Основы комбинаторики. Перестановки, подсчёт их количества

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 17.10.2023

Содержание лекции

- Комбинаторное доказательство
- Перестановки, подсчёт количества
- Факториальная система счисления

Комбинаторное доказательство

Способ нахождения мощности множества путем установления биекции с множеством известной мощности.

Пусть у нас есть пончики 5 видов: с ванилью (В), шоколадом (Ш), карамелью (К), сгущенкой (С) и сахарной пудрой (П).

Задача 1: Кол-во способов купить $\leq$ по одному пончику каждого вида?

Решение: Установим биекцию между множеством способов купить пончики и множеством двоичных кортежей длины 5.
Для $(0, 1, 0, 0, 1)$ скажем, что, если на i-й позиции в кортеже стоит 0, то мы купили пончик такого вида, а если 1 – то нет. Итого $2^5 = 32$.

Задача 2: Хотим купить 12 пончиков, неважно какого вида.

Решение: количество способов сделать это равно количеству двоичных кортежей длины 16, в которых ровно 4 единицы.
Нули в кортеже снова обозначают пончики, причем нули, идущие до i-й единицы отвечают за количество пончиков i-го вида.
$(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \leftrightarrow 2$ В, 0 Ш, 5 К, 3 С, 2 П. Итого C_{16}^4.

Мощность множества всех подмножеств

A – произвольное конечное множество, $|A| = m$.

$\phi : \ A \to 1 : m$. Если ϕ – биекция, то ϕ называется **нумерацией** эл-ов A.

$X = 1 : m, S \subseteq X$. Определим $\chi : 2^X \to \{0,1\}^m$ следующим образом:
$\forall S \subseteq X \ \chi(S) = (\chi(S)_1, \ldots, \chi(S)_m)$, где $\chi(S)_i = \left[\begin{array}{ll} 1 & , i \in S \\ 0 & , i \notin S \end{array} \right.$

χ по построению биекция (подмножество $\leftrightarrow$ кортеж).

Построим $\psi : \{0,1\}^m \to 0 : (2^m - 1)$ таким образом: $\psi(x) = \sum\limits_{m}^{i=1} x_i \cdot 2^{m-i}$,

где $x = (x_1, \ldots, x_m)$. ψ тоже биекция!

Таким образом, построена биекция между A и $1 : m$, между $2^{1:m}$ и $\{0,1\}^m$ и, наконец, между $\{0,1\}^m$ и $0 : (2^m - 1)$.
Тогда $|2^A| = |2^{1:m}| = |\{0,1\}^m| = |0 : (2^m - 1)| = 2^m$.

Перестановки. Подсчёт количества

Определение: Перестановкой множества $1 : n$ называется $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, где $\forall i \in 1 : n \ a_i \in 1 : n, \forall j \in (i+1) : n \ a_i \neq a_j$.
Обозначим $\langle 1 : n \rangle$ – множество всех перестановок.
$a \in \langle 1 : n \rangle$ – перестановка. Определим её **ключ** $T(a) \coloneqq (t_1^a, \ldots, t_n^a)$,
$t_i^a = \Big|\{j \in (i+1) : n \mid a_j < a_i\}\Big|$ – кол-во элементов перестановки, стоящих после i-го, которые при этом меньше i-го элемента перестановки.

Утверждение 1: $a, b \in \langle 1 : n \rangle, a \neq b \Rightarrow T(a) \neq T(b)$

Док-во: так как перестановки различны $\exists k \in 1 : n$ – наименьший индекс, в котором перестановки различаются $a_k \neq b_k, \forall i \in 1 \ldots (k-1) : \ a_i = b_i$.
Считаем $a_k < b_k$.
Так как $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\} = \{b_1, \ldots, b_{k-1}\}$, $\{a_k, \ldots, a_n\} = \{b_k, \ldots, b_n\}$.
Следовательно, $\forall x \in \{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$, $x < a_k \Rightarrow x \in \{b_{k+1}, \ldots, b_n\}$, $x < b_k$.
Тогда, по построению T: $t_k^a \leq t_k^b$. Но при этом $a_k \in \{b_{k+1}, \ldots, b_n\}$,
$a_k < b_k \Rightarrow t_k^a < t_k^b \Rightarrow T(a) \neq T(b)$. ■

Утверждение 2: $a, b \in \langle 1 : n \rangle, T(a) \neq T(b) \Rightarrow a \neq b$

Док-во: $\Pi^n \coloneqq \Big\{(\pi_1, \ldots, \pi_n) \ : \ \forall i \in 1 \ldots n \ 0 \leq \pi_i \leq (n-i)\Big\}$. Все ключи перестановок $T(a) \ \forall a \in \langle 1 : n \rangle$ попадают в это множество по построению.
Покажем, что по ключу можно ! образом восстановить перестановку.

