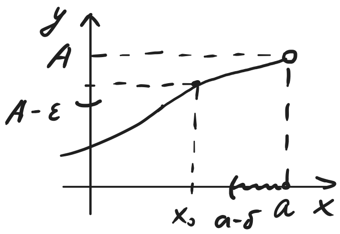
Имеется ф-ция $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ – пред. т. D

I Ф-я определена на: $D_1 = D \cap (-\infty; a)$

1. f – возр. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \sup(D_1)$



Д-во: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \forall x \in \mathring{U}_\delta(a-0)\cap D_1\ f(x)\in U_\varepsilon(\sup D_1)$.

Обозначим $\sup D_1 = A$. Рассм-м $x_0 \in D_1: f(x_0)\in U_\varepsilon(A)$.

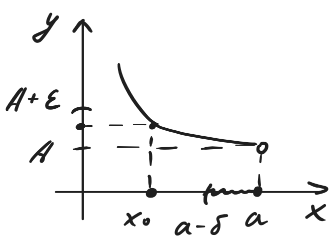
Возьмем $\delta>0: x_0 \notin \mathring{U}_\delta(a-0)$. Тогда, т.к. $f\nearrow$, то

$\forall x\in \mathring{U}_\delta(a-0)\ \ f(x)\in U_\varepsilon(A-0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \sup(D_1)$ ■

Важно: Такой x_0 сущ-ет, т.к. для A (sup) верно, что

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists x: f(x)\in(A-\varepsilon; A)$.

2. f – убыв. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \inf(D_1)$



Обозначим $\inf D_1 = A$. $\forall\varepsilon>0\ \exists x: f(x)\in(A; A+\varepsilon)$, т.к.

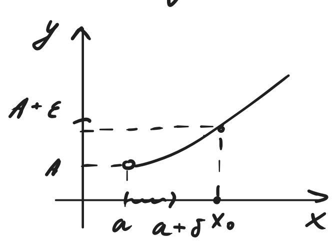
A – inf. Рассм-м $x_0: f(x_0)\in U_\varepsilon(A+0)$.

Возьмем $\delta>0: x_0\notin\mathring{U}_\delta(a-0)$. Т.к. $f\searrow$, то

$\forall x\in\mathring{U}_\delta(a-0)\ \ f(x)\in U_\varepsilon(A+0) \Rightarrow \lim f(x) = \inf D_1$ ■

II Ф-я определена на $D_2 = D\cap(a; +\infty)$; a – пред. т. D_2.

1. f – возраст. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf D_2$



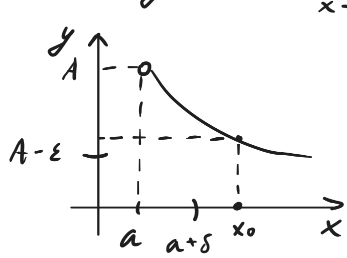
Обозначим $\inf D_2 = A$. $\forall\varepsilon>0\ \exists x: f(x)\in(A; A+\varepsilon)$, т.к.

A – inf. Рассм-м $x_0: f(x_0)\in U_\varepsilon(A+0)$.

Возьмем $\delta>0: x_0\notin\mathring{U}_\delta(a+0)$. Т.к. $f\nearrow$, то

$\forall x\in\mathring{U}_\delta(a+0)\ \ f(x)\in U_\varepsilon(A+0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf D_2$ ■

2. f – убыв. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \sup D_2$.



Обозначим $\sup D_2 = A$. $\forall\varepsilon>0\ \exists x: f(x)\in(A-\varepsilon; A)$, т.к.

A – sup. Рассм-м $x_0: f(x_0)\in U_\varepsilon(A-0)$.

Возьмем $\delta>0: x_0\notin\mathring{U}_\delta(a+0)$. Т.к. $f\searrow$, то.

$\forall x\in\mathring{U}_\delta(a)\ \ f(x)\in U_\varepsilon(A-0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \sup D_2$ ■

Замеч.: Монотонные последовательности имеют предел.