Дискретная математика: темы курса

- Основы теории множеств
- Предикаты и отношения
- Основы комбинаторики
- Элементарная теория вероятностей
- Методы моделирования дискретных случайных величин
- Теория информация
- Случайные процессы. Марковские процессы
- Теория графов
- Динамическое программирование
- Экстремальные задачи на графах
- Производящие функции («конкретная» математика)

Множества. Разбиения множеств

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 05.09.2023

Определения

Определение: **Множеством** называется коллекция объектов произвольной природы. Для обозначения используются прописные латинские или греческие буквы.

Элементами множества назваются объекты, формирующие данное множество.

Пример: $\Phi = \{1, \lambda, element, \{IV, white\}\}$ - множество, состоящее из элементов $1, \lambda, element, \{IV, white\}$, причем последний элемент сам является множеством.

Обозначение: "$\in$" – содержится; "$\notin$" – не содержится.

Пример: "$1 \in \Phi$" – 1 содержится в Φ (или 1 является элементом Φ); "$IV \notin \Phi$" – IV не содержится в Φ (или IV не является элементом Φ).

Определение: Пусть A – произвольное множество. Множество B называют **подмножеством** A тогда и только тогда, когда любой элемент множества B является также элементом множества A ($B \subseteq A \Leftrightarrow \forall b \in B: \; b \in A$).

Определение: **Собственным** подмножеством множества A называют такое подмножество B, что в A существует элемент, который не является элементом B:

$$B \subseteq A \text{ и } \exists x \in A\ x \notin B \Leftrightarrow B \subset A$$

Обозначение: "$B \subsetneqq A$" – такая запись может использоваться, чтобы подчеркнуть, что B является собственным подмножеством A.

Говорят, что $A = B$, если $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$.

Определение: **Мощностью** конечного множества называется число элементов этого множества. Обозначается $|A|$.

Определение: **Пустым** множеством называется множество, мощность которого равна 0. Для обозначения используют $\varnothing$.

Способы задания множества

Полное перечисление элементов, например, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

Интуиция. Например, понятно, что запись $\{1, 2, \ \ldots \ , 10\}$ задаёт множество натуральных чисел от 1 до 10, а $\{1, 2, \ \ldots\}$ – множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$, но при этом формально обе записи не имеют смысла. Запись $n \in \mathbb{N}$ $\{1, 2, \ \ldots \ , n\}$ формально некорректна для $n = 1$, но интуитивно понятно, что в таком случае число 2 в множество входить не будет.
В дальнейшем для обозначения множества натуральных чисел от m до n будем использовать обозначение $m : n$;

Условие выбора. Запись $\{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 2\}$ задает множество всех натуральных чисел, которые делятся на 2, то есть $\{2, 4, \ \ldots\}$. Слева от разделителя $\mid$ задаётся множество, откуда выбираются элементы, а справа – условие выбора.
Запись $\{x :<$ условие $>\}$ означает, что в множестве содержатся все объекты, удовлетворяющие условию, записанному справа от двоеточия;

Результат некоторых операций над множествами.

Операции над множествами

Обозначение: Здесь и далее $||$ будет использоваться для обозначения **логического ИЛИ**, а $\&\&$ – **логического И**.

Пусть A, B – произвольные множества.

Объединение множеств: $A \cup B = \{x : x \in A \;||\; x \in B\}$;

Пересечение множеств: $A \cap B = \{x : x \in A \;\&\&\; x \in B\}$;

Разность множеств: $A \setminus B = \{x : x \in A \;\&\&\; x \notin B\}$.

Утверждение (свойства операций над мн-ми): Операции объединения и пересечения множеств обладают ассоциативностью и коммутативностью. Доказать это можно проверив соответствующие равенства. Например, для ассоциативности объединения надо проверить $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ по определению равенства множеств.

Обозначение:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n =: \bigcup_{i \in 1:n} A_i \text{ при } n \in \mathbb{N}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n =: \bigcap_{i \in 1:n} A_i \text{ при } n \in \mathbb{N}$$

Множество всех подмножеств. Разбиение множества

Определение: A – произвольное множество. Тогда $\{B : B \subseteq A\} =: 2^A$.

Примеры: $\Phi = \{1, \lambda, element, \{IV, white\}\}$.
$\{element\} \subseteq 2^\Phi$ – ложно, так как $element \not\subseteq \Phi$;
$\{element\} \in 2^\Phi$ – верно, так как $\{element\} \subseteq \Phi$;
$\varnothing \in 2^\Phi$, так как $\varnothing$ является подмножеством любого множества.

Утверждение: $|2^A| = 2^{|A|}$.

Определение: A – произвольное множество. Набор $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \ \dots\ , \Lambda_n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, называется **разбиением** множества A, если:

- $\Lambda \subseteq 2^A$;
- $\forall i \in 1:n \ \Lambda_i \neq \varnothing$;
- $\forall i, j \in 1:n \ i \neq j \ \Lambda_i \cap \Lambda_j = \varnothing$;
- $\bigcup\limits_{i \in 1:n} \Lambda_i = A$.

