Если ф-я непрерывна на отр. $[a;b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0$, то $\exists c\in[a;b]: f(c)=0$.

Д-во: НУО $f(a)<0$; $f(b)>0$.

Построим систему стяг. отр.:

Разделим $[a;b]$ пополам. Если $f(\frac{a+b}{2})=0$, то т° док., иначе берем тот отр. $[a_1;b_1]$, для к вып. $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$. Для этого отр. выполн. аналогичн. д.я и выбираем следующий и т.д.

Получаем сист. $([a_n;b_n])_{n=1}^{\infty}$ стяг. отрезков.

Тогда $\exists c\in[a;b]: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Т.к. ф-я непрерывна, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$.

$a_n>0$; $b_n<0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq 0$

Тогда $f(c)=0$ ∎