Мн-во $A \subset \mathbb{R}$ называют ограниченным сверху (снизу), если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \leq C \quad (a \geq C)$.

C называют мажорантой (минорантой) или верхней (нижней) границей мн-ва A

Супремумом (инфимумом) называют наименьшую (наибольшую) верхнюю (нижнюю) грань мн-ва A.

$\sup\limits_{x \in A} x := s \mid \forall x \in A \ (s \geq x) \wedge (\forall s' < s \ \exists x' \in A : x' > s')$

$\inf\limits_{x \in A} x := s \mid \forall x \in A \ (s \leq x) \wedge (\forall s' > s \ \exists x' \in A : x' < s')$

$\sup\limits_{x \in A} x := \min\{c : \forall x \in A \ \ c \geq x\}$

$\inf\limits_{x \in A} x := \max\{c : \forall x \in A \ \ c \leq x\}$

Лемма. $\forall A \subset \mathbb{R} : A \neq \varnothing \wedge A$-огранич. $\sup\limits_{x \in A} x$ - единств.

Д-во: Пусть B - множество мажорант мн-ва A. Тогда $B \neq \varnothing$, т.к. A-ограничено. Известно, что $\forall a \in A, b \in B \ \ a \leq b$. Тогда по акс. полноты $\exists c \in \mathbb{R} : \ \forall a \in A, b \in B \ \ a \leq c \leq b$. Это значит, что c - мажоранта A ($\Rightarrow c \in B$) и миноранта B ($\Rightarrow c = \min B$) $\Rightarrow c = \sup\limits_{x \in A} x$. Докажем, что миним. эл-т единственный. Пусть имеется $s_1, s_2 \in B$ - два минимума. Тогда по определению минимума $s_1 \leq s_2$ и $s_2 \leq s_1 \Rightarrow s_1 = s_2$ ∎