Основы комбинаторики. Формула включений и исключений

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 31.10.2023

Содержание лекции

- Формула включений и исключений
- Подсчет количества разбиений
- Числа Белла и Стирлинга 2-го рода

Формула включений и исключений

Мощность объединения двух множеств: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Для трёх множеств рассуждаем аналогично: $|A| + |B| + |C|$ учитывает дважды элементы, лежащие в попарных пересечениях. Но если вычесть мощности попарных пересечений $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$, то получится, что пересечение всех трех множеств мы учли три раза и вычли три раза $\Rightarrow$ нужно добавить его мощность к ответу:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Обобщим: мощность объединения n множеств $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$ – это сумма, в которую с $+$ входят все мощности пересечения нечетного кол-ва множеств и с $-$ мощности пересечения четного количества множеств:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1\leq j\leq n} (-1)^{j+1} \sum_{1\leq i_1\leq \ldots \leq i_j\leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}|$$

Докажем по индукции:
База уже проверена.
Переход: пусть для $n = m$ формула доказана. Докажем для $n = m + 1$.

Объединение ассоциативно:
$A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup A_{m+1} = (A_1 \cup \ldots \cup A_m) \cup A_{m+1}$. Из формулы для $n = 2$:
$|(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \cup A_{m+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_m| + |A_{m+1}| - |(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \cap A_{m+1}|$

Пересечение дистрибутивно:

$$|(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \cup A_{m+1}| =$$
$$= |A_1 \cup \ldots \cup A_m| + |A_{m+1}| - |(A_1 \cap A_{m+1}) \cup \ldots \cup (A_m \cap A_{m+1})|$$

Пользуемся формулой для $n = m$:

$$|(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \cup A_{m+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_m| +$$
$$+|A_{m+1}| - \sum_{1 \le j \le m} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_j \le m} |(A_{i_1} \cap A_{m+1}) \cap \ldots \cap (A_{i_j} \cap A_{m+1})|$$

Достаточно один раз $\cap$ с A_{m+1}: $|(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \cup A_{m+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_m| +$

$$+|A_{m+1}| + \sum_{1 \le j \le m} (-1)^{j+2} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_j \le m} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j} \cap A_{m+1}|$$

Всё без A_{m+1} входит в первое слагаемое с $(-1)^{j+1}$, где j – кол-во множеств в пересечении. $|A_{m+1}|$ с нужным знаком. Все пересечения с ≥ 1 множеством и с A_{m+1} входят с $(-1)^{j+2}$, где j – кол-во множеств в пересечении, не считая A_{m+1}. Т.е. с $(-1)^{j'+1}$, где j' – кол-во мн-в в пересечении.

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup A_{m+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_m| + |A_{m+1}|$$
$$+ \sum_{1 \le j \le m} (-1)^{j+2} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_j \le m} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j} \cap A_{m+1}| =$$
$$= \sum (-1)^{j+1} \sum |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}| \blacksquare$$

Подсчёт количества разбиений

Задача: Пусть есть произвольное конечное множество A, $|A| = n$, нужно подсчитать количество его разбиений мощности k (т.е. таких наборов множеств $(X_1, \ldots, X_k)$: $\forall i \in 1 : k\ X_i \neq \varnothing, \forall j \in 1 : k, i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing$)

$k = 2$?

Нужно выбрать элементы, которые пойдут в первое множество разбиения, а все остальные, естественно, пойдут во второе. Таким образом, количество разбиений мощности 2 равно количеству способов выбрать непустое собственное (то есть, не совпадающее со всем множеством) подмножество A пополам (т.к. мы не упорядочиваем элементы разбиения, а значит, случаи $\{X_1, X_2\}$ и $\{X_2, X_1\}$ не различаем)

Итого $\frac{|2^A|-2}{2} = \frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1} - 1$

Общий случай:

$B(n)$ – число разбиений множества мощности n, $S(n, k)$ – число разбиений мощности k множества мощности n. Тогда $B(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} S(n, k)$

Определение: $B(n)$ называют **n-ым числом Белла**;

$S(n, k)$ – **число Стирлинга второго рода из n по k.**

Числа Стирлинга

Примечание: поскольку числа Стирлинга второго рода встречаются намного чаще, чем числа Стирлинга первого рода, будем называть их просто числами Стирлинга. Обозначение: $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Уже было: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, C_n^0 = 1$

Сконструируем похожую формулу для чисел Стирлинга.

