4983

О. Н. ЦУБЕРБИЛЛЕР

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 19[illegible]

О. Н. ЦУБЕРБИЛЛЕР

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАНИЕ ВОСЕМНАДЦАТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Главным управлением высшего образования Министерства культуры СССР в качестве учебного пособия для вузов*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954

11-5-2



*О. Н. Цубербиллер.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии.
Редакторы: *Л. А. Чудов* и *В. Б. Орлов.*
Техн. редактор *Р. А. Негримовская.* Корректор *Ц. С. Варшавская.*

Печать с матриц. Подписано к печати 30/I 1954 г. Бумага $84 \times 108/_{32}$. Физ. печ. л. 22,25.
Условн. печ. л. 18,245. Уч.-изд. л. 23,45. Тираж 75 000 экз. Т-00312. Цена 8 р. 05 к.
Заказ № 989.

Государственное издательство
технико-теоретической литературы
Москва, Б. Калужская, д. 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома Главиздата Министерства культуры СССР. Москва, Валовая, 28.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий сборник рассчитан на студентов втузов и педвузов. В нём, по возможности, использованы задачи из области физики, механики и других прикладных наук. Обращено внимание на графики, на механическое образование кривых и поверхностей, дано понятие о простейших механизмах, в связи с задачами на геометрические места.

При составлении сборника имелись также в виду заочники и лица, изучающие математику самостоятельно, вследствие чего в начале каждой главы даны не только формулы, но и все теоретические пояснения, необходимые для правильного и сознательного их применения. Типовые задачи решены в тексте, ответы к большинству задач снабжены указаниями, а иногда и подробными решениями. Каждая глава начинается с лёгких примеров, и подобраны задачи так, чтобы трудность их возрастала постепенно.

Отдельными указаниями, примечаниями и вопросами мы старались всё время напоминать учащимся, что, пользуясь аналитическим методом, они всё же имеют дело с геометрией, что каждому шагу в аналитических выкладках соответствует геометрическое содержание и каждый полученный результат имеет простое конкретное толкование.

Материал расположен так, что студенты ещё до изучения общей теории кривых (или поверхностей) второго порядка получают основательные сведения об их геометрических свойствах. В общей теории главное внимание обращено на исследование кривых (или поверхностей), т. е. на проработку двух вопросов: как по уравнению кривой (поверхности) судить о присущих ей свойствах и как судить об особенностях в её расположении относительно выбранной системы координат.

Начиная со второго издания, сборник пополнялся новыми задачами в тех разделах, которые при работе во втузах оказались несколько бедны материалом, а в дальнейшем,— в связи с возрастающими требованиями к молодым специалистам,— сборник перерабатывался и пополнялся более трудными задачами.

Для XI и всех последующих изданий была написана новая четвёртая часть, относящаяся к векторной алгебре и её применению в геометрии. Введение векторов не затронуло материала первых трёх частей, что соответствует интересам студентов тех втузов, в которых векторная алгебра не изучается или изучается отдельно, после прохождения аналитической геометрии. Для студентов, изучающих векторную алгебру в курсе аналитической геометрии, знакомство с векторами естественно приурочить к тому моменту, когда приступают к изучению геометрии в пространстве. Однако глава XV содержит материал, не требующий никаких предварительных знаний, а потому, в интересах смежных дисциплин, его можно проработать значительно раньше.

§ 1 гл. XVI основывается на гл. VII и должен непосредственно следовать за нею. К § 2 гл. XVI следует перейти, когда материал гл. VIII закреплён достаточным количеством упражнений. § 3 гл. XVI можно прорабатывать параллельно гл. IX, а §§ 4 и 5 — параллельно гл. X.

Задачи гл. XVI не вводят существенно нового геометрического материала, но дают возможность к задачам одинакового содержания применить различные методы.

Очень рекомендуется учащимся сопоставлять формулы и уравнения, данные в координатах и векторных обозначениях, сравнивать ход решений и полученные результаты и переходить от векторных обозначений к координатным, и обратно, чтобы оценить преимущества каждого метода при решении того или иного вопроса.

Перед выходом XV издания было тщательно проверено, не содержит ли сборник таких научных положений, которые могли бы быть неправильно поняты студентами младших курсов, как недостаточно связанные с конкретными представлениями.

В своё время сборник составлялся на основе классического учебника профессора Б. К. Млодзеевского, курса профессора А. К. Власова и других представителей школы геометров Московского университета, которые строили курс аналитической геометрии, пользуясь началами проективной геометрии, а потому вводили довольно рано понятие о несобственных элементах, очень тщательно разъясняя смысл и значение этого понятия.

Но за последние годы, параллельно блестящему развитию советской науки, изменился и характер читаемых курсов. С одной стороны, курс аналитической геометрии для студентов-математиков базируется теперь на аффинно-метрической геометрии и только в конце курса даются основы проективной геометрии. С другой стороны, во втузах в общий, чрезвычайно насыщенный, курс математики оказалось невозможным включить начала проективной геометрии, а потому в современных учебниках, специально составленных для втузов, несобственные элементы совершенно исключены.

В связи с этим в XV издании настоящего сборника были изменены теоретические пояснения и изменена редакция всех задач, в которых раньше упоминались несобственные (бесконечно-удалённые) элементы.

После этих изменений оказалось нецелесообразным сохранять прежнюю классификацию кривых и поверхностей второго порядка, основанную на особенностях их пересечения с прямой линией. Поэтому для XVI издания настоящего сборника переработан и перегруппирован материал, относящийся к общей теории кривых второго порядка (гл. VI) и к общей теории поверхностей второго порядка (гл. XIV). Первым вопросом при исследовании кривых второго порядка ставится вопрос о существовании центра; непосредственно к нему примыкает рассмотрение и исследование кривых, распавшихся на пару прямых. Окончательная классификация нераспавшихся кривых связывается с приведением их уравнений к простейшему виду.

Аналогичный план проведён и в общей теории поверхностей второго порядка. Такое распределение материала больше соответствует современной постановке преподавания во втузах.

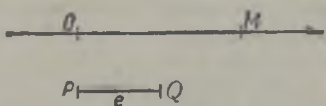
# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ

## ГЛАВА I

## ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧКИ НА ПРЯМОЙ. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Одна из главных особенностей метода аналитической геометрии заключается в употреблении чисел для определения положения геометрических образов. Числа, определяющие положение геометрических образов, называются их координатами.

Ограничимся пока рассмотрением точек, расположенных на одной прямой линии. Чтобы иметь возможность определять положение точек на этой прямой, установим на ней систему координат следующим образом:




Черт. 1.

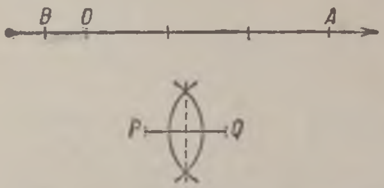
1) выберем начало координат, т. е. точку $O$ (черт. 1), по отношению к которой определяется положение остальных точек;

2) выберем единицу длины ($e = PQ$) для измерения расстояния рассматриваемой точки от начала координат;

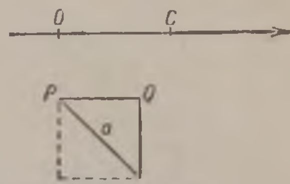
3) выберем положительное направление на прямой (на чертеже оно указано стрелкой), что позволит различать отрезки прямой не только по их абсолютной величине, но и по знаку: отрезок считается положительным или отрицательным в зависимости от того, совпадает ли направление от начальной его точки к конечной с положительным направлением прямой или с направлением противоположным (на черт. 2 отрезок $OA$ — положительный, $OB$ — отрицательный).

После того как система координат на прямой установлена, каждой точке $M$ этой прямой соответствует одно единственное отвлечённое число, характеризующее её положение, — одна координата $x = \frac{OM}{PQ}$, абсолютная величина которой даёт расстояние точки $M$ от начала координат, измеренное данной единицей длины, а знак указывает, по какую сторону от начала координат расположена точка.

Обратно, каждому числу соответствует одна единственная точка на прямой. Пусть, например, требуется построить точку $A$, координата которой $x = +3$, т. е. $\frac{OA}{PQ} = 3$, или $OA = 3 \cdot PQ$. Точка $A$ определится однозначно, как конец отрезка, отложенного вправо от начала координат (черт. 2) и имеющего длину в 3 единицы масштаба.



