Разбиения в прообразах функций

Разбиение часто возникает при формировании полных прообразов значений функций:
$f: \ M \to R$ и $\forall r \in R$ сопоставим $A_r = \hat{f}(r) = \{i \in M \mid f(i) = r\}$.
Набор $\mathcal{A}_f := \{A_r \mid A_r \neq \varnothing\}$ – разбиение M.

Задача:
Заданы множества M, R и S и отображения $f : M \to R$ и $g : R \to S$. Тогда отображение $gf : M \to S$, где $(gf)(i) = g(f(i))$ определяет разбиение $\mathcal{A}_{gf}$, которое крупнее, чем $\mathcal{A}_f$.

Принцип математической индукции. Прямое произведение множеств

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 12.09.2023

Принцип математической индукции

Утверждение: Пусть $\Sigma \subseteq \mathbb{N}, 1 \in \Sigma$ (база индукции).
Тогда $(1 : n \subseteq \Sigma \Rightarrow n+1 \in \Sigma) \Leftrightarrow \Sigma = \mathbb{N}$.

Доказательство:
"$\Rightarrow$:" Известно, что $1 : n \subseteq \Sigma \Rightarrow n+1 \in \Sigma$.
Предположим, что $\Sigma \neq \mathbb{N}$. Тогда найдем минимальное $k \in \mathbb{N}$, $k \notin \Sigma$. По определению Σ, $k \neq 1$. Если $1 : k-1 \subseteq \Sigma$, то по условию $k \in \Sigma$. Но по предположению $k \notin \Sigma \Rightarrow$ противоречие. Значит, предположение неверно, значит, $\Sigma = \mathbb{N}$.

"$\Leftarrow$:" Известно, что $\Sigma = \mathbb{N}$.
Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ n+1 \in \Sigma$. □

Замечание: В некоторых случаях удобнее переопределять индукцию так, чтобы базой была не единица, а другое значение. Например, если $0 \in \Sigma$, то тогда вместо $\mathbb{N}$ будет $\mathbb{N}_0$.

Мощность множества всех подмножеств

Утверждение: Для любого множества $A, |A| \in \mathbb{N}_0$ верно $|2^A| = 2^{|A|}$.

Доказательство: Пусть $\Sigma = \{n \in \mathbb{N}_0 : \forall A \ |A| = n, \ |2^A| = 2^{|A|}\}$. Так как $|\varnothing| = 0, 2^{\varnothing} = \{\varnothing\}, |2^{\varnothing}| = 1 = 2^0 = 2^{|\varnothing|}$, $0 \in \Sigma$.
Предположим, что $n \in \mathbb{N}_0 \ \forall A \ |A| \in 0 : n, \ |2^A| = 2^{|A|}$.
Тогда $\forall X \ \ |X| = n + 1, \ \ |X| \geq 1 \Rightarrow \forall x \in X \ |X \setminus \{x\}| = n$. Тогда 2^X представим как дизъюнктное объединение множества всех подмножеств X, не содержащих x и множества всех подмножеств X содержащих x.
Следовательно,

$$|2^X| = |2^{X \setminus \{x\}}| + |\{Y \cup \{x\} : Y \in 2^{X \setminus \{x\}}\}|$$

По предположению индукции $|X \setminus \{x\}| = n$, тогда $|2^{X \setminus \{x\}}| = 2^n$. А также $|\{Y \cup \{x\} : Y \in 2^{X \setminus \{x\}}\}| = 2^n$. Тогда $|2^X| = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = 2^{|X|}$. □

Прямое произведение

Определение: Пусть A, B – произвольные множества, $a \in A, b \in B$. Пару (a, b) называют **упорядоченной** парой (кортежем).

$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

Определение: Пусть $A_1, \dots, A_n$ – произвольные множества, $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$. $(a_1, \dots, a_n)$ – n-**арный упорядоченный кортеж**.

Пусть $B_1, \dots, B_m$ – произвольные множества, $b_1 \in B_1, \dots, b_m \in B_m$. $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_m) \Leftrightarrow m = n, \forall i \in 1 : n \; a_i = b_i$.

Определение: **Прямым (декартовым)** произведением множеств A и B называют $A \times B \coloneqq \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Множество можно перемножать с самим собой.
Пример: $B = 0 : 1$. $B^m = (0 : 1)^m$ состоит из 2^m элементов.

Компоненты наборов и продолжения

Рассмотрим кортеж $(1, 1, 0, 1, 0)$. Как отличать отдельные компоненты?

Логичный ответ – числовые индексы: $(1_0, 1_1, 0_2, 1_3, 0_4)$.
Произвольное индексирующее множество: $(1_r, 1_b, 0_u, 1_j, 0_c)$ – элементы в записи можно переставлять, не требуем упорядоченности!

I – конечное множество индексов, $\forall i \in I \leftrightarrow$ непустое множество M_i.
Определение: I-**набор** – совокупность $\{a_i \mid i \in I, a_i \in M_i\}$, каждому индексу $i \in I$ соответствует элемент из M_i. Множество $M(I)$ всевозможных I-наборов и называется **прямым произведением** множеств M_i.

Определение: **Продолжение** I-набора $a(I)$ на больший набор индексов J называется множество $a(I) \times M(J \setminus I)$, то есть совокупность таких J-наборов, которые совпадают с $a(I)$ на индексах из I.
Продолжение множества I-наборов $A(I)$ на J – объединение продолжений всех I-наборов $a(I) \in A(I)$.

Проекции множеств

Определение: Множества вида $A(I) \times M(J \setminus I)$ называют **цилиндрическими** ($A(I)$ – "сечение", $M(J \setminus I)$ – "образующая")

I, J – произвольные множества индексов, $I \subset J$.
Рассмотрим множества $M(I)$, $M(J)$ и $A_J \subset M(J)$.
Определение: **Проекция** $\mathrm{proj}_I A_J$ множества A_J на $M(I)$ – все I-наборы, которые можно получить из элементов A_J выделением компонент, соответствующих I.

Теорема: $\mathrm{proj}_I A_J$ – это минимальное множество $B_I \subset M(I)$, в продолжении которого на M_J содержится всё множество A_J.

Док-во: Покажем, что если в продолжении B_I содержится всё множество A_J, то $\mathrm{proj}_I A_J \subset B_I$.
Пусть $\exists a \in \mathrm{proj}_I A_J : a \notin B_I$. Но тогда её продолжение на J не содержится в продолжении $B(I)$ (?!).

Кроме того, $\forall b \in B_I : b \notin \mathrm{proj}_I A_J$ можно удалить из B_I и свойства не поменяются! $\square$