Следующие ф-ии непрерывны:

1) Степенная x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$

Д-во:

а) $\alpha = 1$: x - непр. на $\mathbb{R}$

б) $\alpha \in \mathbb{N}$: $x^\alpha = x \cdot \ldots \cdot x$ - непр. как произведение

в) $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$: $x^\alpha = \frac{1}{x^n}$ - непр. как частное

г) $\alpha = 0$: $x^0 = 1$ - непр. на $\mathbb{R}$

д) $\alpha = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$:

1) n - четное $\Rightarrow x^n$ - $\uparrow$ на $[0; \infty)$

По лемме о сохр. промежутка $f([0;\infty)) = [0;\infty)$

2) n - нечетн. $\Rightarrow x^n$ - $\uparrow$ на $\mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

По т° о $\exists$ и непрерывн. f^{-1} у нас

$\exists f^{-1}$ непрерыв и $\uparrow$ на $\left[\begin{array}{l} [0;\infty),\ n \vdots 2 \\ \mathbb{R},\ n \not\vdots\, 2 \end{array}\right.$: $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$

е) $\alpha = -\frac{1}{n}$: $x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$ - непр. как частное

ё) $\alpha = \frac{p}{q}$: $x^{\frac{p}{q}} = x^p \cdot x^{\frac{1}{q}}$ - непр. как произвед.

2) Логарифмическая

$f: \mathbb{R} \to (0;\infty)$; $f: x \mapsto a^x$; f - непр. на $\mathbb{R}$

По т.° о $\exists$ и непр. обр. ф-ии $\exists f^{-1}$ - непр. и монот.

$f^{-1}: (0;\infty) \to \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \log_a x$

3) Тригонометрич.

а) $\sin x$: $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x \overset{?}{=} \sin x_0$

$|\sin x - \sin x_0| = |2\sin\frac{x-x_0}{2} \overbrace{\cos\frac{x+x_0}{2}}^{\le 1}| \le |2\sin\frac{x-x_0}{2}| \le$

$\le 2|\frac{x-x_0}{2}| = |x-x_0|$ (т.к. $|\sin x| \le |x|$)

б) $\cos x$: $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ - непр. как композиция

в) tg и ctg - непр. как частное

4) а) $\arcsin x$ при $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ непрерывн. как обратн.

б) $\arccos x$ при $x \in [0;\pi]$ непрерывн. как обр.

в) $\operatorname{arctg} x$ при $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ - непр. как обр.

г) $\operatorname{arcctg} x$ при $x \in (0;\pi)$ непрерывн. как обр.