Двудольный граф. Паросочетание. Алгоритм построения наибольшего паросочетания.

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 30.04.2024

Содержание лекции

- Двудольный граф. Паросочетание. Цепи.
- Теорема о максимальном паросочетании и дополняющих цепях.
- Контролирующее множество.
- Теорема Кёнига о наибольшем паросочетании.
- Алгоритм Куна построения наибольшего паросочетания и его обоснование. Следствия.

Двудольный граф

Определение: Граф G называется **двудольным**, если $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$, $\forall\ e = uv \in E(G), u \in V_1, v \in V_2$.
V_1 – множество начал, V_2 – множеством концов двудольного графа.

Определение: **Полный двудольный** граф – двудольный граф, в котором $\forall\ u \in V_1, v \in V_2 :\ uv \in E(G)$.

Определение: **Паросочетание** – множество $M \subseteq E(G)$ такое, что $\forall\ e_1 \neq e_2 \in M :\ e_1 \cap e_2 = \emptyset$.
Будем называть $I \subseteq V_1$ множеством начал, $J \subseteq V_2$ множеством концов ребер паросочетания M на двудольном графе. Тогда M можно задать биекцией $\psi :\ I \to J$ такой, что $\psi(i) = j \Leftrightarrow ij \in M$.

Определение: **Максимальным** паросочетанием называется максимальное по включению паросочетание.
Наибольшим паросочетанием называется наибольшее по мощности максимальное паросочетание.

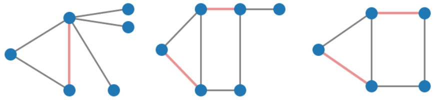


Рис.: *Максимальные паросочетания*

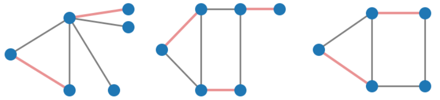


Рис.: *Наибольшие паросочетания*

Определение: **Чередующаяся цепь** – путь в двудольном графе, для любых двух соседних ребер которого верно, что одно из них принадлежит паросочетанию M, а другое нет.
Определение: **Дополняющая (увеличивающая) цепь** – чередующаяся цепь, у которой оба конца свободны.
Определение: **Уменьшающая цепь** – чередующаяся цепь, у которой оба конца покрыты.
Определение: **Сбалансированная цепь** – чередующаяся цепь, у которой один конец свободен, а другой покрыт.

Теорема (a.k.a лемма Бержа): Паросочетание M в двудольном графе G является наибольшим $\Leftrightarrow$ в G нет дополняющей цепи.

Док-во: $\Rightarrow)$ пусть в G с max паросочетанием M существует дополняющая цепь. Проходим по ней и заменяем вдоль неё все рёбра, входящие в паросочетание, на невходящие и наоборот $\Rightarrow$ большее паросочетание (?!)
$\Leftarrow) M$ – не наиб. паросочетание в G. Покажем, что есть увеличивающая цепь отн-но M. Пусть $M' : |M'| > |M|$. $H \leq G : \ \forall e \in H : e \in M$ или $e \in M'$. В H у вершин степени ≤ 2. Компоненты связности – пути или циклы. В них чередуются ребра из M и M'. Т.к. $|M'| > |M|$ существует компонента, где ребер из M' больше. Это – путь, у которого концевые ребра $\in M'$. Относительно M это дополняющая цепь.

Лемма о размере паросочетания

Определение: **Совершенным паросочетанием** называется паросочетание, в котором каждая вершина инцидента какому-то ребру паросочетания.

Задача: построить наибольшее паросочетание на произвольном двудольном графе G.

Определение: $C \subseteq V(G)$ называют **контролирующим множеством** (или вершинным покрытием), если $\forall\ e \in E(G):\ C \cap e \neq \emptyset$.

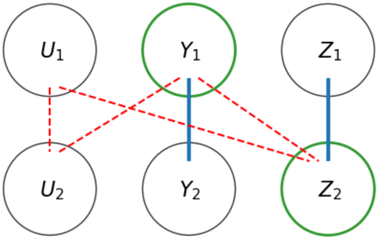
Лемма: Размер любого паросочетания не больше размера любого контролирующего множества.