Утверждение: $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$

Док-во: $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

Для каждого разбиения этого множества верно одно из двух:

- либо $\{a_n\}$ – отдельный элемент разбиения. Таких разбиений столько же, сколько разбиений мощности $k-1$ множества мощности $n-1$, т.е. $S(n-1, k-1)$
- либо $\exists i \in 1 : k\ a_n \in X_i, |X_i| > 1$. Тогда сначала находим разбиение мощности k множества $A \setminus \{a_n\}$ мощности $n-1$ (это $S(n-1, k)$ способов), а потом добавляем a_n в один из элементов разбиения (k способов), т.е. $k \cdot S(n-1, k)$

Множества из случаев не пересекаются $\Rightarrow$ мощность их объединения равна сумме их мощностей, то есть $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$ ■

Свойства чисел Стирлинга

$S(n,0)=0$, $S(0,0)=0$, $S(k,n)=0$ при $k>n$
$S(n,2)=2^{n-1}-1$, $S(n,n-1)=C_n^2$ (любое разбиение состоит из одного подмножества мощности 2 и $(n-2)$-х подмножеств мощности $1 \Rightarrow$ кол-во разбиений равно количеству способов выбрать 2 неупорядоченных элемента из A).

Рекуррентная формула для чисел Белла: $B(n+1)=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot B(k)$

Док-во:
$A=\{a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}\}$, $A=X_1\cup\ldots\cup X_k$ – произвольное разбиение.
$\exists i\in 1:k\ a_{n+1}\in X_i$; $1\leq |X_i|=j\leq (n+1)$; $|A\setminus X_i|=n+1-j$
Количество способов набрать X_i равно $C_n^{j-1}=C_n^{n-(j-1)}=C_n^{n+1-j}$,
количество разбиений $A\setminus X_i$ равно $B(n+1-j)$.

То есть $B(n+1)=\sum\limits_{j=1}^{n+1} C_n^{n+1-j}\cdot B(n+1-j)$

Для получения исходной формулы $k:=n+1-j$ ■

Явная формула для чисел Стирлинга

Утверждение: $\forall n \geq 0, k \geq 1 \; S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \cdot C_k^j \cdot (k-j)^n$

Док-во: $S(0,k) = 0$, для $n = 0$ формула имеет вид

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j (k-j)^0 = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j 1^{k-j} =$$

$= \frac{1}{k!}(1+(-1))^k = 0$ (бином Ньютона)

$L := \left\{R \subseteq A \times 1:k \mid R - \text{сюръекция}\right\}$ – множество сюръективных отображений из A в $1:k$. Это множество равномощно множеству упорядоченных (X_i и X_j нельзя менять местами) разбиений мощности k множества A (если $R(a) = i$, то в разбиении $a \in X_i$ и наоборот).

Чтобы получить искомые неупорядоченные разбиения достаточно поделить на $k!$, т.е. $S(n,k) = \frac{1}{k!}|L|$.

Найдём мощность $|L|$. Найдём мощность мн-ва всех отображений из A в $1:k$, потом вычтем мощность мн-ва несюръективных.
M – мн-во всех отображений из A в $1:k$; $|M| = k^n$.

$\forall i \in 1:k\ P_i := \{R \subseteq A \times 1\ldots k \mid R$ – отображение, $\nexists a \in A\ R(a) = i\}$

Тогда $|L| = |M| - |P_1 \cup \ldots \cup P_k| = k^n - |P_1 \cup \ldots \cup P_k|$

Найдём $|P_1 \cup \ldots \cup P_k|$ по формуле включений и исключений:

$|P_1 \cup \ldots \cup P_k| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_j \le k} |P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_j}|$

$|P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_j}| = (k-j)^n$ – кол-во отображений из A в $1:k \setminus \{i_1, \ldots, i_j\}$ не зависит от выбора конкретных $\{i_1, \ldots, i_j\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_j \le k} |P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_j}| = C_k^j \cdot (k-j)^n$ т.к. выбрать множество $\{i_1, \ldots, i_j\}$ из $1:k$ можно C_k^j способами. Тогда получаем:

$$|P_1 \cup \ldots \cup P_k| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_j \le k} |P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_j}| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} C_k^j (k-j)^n$$

$$|L| = k^n - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} C_k^j (k-j)^n = k^n + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j} C_k^j (k-j)^n =$$

$$= (-1)^0 C_k^0 (k-0)^n + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j} C_k^j (k-j)^n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} C_k^j (k-j)^n$$

$\blacksquare$