Черт. 2.



Черт. 3.

Если координата точки $B$ равна $-{}^{1}/_{2}$ [отметим это, поместив в скобках около обозначения точки её координату: $B(-{}^{1}/_{2})$], то точку $B$ мы построим, отложив влево от начала координат половину выбранной единицы $PQ$ (черт. 2). Построим ещё точку $C\,(+\sqrt{2})$; в данном случае $OC = \sqrt{2} \cdot PQ$; чтобы получить отрезок указанной длины, строим квадрат на отрезке $PQ$, как на стороне: диагональ квадрата $a = \sqrt{2} \cdot PQ$; поэтому, отложив равный ей отрезок в положительном направлении от начала координат, получим точку $C$ (черт. 3).

Когда мы говорим, что дана точка, — это значит, что известна её координата; когда по тем или иным условиям требуется найти точку, — это значит, что нужно вычислить её координату.

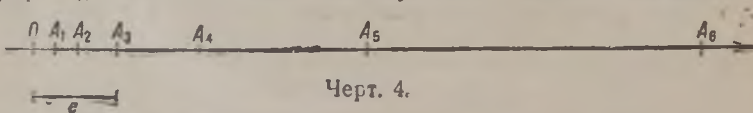
Таким образом, установлено **взаимно однозначное соответствие** между точками прямой и действительными числами. Этим соответствием мы можем воспользоваться для графического изображения изменения какой-нибудь переменной величины. Пусть, например, переменная величина $x$ принимает последовательно значения, равные членам геометрической прогрессии:

$$ {}^{1}/_{4},\ {}^{1}/_{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ \ldots; $$

эти значения переменного изобразятся на прямой точками:

$A_1(+{}^{1}/_{4})$, $A_2(+{}^{1}/_{2})$, $A_3(+1)$, $A_4(+2)$, $A_5(+4)$, $A_6(+8)$, ...

(черт. 4), и мы ясно видим, что переменная величина изменяется



Черт. 4.

скачками и что каждый раз она получает приращение вдвое большее предыдущего приращения. Если переменная величина изменялась бы по закону изменения членов арифметической прогрессии, например: 1, 1,5, 2, 2,5, 3, ..., то мы получили бы на прямой ряд точек, расположенных на равных расстояниях друг от друга (черт. 5).


Черт. 5.

Во многих измерительных приборах мы судим об изменении изучаемой величины по положению точки на прямой. Например, о температуре мы судим по положению уровня ртутного столба на прямолинейной вертикальной шкале. В этом случае за начальную точку принято положение уровня ртути при температуре таяния льда, за положительное направление выбрано направление снизу вверх, и единица длины равна $^1/_{100}$ подъёма ртути при переходе от температуры таяния льда к температуре кипения воды (шкала Цельсия).

Если изменить начало координат, направление на прямой или единицу длины, то соответствие между точками прямой и числами будет уже иное, — каждая точка получит новую координату.

## 1. Формулы преобразования координат

Если перенести начало координат в точку $O'(a)$, то между старой координатой ($x$) любой точки прямой и новой координатой ($x'$) той же точки существует соотношение:

$$x = x' + a. \tag{1}$$

Если принять за положительное направление на прямой направление, противоположное первоначальному, то координаты всех точек изменят знак, не меняя своей абсолютной величины:

$$x = -x'. \tag{2}$$

Если выбрать новую единицу длины $e' = P'Q'$, то координаты одной и той же точки будут обратно пропорциональны соответствующим единицам, т. е.

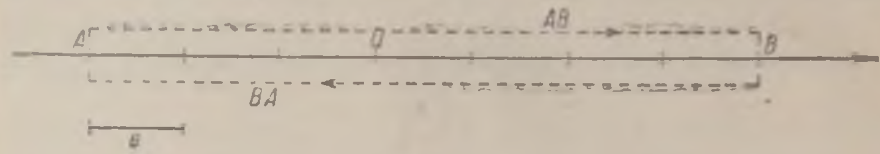
$$x = \frac{e'}{e} x'. \tag{3}$$

## 2. Основные формулы

Если даны две точки $A$ и $B$ своими координатами $x_1$ и $x_2$, то расстояние между ними вычисляется по формуле:

$$AB = x_2 - x_1, \tag{4}$$

т. е. длина отрезка равна разности координат его концов, причём из координаты конечной точки надо вычесть координату начала.




Черт. 6.

Так как эта формула справедлива при всяком расположении точек, то нужно обращать внимание на правильное обозначение отрезков и ставить на первом месте букву, обозначающую начало, а на втором — букву, обозначающую конец отрезка.

Пример. Даны две точки

$$A(-3) \quad \text{и} \quad B(+4);$$

тогда

$$AB = 4 - (-3) = +7,$$

$$BA = -3 - 4 = -7 \text{ (черт. 6).}$$

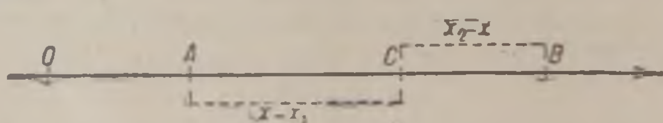
Если на прямой даны две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$, то всякая третья точка $C(x)$ делит отрезок $AB$ в некотором определённом отношении $\frac{AC}{CB}$ (черт. 7); мы будем обозначать его буквой $\lambda$, т. е.

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{\text{отрезок от начальной точки до делящей}}{\text{отрезок от делящей точки до конечной}}.$$

Для вычисления $\lambda$ имеем формулу:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}; \tag{5}$$

$\lambda$ принимает положительные или отрицательные значения в зависимости от того, лежит ли делящая точка $C(x)$ внутри или вне отрезка $AB$.




Черт. 7.

Если, наоборот, дано отношение $\lambda$, то координата соответствующей делящей точки $C$ определяется формулой:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{6}$$

В частности, когда $\lambda = 1$ и $AC = CB$, мы имеем:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{7}$$

т. е. координата середины отрезка равна полусумме координат его концов.

Сложным (ангармоническим) отношением четырёх точек $A, B, C$ и $D$ называется отношение двух отношений, в котором точка $C$ делит отрезок $AB$ и в котором $D$ делит тот же отрезок $AB$. Обозначается это так:

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Если $(ABCD) = -1$, то соответствующие четыре точки называются гармоническими.

**1.** Построить следующие точки:

$$A(+4), \quad B(-2{,}5), \quad C(-{}^2/_3),$$
$$D(+\sqrt{3}), \; E(-0,\;(4)\;\ldots), \quad F(\sqrt{5}-1).$$

**2.** Построить точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

a) $\frac{5x-2}{3} - \frac{2x-1}{7} = \frac{3x+4}{2} - 3$; d) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$;

b) $x^2 - 4 = 0$; e) $x^2 + 4x + 4 = 0$;

c) $x^2 + x - 6 = 0$; f) $x^2 - x + 6 = 0$.

**3.** Положение точки, равномерно движущейся по прямой, даётся для любого момента $t$ формулой: $x = vt + c$, где $v$ — скорость движения, $c$ — начальное положение точки. Отметить на чертеже положение точки в начальный момент и в конце каждой из первых пяти секунд, если закон движения дан уравнением: $x = 3t - 7$; проверить, что в равные промежутки времени точка проходит равные пути.

**4.** Найти координату точки, симметричной с точкой $A(+3)$, относительно: a) начала координат; b) точки $B(-2)$; c) точки $C(+5)$.

**5.** Даны точки:

$$A(+9), \quad B(+5), \quad C(-3), \quad D(-8) \text{ и } M(x).$$

Определить координаты этих же точек при условии, что единица длины будет взята: a) втрое больше первоначальной; b) вдвое меньше первоначальной; c) так, что $e' : e = 5 : 2$.

**6.** Зная, что один километр равен 468,7 саж., написать формулу, пользуясь которой можно делать новые пометки на верстовых столбах, расставленных вдоль железнодорожного пути, при переходе на метрическую систему измерения[1]).

**7.** Составить формулу, определяющую температуру в градусах Цельсия, если измерение произведено термометром Реомюра.

Примечание. На шкале Реомюра 0° отмечена температура таяния льда и 80° — температура кипения воды.

