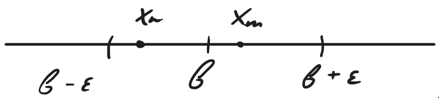
$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.

Д-во: 1) $\Rightarrow$. Известно, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится,

т.е. для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N\ |x_n - b| < \varepsilon$

Д-ть: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n, m \geq N\ |x_m - x_n| < \varepsilon$.



Рассм-м произвольное $n \geq N$ и произв. $m \geq N$.

Тогда $|x_n - b| < \varepsilon$ и $|x_m - b| < \varepsilon$

$|x_m - x_n| = |x_m - x_n - b + b| \leq |x_m - b| + |-x_n + b| < 2\varepsilon$ ■

2) $\Leftarrow$. Известно, что $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундамент.,

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall m, n \geq N\ |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Д-ть: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n \geq N\ |x_n - b| < \varepsilon$.

I Докажем, что фундамент. последовательность ограничена.

$|x_n| = |x_n - x_m + x_m| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < \varepsilon + |x_m|$

$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, \varepsilon + |x_m|\} \Rightarrow$ огранич.

II. По принципу Больцано-Вейерштрасса из огранич. последов. можно извлечь сходящ. подпоследоват.

Для нашей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, это будет $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Тогда $\exists K: \forall k \geq K\ |x_{n_k} - b| < \varepsilon$. Пусть $k_0 = \max\{N, K\}$

Тогда $n_{k_0} \geq k_0 \geq N$. Исх. послед. фундамент. $\Rightarrow$ вып.

$\exists N: \forall m, n \geq N\ |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Рассм-м $|x_n - b| = |x_n - x_{n_{k_0}} + x_{n_{k_0}} - b| \leq \overset{<\varepsilon}{|x_n - x_{n_{k_0}}|} + \overset{<\varepsilon}{|x_{n_{k_0}} - b|} < 2\varepsilon$ ■