1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Т.к. log – непрерывен, то можно вынести его

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$

$t = \frac{1}{x}$; $x = \frac{1}{t}$; $x \to 0 \Rightarrow t \to \infty \Rightarrow \ln\Big(\overbrace{\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}^{e}\Big) = 1$ ■

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

$y = a^x - 1 \Rightarrow x = \log_a(y+1)$; $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$\lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} \cdot \ln a = 1 \cdot \ln a = \ln a$ ■

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$y = (1+x)^\alpha - 1 \Rightarrow y + 1 = (1+x)^\alpha$

$\ln(y+1) = \alpha \ln(1+x)$; $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$

Возьмем $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ и $y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\overbrace{\frac{y_n}{\ln(y+1)}}^{1} \cdot \overbrace{\frac{\alpha\ln(1+x)}{x_n}}^{\alpha}\Big) = \alpha$ ■