**8.** Каковы будут координаты точек: $A(+6)$, $B(+2)$, $C(0)$, $D(-2)$, $E(-7)$ и $M(x)$ после того, как начало координат будет перенесено: a) в точку $O_1(+3)$; b) в точку $O_2(-5)$?

**9.** В какую точку нужно перенести начало координат, чтобы точка $A(+7)$ получила новую координату $x' = -1$?

**10.** Проверка термометра обнаружила, что ртуть поднимается до $+96°$ при измерении температуры кипения воды и опускается только до $+1°$ при измерении температуры таяния льда. Как вычислять истинную температуру в градусах Цельсия, пользуясь показаниями этого термометра?

**11.** Как преобразовать систему координат, чтобы все точки, координаты которых $x < -7$, получили положительные координаты, а все точки, для которых $x > -7$, получили координаты отрицательные?

**12.** Преобразовать систему координат так, чтобы точка $A(+5)$ сохранила свою координату, а точки, симметричные по отношению к ней, обменялись своими координатами.

**13.** Какое произведено преобразование координат, если первоначальная координата $x$ любой точки прямой связана с новой координатой $x'$ той же точки одним из следующих равенств:

a) $x = 5x'$; e) $x = -\frac{x'}{2} + 5$;

b) $x = -3x'$; f) $x = nx'$;

c) $x = 2x' - 1$; g) $x = x' + a$;

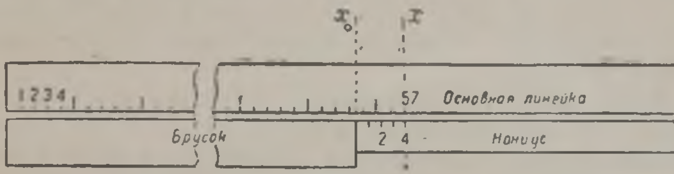
d) $x = -x' + 3$; h) $x = nx' + a$?

---

[1]) 1 верста содержит 500 сажен.

**14.** Преобразовать систему координат так, чтобы точки, имевшие координаты $+3$ и $+7$, получили новые координаты $+2$ и $-6$.

**15.** При измерении длины бруска деление основной линейки, соответствующее 57 *см*, совпало с четвёртым делением нониуса. Определить длину бруска (черт. 8).




Черт. 8.

Примечание. При измерении длин, которые точно не выражаются в целых единицах основной линейки, употребляется вспомогательная линейка — нониус. Нониус приставляется к измеряемому предмету так, чтобы составить его продолжение. Длина нониуса равна девяти единицам основной линейки; разделён он на 10 равных частей.

**16.** Найти расстояние между точками: $A(-2)$ и $B(+5)$; $C(+3)$ и $D(-8)$; $E(-1)$ и $F(-4)$; $O(0)$ и $G(+6)$; $G(+6)$ и $O(0)$; $K(-3)$ и $O(0)$; $M(-5)$ и $N(-2)$.

**17.** Найти координату точки $P$, зная расстояние её от данной точки $Q$. Пусть, например:

a) $Q(+2)$ и $PQ = -5$; c) $Q(-3)$ и $QP = -1$;
b) $Q(-7)$ и $PQ = +2$; d) $Q(+1)$ и $QP = +8$.

**17*.** Если даны любые три точки $A$, $B$ и $C$ на прямой, то независимо от их взаимного расположения между их расстояниями существует следующее соотношение: $AB + BC = AC$. Проверить справедливость этого равенства для точек:

a) $A(-3)$, $B(+5)$ и $C(+12)$;
b) $A(+4)$, $B(+1)$ и $C(+6)$;
c) $A(+3)$, $B(-7)$ и $C(-2)$;
d) $A(x_1)$, $B(x_2)$ и $C(x_3)$.

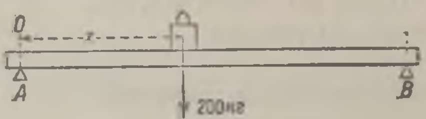
**18.** Даны три точки: $A(-1)$, $B(+5)$, $C(+3)$. Определить отношение, в котором каждая из этих точек делит отрезок между двумя другими.

**19.** Найти точку $M$, делящую отрезок между точками $A(-1{,}5)$ и $B(+7{,}5)$ в отношении $\lambda$, причём $\lambda$ принимает значение 1; 4; $-2{,}5$; 0; $-1$.

**20.** Найти координату точки $B$, зная, что точка $C(-2)$ делит отрезок между $A(+3{,}5)$ и $B(x)$ в отношении $\lambda = {}^5/_2$.

**21.** Даны три точки: $A(-3)$, $B(+1)$ и $C(+2)$. Найти к каждой из них четвёртую гармоническую по отношению к двум остальным.

**22.** Стержень рычага разделён на сантиметры и миллиметры. В точках, соответствующих делениям 23,7 и 74,3 *см*, подвешены грузы в 350 и 475 *г*. Определить точку стержня, под которую надо подвести опору, чтобы рычаг находился в равновесии.



Черт. 9.

**23.** Горизонтальная балка длиной в 3 *м* и весом в 80 *кг* свободно лежит своими концами на двух неподвижных опорах $A$ и $B$ (черт. 9). На каком расстоянии от конца $A$ нужно поместить груз в 200 *кг*, чтобы давление на опору $B$ было равно 110 *кг*?

**24.** Стержень длиной в 60 *см* подвешен на двух верёвках. Одна из этих верёвок не может выдержать натяжения, превышающего 20 *кг*. На каком расстоянии от соответствующего конца стержня можно прикрепить к нему груз в 96 *кг*?

**25.** На прямой даны две точки $A$ и $B$, которые разбивают её на три части: отрезок $AB$, луч, идущий вправо от $B$, и луч, идущий влево от $A$. На той же прямой дана подвижная точка $M$, делящая отрезок $AB$ в отношении $\lambda$. Исследовать, как меняется $\lambda$, когда $M$ перемещается между $A$ и $B$, когда $M$ совпадает с одной из этих точек, когда $M$ неограниченно удаляется вправо от $B$ или влево от $A$.

# ЧАСТЬ ВТОРАЯ

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

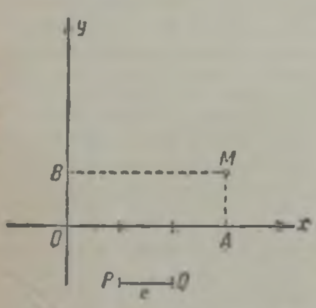
## ГЛАВА II

## КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

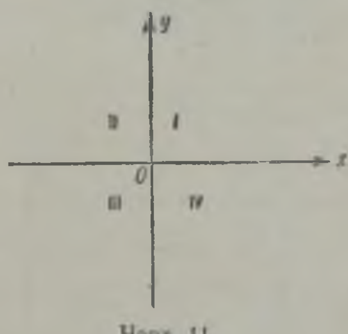
### 1. Прямоугольные координаты. Графики

Положение точки на плоскости определяется проще всего по отношению к так называемой прямоугольной декартовой системе координат, которую мы установим следующим образом:

1) выберем две взаимно перпендикулярные прямые — две оси координат: ось $x$, или ось абсцисс, и ось $y$, или ось ординат (черт. 10); точка их пересечения $O$ называется началом координат;




Черт. 10.




Черт. 11.

2) на каждой из осей координат выберем положительное направление;

3) для каждой оси выберем единицу длины (на черт. 10 для обеих осей взята одна и та же единица $e = PQ$).

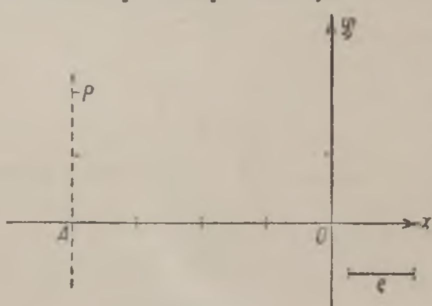
Положение точки $M$ относительно выбранной системы координат определяется двумя координатами: абсциссой $x = \frac{BM}{PQ} = \frac{OA}{PQ}$ и ординатой $y = \frac{AM}{PQ} = \frac{OB}{PQ}$. Абсцисса $x$ даёт расстояние точки $M$ от оси ординат, причём знак указывает, находится ли точка $M$ вправо или влево от неё. Ордината $y$ равна расстоянию точки $M$ от оси абсцисс, и знак её указывает, находится ли точка кверху или книзу от оси абсцисс. На черт. 10 точка $M$ имеет координаты: $x = +3$ и $y = +1$. Мы обозначаем это так: $M(+3;\ +1)$.