Док-во: Пусть M – паросочетание и существует контролирующее множество C такое, что $|M| > |C| \Rightarrow \exists u \in C:\ \exists e_1 \neq e_2 \in M:\ e_1 \cap e_2 = u \Rightarrow e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \Rightarrow$ противоречие с определением паросочетания $\Rightarrow |M| \leq |C|$.

Теорема Кёнига

Теорема (Кёниг, 1931): Размер наибольшего паросочетания равен размеру наименьшего контролирующего множества.

Док-во: M – наибольшее паросочетание в G; U_1 – множество всех непокрытых этим паросочетанием вершин из $V_1(G)$, U_2 – множество непокрытых M вершин из $V_2(G)$. Разобьём все покрытые паросочетанием M вершины $V_1(G)$ на два множества: Y_1 – те вершины, до которых можно дойти от U_1 по M-чередующимся путям, а Z_1 – вершины, до которых дойти таким образом нельзя. Разобьем все покрытые паросочетанием M вершины $V_2(G)$ на два множества: Y_2 – те вершины, до которых можно дойти от U_1 по M-чередующимся путям, а Z_2 – вершины, до которых дойти таким образом нельзя.



M-пути приходят в вершины из Y_1 по ребрам из M $\Rightarrow$ предыдущая вершина пути лежит в Y_2. Ребра из M не соединяют Y_2 с Z_1 $\Rightarrow$ M соединяет друг с другом вершины множеств Y_1 и Y_2, а также Z_1 и Z_2, откуда $|Z_1| = |Z_2|, |Y_1| = |Y_2|$.

Докажем, что $B = Z_1 \cup Y_2$ – контролирующее множество. Ребра не из M не могут соединять вершины из $U_1 \cup Y_1$ с вершинами из Z_2 (иначе был бы M-чередующийся путь от U_1 до Z_2). Также не существует ребер из U_2 до $U_1 \cup Y_1$. Если бы такое ребро существовало, то существовала бы M-дополняющая цепь, что по лемме Бержа невозможно. Заметим, что $|M| = |B|$. Т.к. в любом контролирующем множестве не меньше вершин, чем в любом паросочетании, то ч.т.д. $\square$

Обозначение: $v \in V(G)$, $N(v)$ – окрестность вершины v – множество всех вершин графа G, смежных с v.
Обозначение: $U \subset V(G)$, $N'(U)$ – множество всех вершин графа G, смежных с U. Окрестность множества U обозначим $N(U) := N'(U) \setminus U$.
Теорема (Холл, 1935): В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины V_1 $\Leftrightarrow$ для любого множества $U \subset V_1$ выполняется $|U| \leq |N(U)|$.

Схема док-ва: $\Rightarrow$) очевидно, а $\Leftarrow$) делается индукцией по количеству вершин в графе. В переходе надо разобрать два случая:
$\exists A \subsetneq V_1 : |A| = |N(A)|$ и $\forall A \subsetneq V_1 : |A| < |N(A)|$
Следствие (Кёниг): В регулярном (степени всех его вершин одинаковы) двудольном графе существует совершенное паросочетание.
Замечание: Теоремы Холла и Кёнига выводятся друг из друга и могут быть доказаны одним и тем же методом. И вообще следуют из теоремы Форда-Фалкерсона.

Алгоритм Куна

Алгоритм Куна нахождения наибольшего паросочетания в двудольном графе – это по сути применение леммы Бержа.

Дан двудольный граф $G = (V_1, V_2, E), |V_1| = n, |V_2| = m$.

1. Берем пустое паросочетание;
2. Проходим по вершинам одной из долей и ищем увеличивающую цепь. Если удалось найти, то выполняем ''чередование'' паросочетания вдоль этой цепи: ребра из цепи и не из паросочетания добавляем в текущий ответ, ребра из цепи и из паросочетания удаляем из текущего ответа;
3. Повторяем шаг 2 пока не просмотрим все вершины одной из долей.

Как искать увеличивающую цепь? Обход в глубину (можно и в ширину):

Алгоритм Куна: пример