Ориентированные графы. Ациклические графы, их свойства. Сильная связность орграфов, компоненты сильной связности.

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 26.03.2024 и 02.04.2024

Содержание лекции

- Орграф. Пути и циклы в орграфе. Отношение достижимости.
- Отношение связанности. Компонента сильной связности.

Орграф. Пути и циклы в орграфе

Определение: **Ориентированным графом** (или **орграфом**) называют $G = (V, E)$, где $V \neq \emptyset$ – множество вершин, $E \subseteq V \times V$ – множество ребер.

Ребра часто записывают по их концам: (v_1, v_2) или $v_1 v_2$.

Замечания: $V = \emptyset$ иногда встречается в доказательствах утверждений. **Пустым графом** называют граф, множество ребер которого пусто.

Определение: Пусть $G = (V, E)$. $G' = (V', E')$ называют **подграфом** G $(G' \leq G)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq (V' \times V') \cap E$. Если $E' = (V' \times V') \cap E$ подграф называют **порожденным**. Порожденный подграф обозначают $G[V']$.

Определение: Пусть $G = (V, E)$. **Путем** называется последовательность вершин $v_0 v_1 \ldots v_n :\ \forall i \in \overline{0 : n}\ v_i \in V,\ \forall i \in \overline{1 : n}\ (v_{i-1}, v_i) \in E$.
Простым называется путь, в котором все вершины различны.

Определение: **Циклом** называется последовательность вершин $v_0 v_1 \ldots v_n :\ \forall i \in \overline{0 : n}\ v_i \in V,\ \forall i \in \overline{1 : n}\ (v_{i-1}, v_i) \in E,\ v_0 = v_n$.
Простой цикл – все вершины, кроме последней, различны.

Определение: **Ациклическим орграфом** называется орграф без циклов.

Отношение достижимости

На множестве вершин V зададим отношение достижимости R^*: вершина $v_1 \in V$ находится в отношении R^* с вершиной $v_2 \in V$ (в этом случае говорят, что **вершина** v_2 **достижима из вершины** v_1), если существует путь с началом v_1 и концом v_2.

Отношение достижимости для вершин ориентированного графа рефлексивно и транзитивно, но не обязательно симметрично.

Определим с помощью отношения достижимости разбиение множества вершин графа на классы эквивалентности: вершины v_1, v_2 принадлежат одному классу, если отношение симметрично, т.е. v_2 достижима из вершины v_1 и v_1 достижима из вершины v_2 (взаимная достижимость).

Отношение взаимной достижимости для вершин ориентированного графа рефлексивно, транзитивно и симметрично.

Пусть $l_1 = v_1 \dots v_2$ и $l_2 = v_2 \dots v_1$ – пути, связывающие эти вершины. Тогда вместе они образуют цикл. Т.о., любые вершины одного класса эквивалентности принадлежат некоторому циклу.

Если граф ациклический, то каждый класс эквивалентности состоит из одной вершины.

Граф-покрытие и граф достижимости

Определение: Минимальный граф G_b, индуцирующий на множестве вершин $V(G)$ то же отношение достижимости, что и исходный ориентированный граф G (т.е. граф с неуменьшаемым далее множеством ребер), называется **базисным графом для графа** G.

Замечание: Базисный граф не обязательно единственный.

Замечание: В конечном орграфе существует базисный граф. Получается последовательным удалением ребер (v_1, v_2), для которых существует не содержащий его путь.

Определение: В неорграфах классы эквивалентности по отношению достижимости называются **связными компонентами**.
Классы эквивалентности по отношению взаимной достижимости называются **компонентами сильной связности**.

Определение: Пусть $G = (V, E)$ – ориентированный граф.
Граф достижимости (a.k.a **граф транзитивного замыкания**) $G^* = (V, E^*)$ для G имеет то же мн-во вершин V и следующее мн-во ребер $E^* = \{(u, v) \mid$ в графе G вершина v достижима из вершины $u\}$.

Замечание: Ребра G^* соответствуют путям исходного графа G.