Оси координат делят всю плоскость (черт. 11) на четыре части (четыре квадранта). Координаты точек различных квадрантов имеют различные знаки, а именно:

| Квадрант | Знак абсциссы | Знак ординаты |
|---|---|---|
| I | + | + |
| II | — | + |
| III | — | — |
| IV | + | — |

Точки, расположенные на оси абсцисс, имеют ординаты, равные нулю; точки оси ординат имеют абсциссы, равные нулю; начало координат имеет обе координаты, равные нулю.

Если даны значения двух координат, то можно построить одну единственную точку, имеющую эти координаты. Построим, например, точку $P(-4;\ +2)$; с этой целью отложим по оси абсцисс влево от начала координат отрезок $OA$, равный четырём единицам длины (черт. 12); в конце $A$ этого отрезка проводим перпендикуляр к оси $x$ и на нём, кверху от точки $A$, откладываем две единицы масштаба; конец этого второго отрезка и будет искомая точка $P(-4;\ +2)$.



Черт. 12.

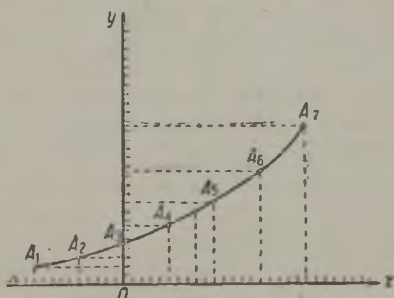
Таким образом, установлено **в з а и м н о   о д н о з н а ч н о е   с о о т в е т с т в и е** между точками плоскости и парами чисел $(x,\ y)$. Этим мы можем воспользоваться для графического изображения одновременного изменения двух величин, для наглядного изображения зависимости между ними. Пусть, например, требуется графически изобразить зависимость между упругостью насыщенного пара и температурой, причём результаты произведённых наблюдений даны в таблице

| Температура | $-10°$ | $-5°$ | $0°$ | $+5°$ | $+10°$ | $+15°$ | $+20°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Упругость насыщенного пара в *мм* . . . . | $+2,0$ | $+3,1$ | $+4,6$ | $+6,6$ | $+9,1$ | $+12,7$ | $+17,4$ |

По оси абсцисс откладываем значения независимого переменного, в данном случае температуры; по оси ординат — значения функции, а именно — упругости насыщенного пара. За единицу длины примем на обеих осях один миллиметр, т. е. перемещение на 1 *мм* вправо по оси абсцисс соответствует повышению температуры на 1°, а перемещение на 1 *мм* вверх по оси ординат — увеличению давления на 1 *мм* ртутного столба[1]). На черт. 13 отмечено семь точек:

$$A_1(-10;\ +2,0),\quad A_2(-5;\ +3,1),\quad \ldots,\quad A_7(+20;\ +17,4),$$

заменяющих данную таблицу; абсцисса каждой из этих точек даёт температуру, ордината — соответствующую упругость насыщенного пара. Так как с изменением температуры упругость меняется плавно, без резких скачков, то, для более наглядного изображения изменения упругости пара в зависимости от изменения температуры, полученные точки соединяем плавной кривой, — это и будет график упругости насыщенного пара. Эта кривая даёт возможность приближённо определить упругость пара для любой промежуточной температуры; например, для 8° упругость равна 8 *мм*, что мы узнаем, измеряя ординату той точки кривой, которая имеет абсциссу $x=8$.



Черт. 13.

**26.** Построить следующие точки:

$$A(+2;\ +7),\quad B(+3;\ 0),\quad C(+1;\ -4),\quad D(0;\ +5),$$
$$E(-1;\ +2),\quad F(-4;\ -3),\quad G(-2;\ 0),\quad H(0;\ -3),$$
$$K(-3^1/_2;\ +2^1/_3),\quad L(+\sqrt{2};\ -\sqrt{3}),\quad N(0;\ +\sqrt{5}).$$

---

[1]) Упругость или давление пара измеряется в миллиметрах ртутного столба.

27. Построить точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 5x+2y=-1, \\ 2x-y=14; \end{cases} \quad \text{b)}\ \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y=7; \end{cases} \quad \text{c)}\ \begin{cases} y^2-4x=0, \\ x^2-4y=0. \end{cases}$$

28. Построить точки, абсциссы которых равны: $-4$, $-3$, $-2$, $-1$, $0$, $+1$, $+2$, $+3$ и $+4$, а ординаты определяются из уравнения: a) $y=3x-5$; b) $y=x^2$.

29. Дана точка $M(+3; +2)$; построить точки, симметричные с ней относительно оси абсцисс, оси ординат, начала координат. Определить координаты этих точек.

30. Расстояние между точками $A(-2; +5)$ и $M(x, y)$ равно трём единицам масштаба. Определить координаты точки $M$, зная, что: a) $A$ и $M$ лежат на прямой, параллельной оси $x$; b) $A$ и $M$ лежат на прямой, параллельной оси $y$.

31. Какое соотношение существует между координатами точки, лежащей на одной из биссектрис координатного угла?

32. Сторона квадрата равна 1. Определить координаты его вершин, приняв за оси координат: a) две непараллельные стороны его; b) две диагонали; c) прямые, параллельные сторонам квадрата и пересекающиеся в его центре.

33. Найти координаты вершин правильного шестиугольника, сторона которого равна $a$, зная, что начало координат помещено в центре шестиугольника, а ось абсцисс проходит через две противолежащие его вершины.

34. Изобразить графически зависимость между средним ростом и возрастом человека, пользуясь следующими данными:

| Возраст в годах | Рост в *см* | Возраст в годах | Рост в *см* | Возраст в годах | Рост в *см* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 50 | 7 | 111 | 14 | 147 |
| 1 | 71 | 8 | 116 | 15 | 152 |
| 2 | 80 | 9 | 122 | 16 | 156 |
| 3 | 87 | 10 | 128 | 17 | 162 |
| 4 | 93 | 11 | 133 | 18 | 166 |
| 5 | 99 | 12 | 137 | 19 | 167 |
| 6 | 105 | 13 | 142 | 20 | 168 |

**35.** Изобразить графически зависимость между средней годовой температурой и высотой местности над уровнем моря. Соответствующие наблюдения даны в таблице:

| *h* в *км* | $t°$ | *h* в *км* | $t°$ | *h* в *км* | $t°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | + 7,9 | 6 | —23,7 | 12 | —54,2 |
| 1 | + 4,6 | 7 | —30,8 | 13 | —54,4 |
| 2 | + 0,1 | 8 | —38,0 | 14 | —54,4 |
| 3 | — 5,0 | 9 | —44,4 | 15 | —54,4 |
| 4 | —10,7 | 10 | —49,6 | | |
| 5 | —16,9 | 11 | —52,8 | | |

**36.** Сведения о возрасте студентов, принятых на первый курс одного института, даны в следующей таблице:

| Возраст в годах | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число студентов | 2 | 23 | 85 | 146 | 129 | 62 | 10 | 8 | 6 | 3 | 1 |

Составить график возрастного состава первокурсников этого института, соединив ломаной линией все полученные точки.