Пример: $T = (3, 6, 3, 2, 4, 3, 1, 0, 0)$. Первый элемент перестановки должен лежать в множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и в этом множестве должно быть ровно три элемента меньше него. Получается, на первом месте в перестановке должно стоять число 4. Теперь нужно найти в множестве оставшихся чисел $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ число такое, что в этом множестве есть ровно шесть чисел меньше его. Таким числом будет 8. Повторяя данный процесс, получим перестановку $\langle 4, 8, 5, 3, 9, 7, 2, 1, 6\rangle$, причем, поскольку все элементы перестановки различны, перестановку можно было восстановить единственным способом.

Формализуем алгоритм: **дано** $T \in \Pi^n$.
Задача: восстановить перестановку $a \in \langle 1 : n\rangle$ такую, что $T(a) = T$.
Определим мн-во p^i элементов $1 : n$, которые ещё не получили своё место в перестановке; тогда $p^1 = 1 : n$.
За один шаг алгоритма добавляется один элемент $\Rightarrow |p^i| = n - i + 1$.
Пронумеруем эл-ты p^i по $\nearrow$: $\forall k, j \in 1 : (n - i + 1), k < j \Rightarrow p^i_k < p^i_j$

Тогда получается, что элемент множеств p^i такой, что в множестве p^i содержится ровно T_i элементов, меньших него, – это $p^i_{T_i+1}$.
Тогда $a_i = p^i_{T_i+1}$. Множество элементов перестановки, стоящих в перестановке после a_i, будет равно $p^{i+1} = p^i \setminus \{p^i_{T_i+1}\}$ и в нём будет ровно T_i элементов меньше a_i, то есть $T(a)_i = T_i$.

Факториальная система счисления

$$n_f = \phi_m \phi_{m-1} \dots \phi_1,\ n_{10} = \sum_{i=1}^{m} \phi_i \cdot i! \text{ и } \forall i \in 1:m\ 0 \le \phi_i \le i$$

Напоминание: $\Pi^n \coloneqq \Big\{(\pi_1, \dots, \pi_n)\ :\ \forall i \in 1:n\ 0 \le \pi_i \le (n-i)\Big\}$.

Утверждение: Любое натуральное число представимо в факториальной системе счисления единственным образом.

Док-во: Π^n биективно $\langle 1 : n \rangle$ (доказано ранее)

Можно построить биекцию из Π^n в множество чисел, запись которых в факториальной системе счисления имеет меньше, чем n знаков (при необходимости выкидываем или дописываем ведущие нули).

Утверждение: Все числа, запись которых в факториальной системе счисления имеет менее n знаков, меньше $n!$.

Док-во: По индукции. База: $n = 2$. Имеем $1 < 2!$.

Переход: Если max число m_n, в записи которого менее n знаков, меньше $n!$, то при переходе к $n+1$ получим $m_n + n! \cdot n < n! \cdot (n+1) = n! \cdot n + n!$

Утверждение: Все числа, меньшие $n!$, представимы в факториальной системе счисления с менее, чем n знаками.

Док-во: Есть $a < n!$. Обозначим $a_0 \coloneqq a, n_0 = n$.

Найдём max $k_0 :\ k_0 \cdot (n_0 - 1)! \le a_0$. $k_0 < n_0$ тк иначе $a_0 \ge k_0(n_0-1)! \ge n_0!$

При этом $a_1 = a_0 - k_0 \cdot (n_0 - 1)! < (n_0 - 1)!$. Тогда
$a_1 := a_0 - k_0 \cdot (n_0 - 1)!, n_1 = n_0 - 1 \ldots$
Алгоритм конечен, т.к. через $n - 1$ шаг $a_{n-1} < n_{n-1}! = (n - (n - 1))! = 1$
а т.к. $\forall i \in 0 : (n - 1)\ a_i \geq 0, a_{n-1} = 0 \Rightarrow k_0 \ldots k_{n-1}$ – корректное представление a в факториальной системе счисления.

Таким образом, мы построили биекцию между множеством $0 : (n! - 1)$ и множеством чисел, запись которых в факториальной системе счисления имеет не более n знаков. Тогда для любого натурального m получаем, что, поскольку существует некоторое натуральное n такое, что $n! > m$, m представимо в факториальной системе счисления.