$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq 0 \Rightarrow \exists \delta: \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap D \quad f(x)\cdot b > 0$

Д-во: Зафиксируем $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. Тогда

$\exists \delta > 0: \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap D \quad |f(x) - b| < \frac{|b|}{2}$

$b - \frac{|b|}{2} < f(x) < b + \frac{|b|}{2}$

1) $b > 0: \quad \underline{0 <} \frac{b}{2} < \underline{f(x)} < \frac{3b}{2}$

2) $b < 0: \quad \frac{3b}{2} < \underline{f(x)} < \frac{b}{2} \underline{< 0}$ ■

Следствие: $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

Известно, что $\exists \delta_0 > 0: \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(a) \cap D \quad b > c$

Тогда $\forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(a) \cap D \quad f(x) > g(x)$

Д-во: $\exists \delta_1 > 0: \forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(a) \cap D \quad |f(x) - b| < \varepsilon \quad (1)$

$\exists \delta_2 > 0: \forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}(a) \cap D \quad |g(x) - c| < \varepsilon \quad (2)$

Расм-м ф-ю $f(x) - g(x)$:

$|f(x) - g(x) - b + c| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < 2\varepsilon$

Тогда при $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ вып. (1) и (2).

Значит $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap D \quad \lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = b - c$

Тогда $f(x) - g(x)$ и $b - c$ одного знака.

По условию $\underline{b > c} \Rightarrow b - c > 0 \Rightarrow f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow \underline{f(x) > g(x)}$ ■