**37.** Составить график железнодорожного движения между Москвою и Дмитровым по следующему расписанию поездов:

| | *км* | № 1 | № 3 | № 5 | № 7 | № 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Москва . . . . . | — | 9.0 | 14.10 | 16.39 | 18.40 | 20.30 |
| Лианозово . . . | 13 | 9.31 | 14.37 | 17.07 | — | 21.0 |
| Лобня . . . . . . | 27 | 10.14 | 15.18 | 17.48 | — | 21.53 |
| Икша . . . . . . | 46 | 10.53 | 15.54 | 18.24 | 20.14 | 22.30 |
| Дмитров . . . . | 66 | 11.30 | 16.29 | 19.0 | 20.55 | 23.05 |

| | *км* | № 2 | № 4 | № 6 | № 8 | № 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Дмитров . . . . . | — | 3.08 | 5.18 | 7.14 | 17.44 | 19.34 |
| Икша . . . . . . | 20 | 4.07 | 5.58 | 7.56 | 18.23 | 20.18 |
| Лобня . . . . . . | 39 | 4.51 | 6.42 | 8.41 | 19.02 | 21.04 |
| Лианозово . . . | 53 | 5.28 | 7.19 | — | 19.40 | 21.44 |
| Москва . . . . | 66 | 5.55 | 7.45 | 9.40 | 20.07 | 22.11 |

По составленному графику определить:

a) какие из указанных поездов встречаются и на каком именно расстоянии от Москвы;

b) какие поезда находятся в пути своего следования в полдень и какие в 8 час. вечера;

c) в котором часу проходят поезда мимо будки на 50-м километре от Москвы;

d) какие поезда перегоняют и какие поезда попадаются навстречу пешеходу, вышедшему из Лианозова в 7 часов утра и идущему в Лобню со скоростью 5 километров в час (на графике отметить передвижение пешехода).

**38.** Тело падает с высоты 50 метров под действием силы тяжести. Изобразить положение тела в тот момент, когда началось падение, когда оно закончилось, и промежуточные положения, вычисленные для каждой $^1/_2$ сек. Полученные точки соединить плавной кривой.

Указание. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то путь, пройденный падающим телом в $t$ сек., можно вычислить по формуле:

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

где $g \approx 9{,}8$ *м/сек*$^2$.

**39.** По горизонтальной балке, лежащей на двух опорах $A$ и $B$, идёт человек. Давление, испытываемое опорой $B$, меняется в зависимости от положения человека на балке. Изобразить графически зависимость между этим давлением и расстоянием человека от другого конца балки $A$ при следующих числовых данных: вес балки $P = 120$ *кг*, длина её $l = 5$ *м*, вес человека $p = 65$ *кг*.

**40.** Простейший подъёмный ворот состоит из барабана и колеса, вращающихся на общей горизонтальной оси. На барабан намотана верёвка, к концу которой подвешен груз $Q$, а колесо обмотано верёвкой, за которую тянут, чтобы поднять груз. Сила $P$, которую нужно при этом употребить, вычисляется по формуле:

$$P=\frac{r}{R}\cdot Q,$$

где $r$ — радиус барабана, $R$ — радиус колеса. Изобразить графически зависимость между силой $P$ и радиусом колеса $R$, если $r=10$ *см* и $Q=12$ *кг* (вес ведра воды).

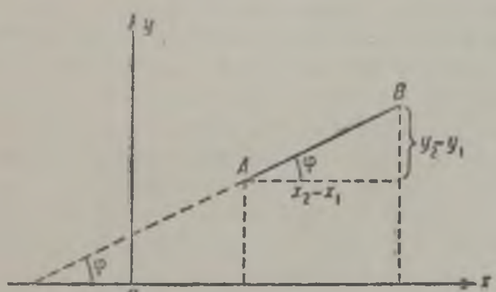
## 2. Расстояние между двумя точками. Направление отрезка. Площадь треугольника

Если даны две точки своими координатами $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то расстояние между ними (черт. 14) вычисляется по формуле:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \tag{1}$$

т. е. длина отрезка равна квадратному корню из суммы квадратов разностей одноимённых координат его концов.

Определяя расстояние между двумя точками на плоскости, мы обращаем внимание только на его абсолютную величину и приписываем ему тот или иной знак лишь в том случае, когда на прямой, соединяющей эти точки, установлено положительное направление.




Черт. 14.

В частности, расстояние точки $M(x, y)$ от начала координат определяется по формуле:

$$OM=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

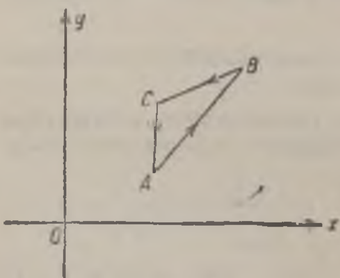
Угол $\varphi$, образованный отрезком $AB$ с положительным направлением оси абсцисс (черт. 14), определяется через координаты концов отрезка следующим образом:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (3)$$

Если даны координаты трёх вершин треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$, то можно вычислить его площадь по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}. \qquad (4)$$

Пользуясь этой формулой, мы можем получить для площади $S$ как положительные, так и отрицательные значения, в зависимости от того, будет ли обход периметра от вершины $A$ к $B$ и к $C$ (черт. 15) соответствовать положительному вращению (против часовой стрелки) или отрицательному (по стрелке часов).




Черт. 15.

Признаком того, что три точки лежат на одной прямой, может служить равенство нулю площади соответствующего треугольника, т. е.

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+ \\ +x_3(y_1-y_2)=0. \qquad (5)$$

41. Определить расстояние между двумя точками: $A(+5; +2)$ и $B(+1; -1)$; $C(-6; +3)$ и $D(0; -5)$; $O(0; 0)$ и $P(-3; +4)$; $Q(+9; -7)$ и $R(+4; +5)$.

42. Даны вершины треугольника: $A(+3; +2)$, $B(-1; -1)$ и $C(+11; -6)$. Определить длину его сторон.

43. Доказать, что треугольник с вершинами $A(0; 0)$, $B(+3; +1)$ и $C(+1; +7)$ прямоугольный.

43*. Зная вершины треугольника $P(-2, +1)$, $Q(+4; +8)$ и $R(+10; +6)$, проверить, нет ли тупого угла среди внутренних углов этого треугольника.

44. Определить ординату точки $M$, зная, что абсцисса её равна $+7$, а расстояние до точки $N(-1; +5)$ равно 10.

45. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки $A(+4; -6)$ на расстоянии 5 единиц.

46. На биссектрисах координатного угла найти точки, расстояние которых от точки $M(-2; 0)$ равно 10.

47. Точка, двигаясь прямолинейно, переместилась из точки $A(-1; -3)$ в точку $B(+4; +2)$. Как велик пройденный

путь и под каким углом к оси абсцисс наклонена траектория точки?

48. Какой угол образует с осью $x$ прямая, проходящая через точки $M(0;\ +2)$ и $N(-2;\ +4)$?

49. Прямая линия проходит через точку $A(+3;\ +1)$ и образует с осью $x$ угол $45°$. На этой прямой найти точку, ордината которой $y=+4$.

50. Определить положение точки, которая, выйдя из $A(+3;\ 0)$, переместилась на 8 единиц длины по прямой, образующей угол $30°$ с осью $x$.

51. На оси $x$ найти точку, равноудалённую от начала координат и от точки $A(+9;\ -3)$.

52. Какому условию должны удовлетворять координаты точки $M(x,\ y)$, если она одинаково удалена от точек $A(+7;\ -3)$ и $B(-2;\ +1)$?

52*. Найти центр правильного шестиугольника, зная две смежные его вершины: $A(+2;\ 0)$ и $B(+5;\ +3\sqrt{3})$.

53. Дан треугольник своими вершинами: $A(+2;\ -3)$, $B(+1;\ +3)$ и $C(-6;\ -4)$. Определить координаты точки $M$, с которой совпадает вершина $A$, если перегнуть чертёж по прямой $BC$.

53*. Зная две противолежащие вершины ромба $A(+8;\ -3)$, $C(+10;\ +11)$ и длину его стороны $AB=10$, определить координаты остальных вершин ромба.

54. Найти точку, равноудалённую от трёх данных точек: $A(+2;\ +2)$, $B(-5;\ +1)$ и $C(+3;\ -5)$.

55. Найти центр окружности, проходящей через точку $A(-4;\ +2)$ и касающейся оси абсцисс в точке $B(+2;\ 0)$.

56. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точку $(+2;\ -1)$ и касающейся обеих осей координат.

57. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого служат точки: $A(+4;\ +2)$, $B(+9;\ +4)$ и $C(+7;\ +6)$.

58. Вычислить периметр и площадь треугольника по координатам его вершин: $(-2;\ +1)$, $(+2;\ -2)$ и $(+8;\ +6)$.

58*. Вычислить площадь пятиугольника, вершинами которого служат точки: $A(-2;\ 0)$, $B(0;\ -1)$, $C(+2;\ 0)$, $D(+3;\ +2)$ и $E(-1;\ +3)$.

