# Марковские цепи. Случайные блуждания

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 19.03.2024

# Необходимые определения

Определение: Обозначим $|M| = m$. Стохастическая матрица $P_n = P_n[m, m]$ такая, что $P_{i,j} = Pr\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\}$, называется **матрицей переходных вероятностей** в момент времени $n$.

Определение: Марковская цепь называется **однородной**, если матрица переходных вероятностей не зависит от номера шага: $P_{n_{ij}} = P_{ij}$.

Определение: Набор вероятностей $Pr\{\xi_0 = i\}, i \in M$, где $\sum\limits_{i \in M} Pr\{\xi_0 = i\} = 1$, называется **начальным распределением** марковской цепи.

Замечание: Далее работаем с однородными марковскими цепями.

# Свойства марковских цепей

Рассмотрим $P\{\xi_0 = i, \xi_n = j\} = \sum_{i_1,...,i_{n-1}} P\{\xi_0 = i, \xi_1 = i_1, ..., \xi_n = j\} = \sum_{i_1,...,i_{n-1}} \lambda_i P_{i,i_1} ... P_{i_{n-1},j} P_{ij} = \lambda_i (P^n)_{ij}$

$$P\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i\} = \frac{P\{\xi_0 = i, \xi_n = j\}}{P\{\xi_0 = i\}} = \frac{\lambda_i (P^n)_{ij}}{\lambda_i} = (P^n)_{ij}$$

Значит, элемент $(P^n)_{ij}$ матрицы $P^n$ дает вероятность перехода за $n$ шагов из состояния $i$ в состояние $j$.
$P\{\xi_{m+n} = j \mid \xi_m = i\} = (P^n)_{ij}$

# Классификация состояний марковских цепей

# Достижимые и сообщающиеся

Определение: состояние $j$ **достижимо** из состояния $i$, если $\exists n \in \mathbb{Z}_+ : (P^n)_{ij} > 0$
Достижимость $j$ из $i$ обозначается $i \to j$.

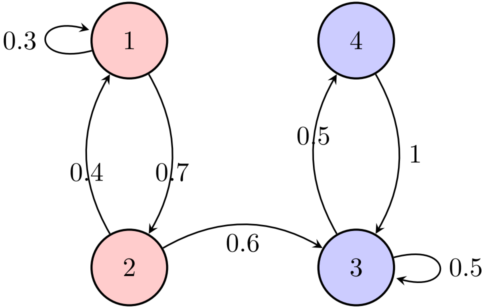
Отношение достижимости рефлексивно: $P^0_{ii} = E_{ii} = 1 > 0$;
Отношение достижимости транзитивно: $i \to j, j \to k \Rightarrow \exists\, m, n \in N_0$:

$$P^m_{ij} > 0, P^n_{jk} > 0 \Rightarrow P^{n+m}_{ik} = \sum_{l \in S} P^m_{il} P^n_{lk} \geq P^m_{ij} P^n_{jk} > 0.$$

Определение: состояния $i$ и $j$, достижимые из друг друга, называют **сообщающимися** или **взаимно достижимыми**. Обозначение: $i \leftrightarrow j$.
Определение: Отношение взаимной достижимости является отношение эквивалентности (т.к. ещё симметрично), поэтому состояния, сообщающиеся друг с другом, объединяются в классы эквивалентности. Такие классы эквивалентности называют **неразложимыми** классами.

Определение: Макровская цепь **неприводима**, если введёная эквивалентность порождает только один класс эквивалентности.
Определение: Если в марковской цепи есть только один неразложимый класс, то такая цепь называется **неразложимой** или **неприводимой**.

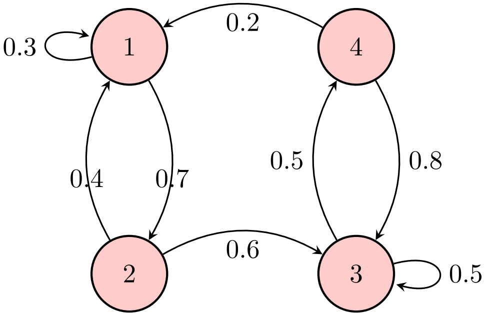
# Пример разложимой марковской цепи




| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.3 | 0.7 | 0 | 0 |
| 2 | 0.4 | 0 | 0.6 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Пример разложимой цепи: два классы эквивалентности – $(1, 2), (3, 4)$; из состояний $3$ и $4$ нельзя попасть в состояния $1$ и $2$.

