n$.

Найдем производную функции $F(t)$.

С одной стороны, $F'(t) = ((t+1)^n)' = n \cdot (t+1)^{n-1}$.

С другой стороны, $F'(t) = (\sum_{k=0}^{n} t^k \cdot \binom{n}{k})' = \sum_{k=0}^{n} k \cdot t^{k-1} \cdot \binom{n}{k}$.

Подставляя в оба полученные выражения для производной $F'(t)$ значение $t = 1$, получаем $\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$

Доказательство комбинаторного тождества

Пример. Доказать тождество $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{m}{k-r} = \binom{n+m}{k}$.

Решение.

Рассмотрим конечные последовательности биномиальных коэффициентов $\binom{n}{r}$ и $\binom{m}{r}$, где $r = 0, 1, ..., \max(n, m)$, и их производящие функции

$$F(t) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot t^r = (t+1)^n, G(t) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \cdot t^r = (t+1)^m.$$

Тогда, $F(t) \cdot G(t) = (t+1)^n \cdot (t+1)^m = (t+1)^{n+m} = \sum_{s=0}^{n+m} \binom{n+m}{s} \cdot t^s$.

С другой стороны, перемножаем многочлены:
$F(t) \cdot G(t) = (\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cdot t^r) \cdot (\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \cdot t^r) = \sum_{s=0}^{n+m} (\sum_{r=0}^{s} \binom{n}{r} \cdot \binom{m}{s-r}) \cdot t^s$.

Приравнивая коэффициенты при t^k, *получаем* $\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r} \cdot \binom{m}{k-r} = \binom{n+m}{k}$.

Задача про шары

Задача. Сколькими способами можно расположить в линию чёрные и белые шары, общее количество которых равно n?

Решение.

Обозначим белый шар символом $\circ$, чёрный – $\bullet$, T_n – искомое количество расположений шаров. Символом $\emptyset$ – обозначим нулевое количество шаров.

- Если $n = 1$, то очевидно имеется два способа – взять либо белый шар $\circ$, либо взять чёрный шар $\bullet$, таким образом, $T_2 = 2$.

- Если $n = 2$, то имеется четыре способа расположений: $\circ\circ$, $\circ\bullet$, $\bullet\circ$, $\bullet\bullet$.

- Рассмотрим случай для $n = 3$. Мы можем начать белым шаром и продолжить 4-мя комбинациями, описанными выше $\circ\circ\circ$, $\circ\circ\bullet$, $\circ\bullet\circ$, $\circ\bullet\bullet$, или же мы можем начать чёрным шаром и аналогично продолжить 4-мя шарами $\bullet\circ\circ$, $\bullet\circ\bullet$, $\bullet\bullet\circ$, $\bullet\bullet\bullet$.

Задача про шары

В итоге количество шаров удвоилось, то есть $T_3 = 2T_2$.
Аналогично $T_4 = 2T_3$, то есть, обобщая для всех n, получаем рекуррентное уравнение $T_n = 2T_{n-1}$ которое и является решением для данной задачи. Решение такого уравнения можно легко угадать – $T_n = 2^n$

А что если у нас плохо с угадыванием? И что делать, если уравнение будет сложнее? А вообще причём здесь производящие функции?

«Просуммируем» все возможные комбинации расположений шаров:

G $= \emptyset + \circ + \bullet + \circ\circ + \circ\bullet + \bullet\circ + \bullet\bullet + \circ\circ\circ + \circ\circ\bullet + \circ\bullet\circ + \circ\bullet\bullet + \bullet\circ\circ + \bullet\circ\bullet + \bullet\bullet\circ + \bullet\bullet\bullet + \ldots$

Будем складывать и умножать последовательности шаров.
Со сложением всё понятно, но что значит умножить одну последовательность шаров на другую?

Перемножив $\circ\bullet$ на $\bullet\circ$ мы получим не что иное как $\circ\bullet\bullet\circ$.
Заметим, однако, что произведение шаров в отличие от произведения чисел не является коммутативным, так как $\circ\bullet \cdot \bullet\circ \neq \bullet\circ \cdot \circ\bullet$.

Символ $\emptyset$ – в произведении играет роль мультипликативной единицы, то есть $\emptyset \cdot \circ\circ\bullet = \circ\circ\bullet \cdot \emptyset = \circ\circ\bullet$.

Задача про шары

Производя с рядом G последовательность манипуляций, а именно вынося за скобки левый белый и чёрный шары

$\mathrm{G} = \varnothing + \circ\,(\varnothing + \circ + \bullet + \circ\circ + \circ\bullet + \bullet\circ + \bullet\bullet + \ldots) + \bullet\,(\varnothing + \circ + \bullet + \circ\circ + \circ\bullet + \bullet\circ + \bullet\bullet + \ldots) = \varnothing + \circ\mathrm{G} + \bullet\mathrm{G}$

Получим уравнение $\mathrm{G} = \varnothing + \circ\mathrm{G} + \bullet\mathrm{G}$.

Несмотря на то, что умножение некоммутативно, и мы фактически не различаем левое и правое деление, попробуем всё же «решить» это уравнение, на свой страх и риск.

Получим: $\mathrm{G} = \frac{\varnothing}{\varnothing - (\circ + \bullet)}$. Учитывая формулу суммы геометрической прогрессии $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$, имеем:
$\mathrm{G} = \frac{1}{\varnothing - (\circ + \bullet)} = \varnothing + (\circ + \bullet) + (\circ + \bullet)^2 + (\circ + \bullet)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (\circ + \bullet)^n$.
Далее воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \circ^k \cdot \bullet^{n-k} \right)$$

Задача Эйлера про грузы

Задача. Какие грузы можно взвесить с помощью гирь в $2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^n$ грамм и сколькими способам?

Решение.

Рассмотрим произведение $G(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)\dots$
$= 1 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \dots$
Каждый g_k – это коэффициент при z_k, а z_k – получается как произведение каких-то одночленов z^{2m}, то есть g_k – это число способов взвешивания груза в k грамм заданными гирями.
Умножим обе части равенства на $(1-z)$.

$(1-z)G(z) = (1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots = (1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots = (1-z^4)(1+z^4)(1+z^8)\dots = 1 \Rightarrow G(z) = \frac{1}{1-z}$
$G(z) = 1 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \dots = \frac{1}{1-z}$.
Сопоставляя эти два равенства, получаем $g_1 = g_2 = g_3 = \dots = 1$, то есть любой груз в k грамм можно взвесить гирями в $1, 2, 4, 8, \dots$ грамм притом единственным способом.