**59.** Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки:

a) $(0;\ +5)$, $(+2;\ +1)$, $(-1;\ +7)$;

b) $(+3;\ +1)$, $(-2;\ -9)$, $(+8;\ +11)$;

c) $(0;\ +2)$, $(-1;\ +5)$, $(+3;\ +4)$.

**60.** Точка, двигаясь прямолинейно, прошла через точки

$$M(+5;\ +5) \text{ и } N(+1;\ +3).$$

Определить точку, в которой она пересечёт ось $x$.

Указание. Определить абсциссу искомой точки $P(x;\ 0)$ из условия, что эта точка должна лежать на одной прямой с двумя данными точками.

**61.** Прямая определена двумя своими точками: $A(-1;\ +4)$ и $B(+2;\ +1)$. На этой же прямой найти точку, абсцисса которой $x=+5$.

**61*.** Даны точки: $A(+1;\ +3)$, $B(+4;\ +7)$, $C(+2;\ +8)$ и $D(-1;\ +4)$. Проверить, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, и вычислить его высоту, приняв сторону $AB$ за основание.

### 3. Деление отрезка в данном отношении

Если даны две точки $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$, то координаты всякой третьей точки $C$, лежащей с ними на одной прямой, определяются формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad \text{и} \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \tag{6}$$

где $\lambda$ обозначает отношение, в котором точка $C$ делит отрезок $AB$, т. е. $\lambda=\frac{AC}{CB}$. Каждой точке прямой $AB$ соответствует определённое значение параметра $\lambda$, и, обратно, каждому значению $\lambda$ соответствует одна единственная точка на прямой $AB$.

В частности, если точка $C(x,\ y)$ делит отрезок $AB$ пополам, то $\lambda=1$, и мы имеем:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{и} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \tag{7}$$

т. е. координаты середины отрезка равны полусумме одноимённых координат его концов.

**62.** Даны вершины треугольника: $A(+3; -7)$, $B(+5; +2)$ и $C(-1; 0)$. Найти середины его сторон.

**62*.** Вычислить длину медиан треугольника, зная координаты его вершин: $A(+3; -2)$, $B(+5; +2)$ и $C(-1; +4)$.

**63.** Центр тяжести однородного стержня находится в точке $M(+5; +1)$; один его конец совпадает с точкой $A(-1; -3)$. Определить положение другого конца.

**64.** Отрезок $AB$ перемещается так, что концы его всё время остаются на двух неподвижных прямых: конец $A$ скользит по прямой, параллельной оси $x$ и проходящей над ней на расстоянии трёх единиц; конец $B$ скользит по прямой, параллельной оси $y$ и проходящей слева от неё на расстоянии двух единиц. Определить положение концов отрезка в тот момент, когда середина отрезка совпадает с точкой $M(+3; +1)$.

**65.** Найти вершины треугольника, зная середины его сторон: $P(+3; -2)$, $Q(+1; +6)$ и $R(-4; +2)$.

**65*.** Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ служат смежными вершинами ромба, диагонали которого параллельны осям координат. Как выразить координаты остальных вершин через координаты данных точек?

**66.** Даны координаты двух смежных вершин параллелограмма $A(-4^1/_2; -7)$ и $B(+2; +6)$ и точки пересечения диагоналей $M(+3; +1^1/_2)$. Вычислить координаты двух остальных его вершин.

**67.** Даны три вершины параллелограмма: $A(+4; +2)$, $B(+5; +7)$ и $C(-3; +4)$. Найти четвёртую вершину $D$, противолежащую вершине $B$.

**68.** Отрезок между точками $A(+3; +2)$ и $B(+15; +6)$ разделён на пять равных частей. Определить координаты точек деления.

**69.** На луче, выходящем из начала координат и проходящем через точку $M(+4; +3)$, найти точку $P$, расстояние которой от начала координат равно 9.

**69*.** Прямая линия отсекает на оси $X$ отрезок $OA=4$ и на оси $Y$ отрезок $OB=7$. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую.

**70.** Найти точку пересечения медиан треугольника, зная координаты его вершин: $(+1; +4)$, $(-5; 0)$ и $(-2; -1)$.

V 71. Как выражаются координаты центра тяжести треугольника[1]) через координаты его вершин?

72. Центр тяжести треугольника совпадает с началом координат; одна из вершин лежит на оси абсцисс на расстоянии $a$ от начала координат; вторая вершина лежит на оси ординат на расстоянии $b$ от начала. Найти координаты третьей вершины.

73. Дан треугольник $A(+4; +1)$, $B(+7; +5)$, $C(-4; +7)$. Найти точку пересечения биссектрисы угла $A$ с противолежащей стороной $BC$.

74. Два подобных треугольника имеют общую вершину $A(+3; -6)$ и при ней общий угол. Найти две другие вершины большего треугольника, если известны вершины меньшего: $B(+6{,}2; -3{,}6)$ и $C(+5; +1)$, а отношение сходственных сторон равно $^5/_2$.

V 75. Найти точку пересечения общих касательных двух окружностей, центры которых совпадают с точками $C_1(+2; +5)$ и $C_2(+7^1/_3; +10^1/_3)$, а радиусы соответственно равны трём и семи единицам.

V 76. Определить точку, в которой прямая, соединяющая точки $A(+4; +1)$ и $B(-2; +4)$, пересекает ось абсцисс.

V 77. На прямой, соединяющей точки $(-3; +5)$ и $(-1; +2)$, найти точку, имеющую абсциссу $x=5$.

78. Найти точку пересечения диагоналей $AC$ и $BD$ четырёхугольника: $A(+3; -2)$, $B(+3; +5)$, $C(0; +4)$, $D(-1; -1)$.

79. В трёх точках $A(+7; +1^1/_2)$, $B(+6; +7)$ и $C(+2; +4)$ помещены грузы соответственно в 60, 100 и 40 *г*. Определить центр тяжести этой системы.

80. Доказать, что если тяжёлая система состоит из $n$ точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, то центр тяжести этой системы определится следующими формулами:

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

$$y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

---

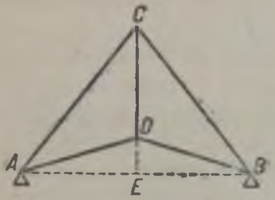
[1]) Под центром тяжести треугольника, если нет иных указаний, мы подразумеваем центр тяжести однородной треугольной пластинки.

**80*.** В трёх точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ сосредоточены одинаковые массы. Найти центр тяжести этой системы.

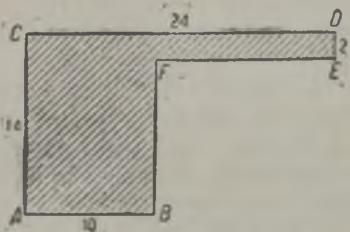
**81.** Однородная проволока согнута в виде прямого угла со сторонами $a$ и $b$. Найти центр тяжести этой проволоки.

**82.** Найти координаты центра тяжести проволочного треугольника, зная, что вершины его помещены в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Длины сторон, для краткости, обозначим так: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

**83.** Определить положение центра тяжести симметричной стержневой фермы $ADBC$ (черт. 16), у которой $AB = 6$ *м*, $CD = 3$ *м* и $DE = 1$ *м*.




Черт. 16.




Черт. 17.

**84.** Найти центр тяжести четырёхугольной однородной доски, зная, что углы доски помещаются в точках: $A(+4; +4)$, $B(+5; +7)$, $C(+10; +10)$ и $D(+12; +4)$.

**85.** Вычислить координаты центра тяжести фигуры, размеры и форма которой даны на черт. 17, приняв за оси координат стороны $AB$ и $AC$.

## 4. Косоугольная система координат

Вместо того, чтобы брать две взаимно перпендикулярные оси координат, мы можем взять любые две пересекающиеся прямые и определять положение точек плоскости по отношению к ним. Угол $\omega$ между положительным направлением оси $x$ и положительным направлением оси $y$ называется **координатным углом** (черт. 18).

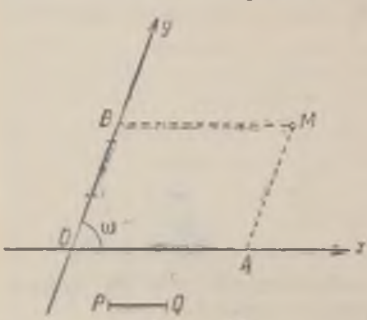
Если координатный угол отличен от прямого угла, система координат называется **косоугольной**.