# Пример неразложимой марковской цепи



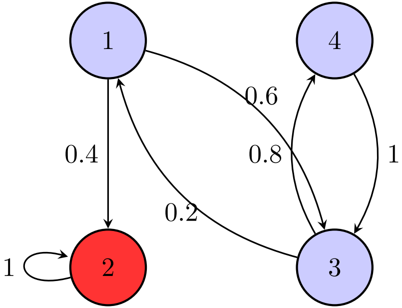

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.3 | 0.7 | 0 | 0 |
| 2 | 0.4 | 0 | 0.6 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 |
| 4 | 0.2 | 0 | 0.8 | 0 |

Пример неразложимой цепи: из каждого состояния можно добраться до любого другого.

Замечание: существует частичный порядок компонент сильной связности, задаваемый отношением достижимости. Максимальные элементы в таком частичном порядке называются **эргодическими классами**.

# Поглощающие состояния

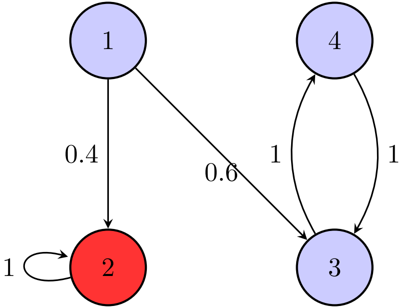
Определение: Если некоторый эргодический класс состоит из одной вершины $i$, то это состояние называют **поглощающим** (означает, что $P_{ii} = 1$).
Определение: Если в марковской цепи существует поглощающее состояние, и из любого состояния достижимо какое-то поглощающее состояние, то такая цепь называется **поглощающей**.




| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.4 | 0.6 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0.2 | 0 | 0 | 0.8 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Неразложимые классы – $(1, 3, 4), (2)$; эргодический классы – $(2)$ (это минимальный элемент в графе взаимной достижимости). Состояние $2$ является поглощающим. Марковская цепь поглощающая.

# Пример не поглощающей марковской цепи




| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.4 | 0.6 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Пример поглощающего состояния: в этой марковской цепи неразложимые классы – $(1), (2), (3,4)$; эргодические классы – $(2), (3,4)$ (это два минимальных элемента в графе взаимной достижимости). Состояние $2$ является поглощающим. Марковская цепь не поглощающая (в состояние $2$ не добраться из состояний $3$ и $4$).

# Возвратные и невозвратные состояния

Определение: Состояния в эргодическом классе называются **возвратными** (эргодическими, существенными, повторяющимися). То есть, состояние $i$ возвратное, если для любого состояния $j$, достижимого из $i$, верно, что $i$ достижимо из $j$; Или, состояние $i$ возвратное, если вероятность вернуться в исходное состояние после некоторого конечного числа шагов $Pr\{\xi_n = i \text{ для } \inf \text{ числа } n\} = 1$.

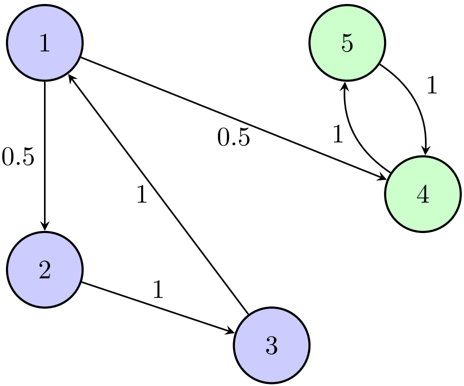
Или: $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n = +\infty$, где $f_{ii}^n = Pr\{\xi_n = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu \in \overline{1:n-1} \mid \xi_0 = i\}$ (с точки зрения путей в графе: для любого $j$ такого, что $i \to j$, верно $j \to i$).

Определение: Остальные не эргодические классы называются **невозвратными**, а состояния в них – **невозвратные** (несущественные, переходные, англ. transient state). Другими словами, $i$ невозвратное, если существует достижимое из $i$ состояние $j$: состояние $i$ недостижимо из $j$; $Pr\{\xi_n = i \text{ для } \inf \text{ числа } n\} = 0$.

Или $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n < +\infty$ (с точки зрения путей в графе: существует $j$ такой, что $i \to j$, но $j \nrightarrow i$).

Зачем нужно? Изучить предельное поведение марковской цепи!

# Пример: возвратные и невозвратные состояния




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.5 | 0 | 0.5 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Пример возвратного и невозвратного состояний. Неразложимые классы – $(1, 2, 3), (4, 5)$; эргодический класс – $(4, 5)$. По определению возвратными здесь будут состояния $4$ и $5$. И действительно: с вероятностью $1$ вернемся, например, из $4$ в $4$ через два шага). Состояния $1$, $2$ и $3$ – невозвратны (из них можно добраться до $4$ и уже не вернуться обратно).

# Периодические состояния

Для состояния $i \in S$ рассмотрим множество $p_i = \{n \in \mathbb{N} : P_{ii}^n > 0\}$
Определение: **периодом** $d(i)$ состояния $i$ называется НОД всех элементов $p_i$.

Определение: Если $d(i) > 1$, то состояние $i$ называют **периодическим** (англ. periodic). Если $d(i) = 1$, то состояние $i$ называют **непериодическим** (англ. aperiodic).