Построение графа достижимости

Определение: Матрицей смежности ориентированного графа $G = (V, E)$ с $|V| = n$ называется матрица A_G размера $n \times n$ с элементами

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введем обозначения $\hat{A} := A_G \vee E_n$, $\hat{A}_0 = E_n$, $\hat{A}_1 = \hat{A}$, …, $\hat{A_{k+1}} = \hat{A}_k \wedge \hat{A}$

Лемма: Пусть $\hat{A}_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$. Тогда

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{в } G\ \exists \text{ путь из } v_i \text{ в } v_j \text{ длины } \le k, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Док-во: Индукция по k. База верна по определению $\hat{A}_0$.
Пусть верно для k. Докажем для $k+1$.
$a_{ij}^{(k+1)} = a_{i1}^{(k)} a_{1j}^{(1)} \vee \ldots \vee a_{ir}^{(k)} a_{rj}^{(1)} \vee \ldots \vee a_{in}^{(k)} a_{nj}^{(1)}$. Пусть в G из v_i в v_j есть путь длины $\le k+1$. Рассмотрим кратчайший из таких путей.
Если длина $\le k$, то $a_{ij}^{(k)} = 1$ и, т.к. $a_{jj}^{(1)} = 1$, то $a_{ij}^{(k)} a_{j1j}^{(1)} = 1$ и $a_{ij}^{(k+1)} = 1$.
Если длина ровно $k+1$, то пусть v_r – предпоследняя вершина. Тогда из v_i в v_r есть путь длины k и по предположению $a_{ir}^{(k)} = 1$. Т.к. есть ребро (v_r, v_j), то $a_{ir}^{(k)} a_{rj}^{(1)} = 1$. Поэтому $a_{ir}^{(k)} a_{rj}^{(1)} = 1$ и $a_{ij}^{(k+1)} = 1$.

В другую сторону: пусть $a_{ij}^{(k+1)} = 1$, тогда $\exists\ r:\ a_{ir}^{(k)} a_{rj}^{(1)} = 1$. Если это $r = j$, то $a_{ij}^{(k)} = 1$ и по предположению в G есть путь из v_i в v_j длины $\leq k$.

Если $r \neq j$, то $a_{ir}^{(k)} = 1$ и $a_{rj}^{(1)} = 1$. Это означает, что в G есть путь из v_i в v_r длины $\leq k$ и ребро (v_r, v_j). Объединяем и получаем путь из v_i в v_j длины $\leq k + 1$. $\square$

Следствие: Пусть $G = (V, E)$ – ориентированный граф, $|V| = n$, G^* – его граф достижимости. Тогда $A_{G^*} = \hat{A_{n-1}}$.

При вычислении можно хитрить: считать $\hat{A} \Rightarrow \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A}_4 \Rightarrow \ldots$
Также, т.к. на диагонали $\hat{A}$ стоят единицы, то $\forall\ i < j$ все единицы в $\hat{A}_i$ сохранятся в $\hat{A}_j$ (и в $(\hat{A}_i)^2$).

При вычислении квадратов, если в "сумме" обнаруживается $r:\ a_{ir} = 1$ и $a_{rj} = 1$, то остальные слагаемые можно не рассматривать.

Уже знаем: классы эквивалентности по отношению достижимости называются связными компонентами. Граф достижимости – ребра соответствуют путям исходного графа. Умеем строить по матрице смежности.

Определение: **Граф сильной достижимости** $G^*_* = (V, E^*_*)$, где $E^*_* = \{(u, v) \mid u, v$ взаимно достижимы в $G\}$.