Чтобы определить координаты точки $M$ (черт. 18), проводим через неё прямые $MA$ и $MB$, параллельные осям; тогда

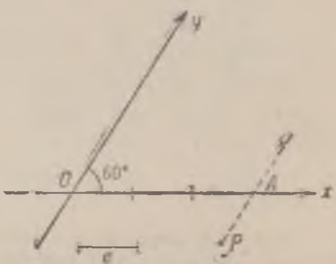
$$\text{абсцисса } x = \frac{BM}{PQ} = \frac{OA}{PQ} \text{ и ордината } y = \frac{AM}{PQ} = \frac{OB}{PQ}.$$

Косоугольные координаты точки не равны расстояниям этой точки от осей координат.

Построим точку $P(+3; -1)$ при условии $\omega = 60°$. За оси координат возьмём две прямые, пересекающиеся под углом $60°$ (черт. 19); на каждой из них выберем положительное направление и единицу длины. От начала координат $O$, вправо по оси $x$, откладываем от-




Черт. 18.




Черт. 19.

резок $OA = 3e$; через точку $A$ проводим прямую, параллельную оси $y$, и на ней откладываем вниз от точки $A$ отрезок $AP$, равный единице длины; конец этого отрезка и будет искомой точкой.

В косоугольной системе координат приходится вычислять величины всякого рода (длины, углы, площади) по более сложным, обобщённым формулам, содержащим координатный угол $\omega$. Для расстояния между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ мы имеем (черт. 20):

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cdot\cos\omega}. \qquad (1')$$

Расстояние точки $M(x, y)$ от начала координат выражается формулой

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cdot\cos\omega}. \qquad (2')$$


Черт. 20.

Между координатами концов отрезка $AB$ и углом $\varphi$, образованным этим отрезком с положительным направлением оси $x$, существует соотношение:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)}. \qquad (3')$$

Преобразовав это равенство, можно получить для вычисления угла $\varphi$ формулу:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(y_2 - y_1)\cdot\sin\omega}{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\cdot\cos\omega}. \qquad (3'')$$

Площадь треугольника вычисляется по формуле:

$$S = \frac{\sin\omega}{2}\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \qquad (4')$$

Что же касается формул, характеризующих взаимное расположение точек, то они остаются без изменения. Условие того, что три точки лежат на одной прямой, выражается попрежнему равенством:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0. \qquad (5')$$

Координаты точки, делящей отрезок между $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в отношении $\lambda$, будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

Если в последующих задачах координатный угол не указан, то предполагается, что система координат прямоугольная.

86. Построить треугольник, вершины которого даны своими координатами $(+3; +5)$, $(-4; +7)$ и $(+5^1/_2; -3^1/_2)$ относительно косоугольной системы с углом $\omega = \frac{\pi}{4}$.

87. Относительно косоугольной системы координат с координатным углом $\omega = 150°$ дана точка $M(+6; +4)$. Определить расстояния этой точки от осей координат.

88. Определить координаты точки $M$, если расстояния её от осей координат содержат соответственно 1 и 1,5 единицы длины. $\omega = \frac{\pi}{6}$.

89. Точки $M(-3; -5)$ и $N(x, y)$ симметричны относительно оси $x$. Найти координаты точки $N$ при условии, что координатный угол $\omega = 60°$.

90. Определить координаты вершин правильного шестиугольника, сторона которого $a = 1$, если за оси координат приняты такие две смежные его стороны, что вершина, противолежащая началу координат, имеет обе координаты положительные.

91. Вычислить расстояние между двумя точками $M(+3; 0)$, $N(+1; -2)$ при условии, что $\omega = 120°$.

92. Относительно косоугольной системы координат с углом $\omega = 60°$ дан треугольник: $A(0; 0)$ $B(+7; +4)$, $C(-1; +6)$. Вычислить длину медианы, проведённой из вершины $A$.

**93.** Вычислить длину сторон треугольника $A(+14; +3)$, $B(+9; -2)$, $C(+4; +1)$ при условии, что $\omega = {}^2/_3\pi$.

**94.** Относительно косоугольной системы координат с углом $\omega = \arccos(-{}^3/_5)$ даны две вершины правильного треугольника $A(+2; -2)$ и $B(+7; +1)$. Найти третью его вершину.

**95.** Определить координатный угол $\omega$, зная, что расстояние между точками $A(+10; -4)$ и $B(+7; -1)$ равно 3.

**96.** Прямая линия проходит через две точки $M(+2; +3\sqrt{2})$ и $N(+6; -\sqrt{2})$. Вычислить длину того отрезка этой прямой, который заключён между осями координат, если известно, что $\omega = \frac{\pi}{4}$.

**97.** Под каким углом к оси $x$ наклонён отрезок, соединяющий точки $P(-1; +4)$ и $Q(+2; +7)$? $\omega = 60°$.

**98.** Известно, что прямая, проходящая через две точки $A(+4; +1)$ и $B(-2; y)$, образует равные углы с обеими осями координат. Вычислить неизвестную ординату точки $B$. Система координат — произвольная.

**99.** На расстоянии $3^1/_2$ единиц от точки $A(+5; +2)$ найти такую точку $M$, чтобы прямая $OM$, соединяющая её с началом координат, была наклонена к оси $x$ под углом $\varphi = 30°$; $\omega = 120°$.

**100.** Дана окружность с центром в точке $C(-7; +4)$ и радиусом $R = 6$; найти концы тех диаметров, которые параллельны биссектрисам координатного угла; $\omega = \frac{2\pi}{3}$.

**101.** Определить площадь треугольника, одна из вершин которого совпадает с началом координат, а две другие — с точками $A(+3; +1)$ и $B(-1; +4)$; $\omega = 150°$.

**102.** Вычислить координатный угол $\omega$, если известно, что площадь треугольника $A(-5; -1)$, $B(+3; -2)$, $C(+1; +4)$ равна 11,5 кв. единицы.

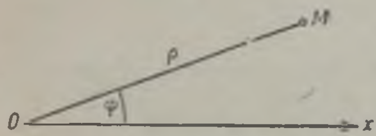
## 5. Полярная система координат

Основными элементами полярной системы координат являются точка и луч, из неё выходящий, — **полюс** $O$ и **полярная ось** $Ox$ (черт. 21).

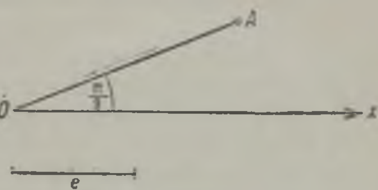
Положение точки $M$ на плоскости определяется расстоянием этой точки от полюса — **радиусом-вектором** $\rho$ и полярным углом $\varphi$, образованным радиусом-вектором с полярной осью.

Две координаты $(\rho, \varphi)$ определяют одну единственную точку. На черт. 22 построена точка $A$ по координатам $\rho = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{9}$.

Если мы хотим установить взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парой координат $(\rho, \varphi)$, то достаточно придавать $\rho$ только положительные значения, а $\varphi$ — значения, заключённые между 0 и $+2\pi$ (положительные углы получаются вращением луча против часовой стрелки). Если не придерживаться этих



Черт. 21.



Черт. 22.

ограничений, то одна и та же точка определяется координатами $(\rho, \varphi + 2n\pi)$ или $(-\rho, \varphi + (2n+1)\pi)$, где $n$ — любое целое число.

Расстояние между двумя точками $A(\rho_1, \varphi_1)$ и $B(\rho_2, \varphi_2)$, данными в полярных координатах, вычисляется по формуле (черт. 23):

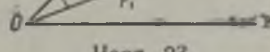
$$AB = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \qquad (1'')$$

**103.** Построить точки, полярные координаты которых имеют следующие значения:

$\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$; $\left(1; \frac{5\pi}{3}\right)$; $\left(5; \frac{7\pi}{6}\right)$; $\left(0{,}5; \frac{\pi}{2}\right)$;

$\left(2{,}5; \frac{2\pi}{3}\right)$; $(6; \pi)$; $\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$;

$\left(\sqrt{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$; $\left(-2; \frac{\pi}{4}\right)$.



Черт. 23.