(совокупность $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \ \dots\ , \Lambda_n\}$ непустых попарно дизъюнктных подмножеств A называется его **разбиением**, если A равно их объединению).

Измельчение разбиения. Произведение разбиений

Определение: Пусть A – произвольное множество, Λ и K – разбиения A, $|\Lambda| = m$, $|K| = n$. Λ называют **измельчением** K (или говорят, что Λ **мельче** K), если $\forall i \in 1 : m \ \exists j \in 1 : n \ \Lambda_i \subseteq K_j$.

Замечание: Λ всегда мельче Λ.

Определение: A – произвольное множество, Λ и K – разбиения A, $|\Lambda| = m$, $|K| = n$. **Произведением** разбиений K и Λ называется такое разбиение Π множества A, которое мельче K и мельче Λ, и при этом самое крупное из этих измельчений (то есть, все разбиения, которые мельче K и мельче Λ будут также мельче Π).

Теорема о существовании произведения разбиений: Пусть $\Pi_{ij} := \Lambda_i \cap K_j$, Π_0 – множество всех Π_{ij} для $i \in 1 : m$, $j \in 1 : n$. Докажем, что $\Pi = \{x \in \Pi_0 : x \neq \varnothing\}$ является произведением Λ и K.

Доказательство теоремы о существовании

- Так как K и Λ – разбиения множества A, $\Lambda_i \subseteq A, K_j \subseteq A \Rightarrow \Pi_{ij} = \Lambda_i \cap K_j \subseteq A\ \forall i \in 1:m,\ \forall j \in 1:n$.
- $\forall x \in \Pi_{ij}\ x \in \Lambda_i$ по определению Π_{ij}. Так как Λ – разбиение множества A, $\Lambda_i \cap \Lambda_p = \varnothing \Rightarrow x \notin \Lambda_p \Rightarrow x \notin \Pi_{pq} \Rightarrow \Pi_{ij} \cap \Pi_{pq} = \varnothing$ для любых $i, p \in 1:m,\ \forall j, q \in 1:n,\ i \neq p$.
- Аналогично докажем, что $\forall i, p \in 1:m,\ \forall j, q \in 1:n,\ j \neq q$ верно $\Pi_{ij} \cap \Pi_{pq} = \varnothing$. Таким образом, мы доказали, что пересечение любых двух элементов Π является пустым множеством.
- Как было доказано выше, $\forall i \in 1:m,\ \forall j \in 1:n\ \Pi_{ij} \subseteq A$, $\bigcup\limits_{i \in 1:m, j \in 1:n} \Pi_{ij} \subseteq A$. Поскольку K и Λ – разбиения множества А, $\forall a \in A \exists i \in 1;m, j \in 1:n\ a \in \Lambda_i, a \in K_j \Rightarrow a \in \Pi_{ij} \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in \bigcup\limits_{i \in 1:m, j \in 1:n} \Pi_{ij} \Rightarrow A \subseteq \bigcup\limits_{i \in 1:m, j \in 1:n} \Pi_{ij}$, то есть по определению равенства множеств, $\bigcup\limits_{i \in 1:m, j \in 1:n} \Pi_{ij} = A$. Очевидно, что добавление или изъятие из списка объединяемых множеств любого количества пустых множеств никак не влияет на результат объединения.

Доказательство теоремы о существовании

Π мельче Λ и мельче K по определению Π, так как любой элемент Π является подмножеством какого-то элемента Λ и подмножеством какого-то элемента K.

Докажем, что если разбиение Ω множества A мельче Λ и мельче K, то оно мельче Π. Так как Ω мельче Λ и мельче K, то $\forall \omega \in \Omega\ \exists i \in 1 : m\ \omega \subseteq \Lambda_i;\ \exists j \in 1 : n\ \omega \subseteq K_j \Rightarrow \omega \subseteq \Pi_{ij}$. $\omega \neq \varnothing$ так как Ω - разбиение. Следовательно, $\Pi_{ij} \neq \varnothing \Rightarrow \Pi_{ij} \in \Pi$. Таким образом, мы доказали, что произведение произвольных разбиений Λ и K произвольного множества A существует. □

Пример: Пусть $A = 0 : 11$. Определим разбиения

$$\begin{aligned} \Lambda : &\ \ \Lambda_1 = 0 : 3, \Lambda_2 = 4 : 9, \Lambda_3 = 10 : 11 \\ K : &\ \ K_1 = 0 : 5, K_2 = 6 : 11 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\Pi_{11} = 0 : 3, \Pi_{21} = 4 : 5, \Pi_{31} = \varnothing \\ &\Pi_{12} = \varnothing, \Pi_{22} = 6 : 9, \Pi_{32} = 10 : 11 \end{aligned}$$

и $\Pi = (\Pi_{11}, \Pi_{21}, \Pi_{22}, \Pi_{32})$.