Матрица графа сильной достижимости строится на основе матрицы достижимости: $A_{G^*_*}(i, j) = A_{G^*}(i, j) \wedge A_{G^*}(j, i)$

По матрице сильной достижимости можно выделить компоненты сильной связности графа G:

- В первую компоненту K_1 поместить вершину v_1 и все вершины $v_j: \ A_{G^*_*}(1, j) = 1$
- Построены $K_1, \ldots, K_i$ и v_k вершина с минимальным индексом без компоненты. Помещаем ее в K_{i+1} и все $v_j: \ A_{G^*_*}(k, j) = 1$

Определение: Пусть K и K' – компоненты сильной связности графа G. Компонента K **достижима** из компоненты K', если $K \equiv K'$ или существуют такие две вершины $u \in K$ и $v \in K'$, что u достижима из v. K **строго достижима** из K', если $K \not\equiv K'$ и K достижима из K'.

Определение: Отношение строгой достижимости можно представлять в виде орграфа, вершины – компоненты сильной связности, ребра есть если есть строгая достижимость – **конденсация G, ацикличный орграф!**

Турниры и полустепени в орграфе

Определение: **Полустепень исхода** в орграфе для вершины v – число дуг, исходящих из вершины Обозначается $d^+(v)$. **Полустепень захода** в орграфе для вершины v – число дуг, входящих в вершину $(d^-(v))$.
Определение: **Турнир** – некоторый полный орграф (V, E) (орграф без петель и между любой парой вершин есть ровно одно ребро).
Определение: Для ребра $(u, v) \in E$ говорим, что u **доминирует** над v.
Определение: Турнир (будучи орграфом) **транзитивен**, если из $(u, v) \in E, (v, w) \in E$ следует $(u, w) \in E$.
Определение: **Порядком** турнира T называется число его вершин.
Замечание: Полустепень выхода вершины v турнира T – число вершин, над которыми v доминирует (ещё называется **результатом**).

Определение: **Последовательность результатов** T – упорядоченная последовательность $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где s_i – результат v_i, $1 \le i \le n$, причём $s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n$.

Определение: **Множество результатов** некоторого турнира T – это посл-ть $D = (d_1, d_2, \ldots, d_m)$ различных результатов вершин турнира T, где $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$.
Определение: Если посл-тью результатов турнира T является S, а множество результатов – D, то будем говорить, что S **генерирует** D.

Теорема Редеи-Камиона (для пути)

Теорема Редеи-Камиона (для пути): любой турнир порядка n содержит гамильтонов путь (т.е. путь, содержащий все n вершин).

Док-во: Индукция по количеству вершин. База: $n = 3$ очевидна. Переход: пусть утверждение теоремы справедливо для всех турниров порядка не более n. Рассмотрим произвольную вершину v^*. Турнир $T - v^*$ имеет порядок n, тогда по предположению индукции в нем есть гамильтонов путь $P = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

1°: если в турнире T существует ребро (v^*, v_1), то значит найден гамильтонов путь $P' = (v^*, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ в турнире T.

2°: если нет ребра (v^*, v_1), то рассмотрим на пути первую вершину v_i, $i \in 2 : n$ такую, что в турнире T есть ребро (v^*, v_i).

- если такого ребра не существует, то все ребра в турнире ведут в v^* в том числе (v_n, v^*). Тогда есть гамильтонов путь $P'(v_1, v_2, \ldots, v_n, v^*)$.
- пусть нашлось первое такое ребро (v^*, v_i). Тогда существует ребро (v_{i-1}, v^*) и, следовательно, есть гамильтонов путь $P'(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v^*, v_i, \ldots, v_n)$.

Теорема Редеи-Камиона (для цикла)

Теорема (Редеи-Камиона (для цикла)): в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл. Верно и обратное утверждение.

Лемма: Сильно связный турнир T порядка ≥ 3 содержит цикл длины 3.

Док-во леммы: Рассмотрим произвольную вершину v^*. Обозначим за V_1 и V_2 множества вершин доминирующих и доминируемых вершиной v^* соответственно. Заметим, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ и $V_1 \cup V_2 = V(T)$. Кроме того, оба эти множества не пусты, иначе вершина v^* была бы истоком или стоком соответственно, что противоречит сильной связности.

Если это не существует ребро $e = (u, w)$ с началом в V_2 и концом в V_1, то вершины из V_1 не будут достижимы из вершин из V_2, что снова будет противоречить сильной связности. Следовательно, существует ребро $e = (u, w), u \in V_2, w \in V_1$.