Лемма: периоды сообщающихся состояний равны.

**Док-во**: Пусть $i, j \in S, i \leftrightarrow j \exists m, n \in \mathbb{N}: \ P_{ij}^m > 0, P_{ji}^n > 0.$
$\forall d$ – делитель $p_i, \forall k \in p_j \ P_{jj}^k > 0$

$$P_{ii}^{m+k+n} \geq P_{ij}^m P_{jj}^k P_{ji}^n > 0 \Rightarrow (m+k+n) \in p_i \Rightarrow (m+k+n) \vdots d$$

При этом, $P_{ii}^{m+n} \geq P_{ij}^m P_{ji}^n > 0 \Rightarrow (m+n) \in p_i \Rightarrow (m+n) \vdots d$

Значит $k \vdots d \Rightarrow$ любой элемент $p_j$ делится на любой делитель $p_i \Rightarrow$
$\Rightarrow d(j) = \gcd(p_j) \geq \gcd(p_i) = d(i)$
Аналогично $d(i) \geq d(j) \Rightarrow d(i) = d(j)$.

# Стационарное распределение

Пусть $G$ и $g$ – две формы одного гена. Любой организм содержит два таких гена $GG$, $gg$ и $Gg$ (совпадает с $gG$). Каждый потомок получает по одному гену от каждого из родителей равновероятно. Матрица переходных состояний:

| | $gg$ | $Gg$ | $GG$ |
|---|---|---|---|
| $gg$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $Gg$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $GG$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Пусть исходный организм мог с равной вероятностью иметь любой набор генов. Тогда распределение исходного состояния $\mu = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
Заметим, что $\mu P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) =: a$, $\mu P^2 = a$ и $\mu P^k = a$.

Определение: Если существует $\lim\limits_{t\to+\infty} \mu P^t = \pi$, то $\pi$ называют **стационарным распределением** Марковской цепи.

Замечание: $\pi = \lim\limits_{t\to+\infty} \mu \cdot P^{t-1} \cdot P = \pi \cdot P$

$\pi$ – собственный вектор оператора умножения на $P$

# Эргодические марковские цепи

Определение: Если матрица переходных состояний марковской цепи такова, что $\exists n: \ \forall i, j \in M \ P_{ij}^n > 0$, то эта цепь называется **регулярной**.

Определение: Если все состояния в марковской цепи

- возвратны;
- непериодичны;
- сообщающиеся,

то цепь называется **эргодической**.

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 |

(a)

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 |

(b)

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 |

(c)

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 0.3 | 0.7 |
| 2 | 0.8 | 0.2 |

(d)

Теорема (без док-ва): если марковская цепь эргодическая, то у неё существует единственное стационарное распределение.

# Случайные блуждания

Определение: пусть $\{X_i\}_{i=1}^n$ – последовательность н.с.в. из $\mathbb{R}^d$ и одинаковыми распределениями. Тогда случайный процесс $Y_n = Y_0 + \sum_{i=1}^n X_i$ называется **случайным блужданием** из $\mathbb{R}^d$.

Одномерное дискретное случайное блуждание является цепью Маркова с $\xi_i \in \mathbb{Z},\ i \in \overline{0:n}$, чьё начальное распределение задаётся функцией вероятности $\xi_0$, а матрица имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{-1} & 0 & p_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_0 & 0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

- $P\{\xi_{n+1} = i+1 \mid \xi_n = i\} \equiv P_{ii+1} = p_i$
- $P\{\xi_{n+1} = i-1 \mid \xi_n = i\} \equiv P_{ii-1} = q_i = 1 - p_i$
- $P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\} \equiv P_{ij} = 0,\ |i-j| \neq 1$

# Пример: одномерное случайное блуждание

Рассмотрим одномерное случайное блуждание: $X_0 = 0$, с вероятностью $p$ идем вправо: $Pr\{\xi_i = 1\} = p$, с вероятностью $q = 1 - p$ идем налево: $Pr\{\xi_i = -1\} = q$.
Теорема: такое случайное блуждание возвратно $\Leftrightarrow p = q = \frac{1}{2}$.

**Док-во**: Состояние $0$ возвратно $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{00}^{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n} = +\infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{2n}^{n} p^n (1-p)^n$. Формула Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

Если $p \neq \frac{1}{2}$: $C_{2n}^{n} p^n (1-p)^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} p^n (1-p)^n = \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} < (4p(1-p))^n$ – сходится.
Если $p = \frac{1}{2}$: $C_{2n}^{n} p^n (1-p)^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \geqslant \frac{1}{2n}$ – расходится.

**Интуитивно**: если $p > q$, то есть ненулевая вероятность, что блуждание уже не вернется в $X_0$ и уйдет на $+\infty$.