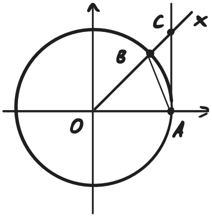
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{?}{=} 1$$

Докажем что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$



$$S_{OAB} < S_{\overset{\frown}{OAB}} < S_{OAC} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

Значит $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\mid : \sin x$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ ничего не измен., т.к. чётные ф-ии.

Хотим д-ть: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x : \underbrace{0<|x|<\delta}\quad \left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$

Тогда для $\delta=\frac{\pi}{2}$: $\underset{\substack{\downarrow x\to 0\\ 1}}{\cos x} < \frac{\sin x}{x} < \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{1} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}\xrightarrow{x\to 0} 1$

Следствие:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$; $t=\arcsin x$; $x=\sin t$

$x\to 0 \Rightarrow \sin t\to 0 \Rightarrow t\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$; $t=\operatorname{arctg} x$; $x=\operatorname{tg} t$

$x\to 0 \Rightarrow \operatorname{tg} t\to 0 \Rightarrow t\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg} t} = 1$