Тогда есть цикл длины 3: (u, w, v^*, u).

Лемма: Если сильно связный турнир T порядка хотя бы 3 содержит цикл длины k, то он содержит цикл длины $k+1$.

Док-во леммы: Обозначим цикл $C_k = (v_1, \ldots, v_k, v_1)$. Рассмотрим два случая:

1. существует вершина v^* такая, что существуют вершины $u, w \in C_k$ такие, что $(v^*, u) \in E(T), (w, v^*) \in E(T)$;
2. такой v^* не существует.

1°: перенумеруем вершины в цикле так, чтобы $(v_1, v^*) \in E(T)$ и найдем первую вершину (она обязательно существует) в направлении обхода цикла v_i: (v^*, v_i). Отсюда следует, что есть ребро (v_{i-1}, v^*). Тогда есть цикл $P' = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v^*, v_i, \ldots, v_k, v_1)$ длины $k+1$.

2°: В этом случае вершины из $V(T) \setminus C_k$ делятся на доминирующие все вершины из C_k и доминируемые всеми вершинами из C_k. Обозначим множества V_1 и V_2 соответственно. По построению $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ и оба они не пусты, иначе нарушается условие сильной связности турнира T. Кроме того, в силу сильной связности, существует ребро $(u, w), u \in V_2, w \in V_1$. Тогда есть цикл $P' = (v_1, u, w, v_3, \ldots, v_k, v_1)$ длины $k+1$.

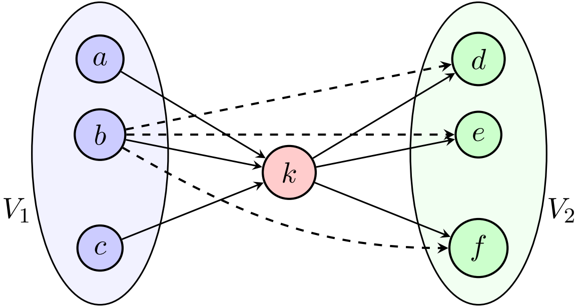
Док-во теоремы: Обозначим $V(T) = n$. Индукцией по количеству вершин в цикле покажем существование циклов длины $3, \ldots, n$. База и переход следуют из лемм, соответственно.

Граф-турнир, его свойства. Король турнира

Определение: Вершина $v \in V(T)$ турнира T является **королем** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in V(T)$ $\exists$ путь из v в x длиной не более 2.

Теорема: В любом турнире T существует вершина-король.

Док-во: Рассмотрим вершину k с самой большой полустепенью исхода. Покажем, что она является королем. Пусть k не король. V_1 – множество вершин, доминирующих k, V_2 множество вершин, доминируемых $k \Rightarrow$ $\exists$ вершина $b \in V_1$, которая не проиграла никому из $V_2 \Rightarrow$ эта вершина доминирует все вершины из $V_2 \Rightarrow$ ее результат больше, чем у k (помимо вершин из V_2 вершина b доминирует еще и k). Противоречие!



Эквивалентность свойств турнира

Теорема: Для турнира порядка n следующие утверждения эквивалентны:

- T транзитивен
- T не содержит циклов длины 3
- T ацикличен
- T последовательность результатов турнира T – это $(0, 1, 2, \dots, n-1)$
- T содержит ровно один гамильтонов путь.

Доказательство эквивалентности

Док-во: $1 \Rightarrow 2 : \exists\ (u,v),(v,w),(w,u)$. Но также $\exists (u,w)$ (?!).

$2 \Rightarrow 3 : \exists$ цикл $(v_1,\dots,v_k), k \geq 4$. Т.к. нет циклов длины 3, то $\forall u,v,w$: $(u,v) \in E, (v,w) \in E \Rightarrow (u,w) \in E$ – это транзитивность! Индукцией покажем, что $\exists\ (v_1, v_{k-1})$.
База: $(v_1,v_2),(v_2,v_3) \in E \Rightarrow (v_1,v_3) \in E$. Переход: $(v_1,v_i) \in E\ \forall i < k-1$, также $(v_i,v_{i+1}) \in E \Rightarrow (v_1,v_{i+1}) \in E$ (?!) цикл (v_1,v_{k-1},v_k).

$3 \Rightarrow 4 : D^+(T)$ – мн-во степеней исхода. Индукция по n. База очевидна. Переход: пусть верно для $n-1$. В ациклическом графе есть вершина-сток $t:\ d^+(t) = 0$. Рассмотрим граф $T-t$. $D^+(T-t) = (0,1,\dots,n-2)$. А из $\forall\ v \in V \setminus t$ ведет одно ребро в t.

$4 \Rightarrow 5$: Существует по теореме Редеи-Камиона. Надо единственность. Снова индукция. База очевидна. Переход: берем $s:\ d^-(s) = 0$ (все ребра выходят, исток). Она будет первой в гамильтоновом пути. Рассмотрим граф $T-s$: исток s был соединен со всеми, степени уменьшились на 1 и $D^-(T-s) = (0,1,\dots,n-2)$. Значит в $T-s$ $\exists!$ гамильтонов путь. Если $\exists$ два г.п. с началом в s в T, то будет и два г.п. в $T-s$ (?!).

$5 \Rightarrow 1 : P = (v_1, \dots, v_n) -!$ г.п. Пусть $\exists\ m$ – наименьший индекс: в v_m идет ребро из вершины с большим индексом, а v_k — вершина с наибольшим индексом, из которой ребро ведет в v_m.

$m \neq 1, k \neq n :$ есть ребро из v_{m-1} в v_{m+1}
(минимальность v_m) и из v_m в v_{k+1} (максимальность k). Есть ещё путь
$P_1 = (v_1, \dots, v_{m-1}, v_{m+1}, \dots, v_k, v_m, v_{k+1}, \dots, v_n)$
$m \neq 1, k = n : P_1 = (v_1, \dots, v_{m-1}, v_{m+1}, \dots, v_n, v_m)$
$m = 1, k \neq n : P_1 = (v_2, \dots, v_k, v_1, v_{k+1}, \dots)$
$m = 1, k = n : P_1 = (v_2, \dots, v_n, v_1)$

Значит такого m не существует и $(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow i < j$. Значит $\forall\ i, j, k :$ $1 \leq i, j, k \leq n$ $(v_i, v_j) \in E$ и $(v_j, v_k) \in E \Rightarrow i < j \vee j < k \Rightarrow (v_i, v_k) \in E$ $\square$

Теорема: Конденсация любого турнира является транзитивным турниром.
Док-во: U, V – компоненты сильной связности. $u \in U, v \in V$: $(u, v) \in E$ или $(v, u) \in E$. Т.о. в конденсации есть либо ребро (U, V), либо (V, U). Рассмотрена произвольная пара вершин конденсации турнира, получилось, что она тоже турнир. Знаем, что конденсация ациклична $\Rightarrow$ по теореме транзитивна. $\square$

Теорема Ландау

Теорема (Ландау, 1953): Некоторая неубывающая посл-ть неотрицательных целых чисел $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ является посл-тью результатов некоторого турнира $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} s_i \geq \frac{k(k-1)}{2}$, $1 \leq k \leq n$, причем равенство при $k = n$.

Замечание: Восстановление турнира по некоторому допустимому множеству результатов – это более сложная задача, чем восстановление турнира по некоторой допустимой последовательности результатов.

Теорема (Яо, 1989): Если $m \geq 1$, $D = (d_1, \ldots, d_m)$ – множество неотрицательных чисел, то существует турнир с множеством результатов D.

Замечание: теорема Яо доказывает только существование соответствующего турнира, но не дает способ его построения.

Замечание: проверка существования турнира с заданной посл-тью результатов – линейная задача (Ландау). Построение турниров по посл-ти результатов делается быстро (квадратичные алгоритмы).