**104.** Как расположены точки, полярные координаты которых удовлетворяют одному из следующих уравнений:

a) $\rho = 1$; b) $\rho = 5$; c) $\rho = a$; d) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; e) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 5

f) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; g) $\varphi = \text{const}$.?

**105.** Найти полярные координаты точек, симметричных с точками

$$\left(1;\ \frac{\pi}{4}\right);\ \left(3;\ \frac{2\pi}{3}\right);\ \left(\frac{2}{3};\ -\frac{\pi}{6}\right);\ M(\rho,\ \varphi)$$

a) относительно полюса;

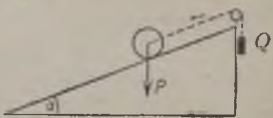
b) относительно полярной оси.

**106.** Определить полярные координаты вершин правильного шестиугольника, сторона которого равна $a$, приняв за полюс одну из его вершин, а за полярную ось — сторону, через неё проходящую.

**107.** Построить точки, полярные углы которых равны 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, а соответствующие радиусы-векторы вычисляются из уравнения $\rho = a \cdot \sin 2\varphi$.

Полученные точки соединить плавной кривой.

**108.** Чтобы уравновесить тяжёлое тело $P$ на наклонной плоскости, образующей с горизонтальной плоскостью угол $\alpha$, нужно употребить силу $Q = P \cdot \sin\alpha$ (черт. 24). Эта уравновешивающая сила $Q$, при одном и том же грузе $P$, зависит от угла наклона $\alpha$. Выразить эту зависимость графически, пользуясь полярными координатами.



Черт. 24.

**109.** Вычислить расстояние между двумя данными точками:

$$A\left(2;\ \frac{\pi}{12}\right) \text{ и } B\left(1;\ \frac{5\pi}{12}\right);\ C\left(4;\ \frac{\pi}{5}\right) \text{ и } D\left(6;\ \frac{6\pi}{5}\right);$$

$$E\left(3;\ \frac{11\pi}{18}\right) \text{ и } F\left(4;\ \frac{\pi}{9}\right).$$

**110.** Даны вершины треугольника (в полярных координатах): $A\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(8;\ \frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(3;\ \frac{7\pi}{6}\right)$. Проверить, что этот треугольник правильный.

**111.** На полярной оси найти точку, отстоящую от точки $A\left(4\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$ на расстоянии 5 единиц.

**112.** Вывести формулу для вычисления площади треугольника, одна из вершин которого совпадает с полюсом.

**113.** Вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $\left(4; \frac{\pi}{9}\right)$ и $\left(1; \frac{5\pi}{18}\right)$.

√**114.** Вычислить площадь треугольника, заданного своими вершинами (в полярных координатах):

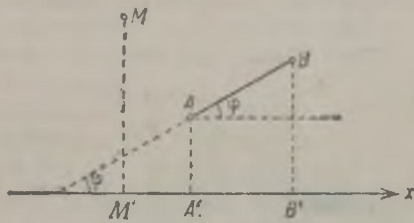
$$A\left(9; \frac{\pi}{10}\right); \ B\left(12; \frac{4\pi}{15}\right) \text{ и } C\left(10; \frac{3\pi}{5}\right).$$

35

## 6. Проекции. Преобразование координат

Проекцией точки $M$ на ось называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки, на ось, т. е. точка $M'$ (черт. 25).

Проекцией отрезка $AB$ на ось называется геометрическое место проекций всех его точек, или, иначе, отрезок оси ($A'B'$), заключённый между проекциями концов отрезка.



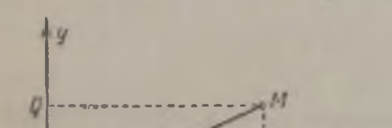

Черт. 25.

Длина проекции отрезка равна длине проектируемого отрезка, умноженной на косинус угла между этим отрезком и положительным направлением оси проекции

$$A'B' = AB \cdot \cos\varphi. \quad (8)$$

Проекция ломаной равна алгебраической сумме проекций её звеньев и равна проекции замыкающего отрезка.

Зависимость между полярными координатами ($\rho$, $\varphi$) точки и прямоугольными декартовыми координатами ($x$, $y$) той же точки, если полюс принят за начало координат, а полярная ось за ось абсцисс (черт. 26), выражается формулами:




Черт. 26.

$$x = \rho \cdot \cos\varphi; \quad y = \rho \cdot \sin\varphi \quad (9)$$

и, обратно,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \quad (10)$$

При переходе от одной декартовой системы координат к другой мы будем обозначать через $x$ и $y$ координаты точки относительно первоначальной системы, а через $x'$ и $y'$ — координаты той же точки относительно новой системы.



180

Если перенести начало координат в точку $O'(a, b)$ и не менять направления осей, то

$$x = x' + a; \quad y = y' + b. \tag{11}$$

Если, не меняя начала, принять за новые оси прямые, образующие со старой осью абсцисс углы $\alpha$ и $\beta$, то

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \cdot \sin(\omega - \alpha) + y' \cdot \sin(\omega - \beta)}{\sin \omega}; \\ y &= \frac{x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \sin \beta}{\sin \omega}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Если одновременно произвести оба преобразования, то

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \cdot \sin(\omega - \alpha) + y' \cdot \sin(\omega - \beta)}{\sin \omega} + a; \\ y &= \frac{x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \sin \beta}{\sin \omega} + b. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В частности, если обе системы координат прямоугольные, то $\omega = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, и мы имеем

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha + a; \\ y &= x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha + b. \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

**115.** Найти прямоугольные координаты точек, которые даны своими полярными координатами: $A\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$, причём ось абсцисс совпадает с полярной осью, а начало координат — с полюсом.

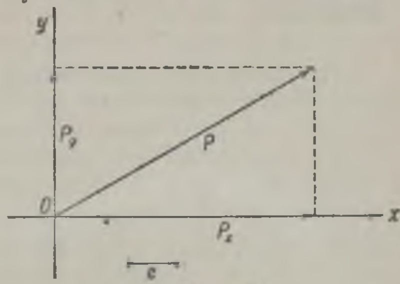
**116.** Зная прямоугольные координаты точек $(+3; -4)$, $(-1; +1)$, $(0; +2)$, $(+5; 0)$, найти их полярные координаты.

**117.** Координаты всех точек прямой, параллельной оси ординат, удовлетворяют уравнению: $x = a$. Какому уравнению удовлетворяют полярные координаты этих же точек?

**118.** Полярные координаты всех точек окружности, описанной около полюса радиусом, равным $a$, удовлетворяют условию: $\rho = a$. Какому условию должны удовлетворять прямоугольные координаты тех же точек?

**119.** Сила $P = 6$ *кг* приложена к точке, совпадающей с началом координат; направление силы образует с осью абсцисс угол $\alpha = 30°$. Определить составляющие этой силы по осям координат.

Указание. Сила изображается вектором (направленным отрезком), длина которого соответствует величине силы. Составляющие всякой силы по двум перпендикулярным направлениям равны проекциям на эти направления того вектора, которым изображается сила (черт. 27).




Черт. 27.

**120.** Определить величину и направление силы $P$, зная, что её составляющие по осям $x$ и $y$ соответственно равны 8 и 6 *кг*.

**121.** Даны две точки: $A(+3;\ +7)$ и $B(+5;\ +6)$. Найти величину проекций отрезка $AB$ на оси координат.

**122.** К одной и той же точке приложены три силы $P$, $Q$ и $S$, причём даны их составляющие по обеим координатным осям: $P_x = 3$, $P_y = 8$, $Q_x = 7$, $Q_y = 0$; $S_x = 2$, $S_y = -3$. Вычислить равнодействующую $R$ этих сил.

Указание. Воспользоваться тем, что равнодействующая сила изображается замыкающим отрезком той ломаной, звеньями которой служат слагающие силы.

**123.** Как преобразуются координаты любой точки $M(x, y)$, если, оставив ось абсцисс без изменения, переменить направление на оси ординат; если за ось абсцисс принять прежнюю ось ординат и за ось ординат — прежнюю ось абсцисс? (Координатный угол произвольный.)

**124.** Как нужно изменить систему координат, чтобы координаты любой точки сохранили свою прежнюю абсолютную величину, но изменили знаки на обратные; чтобы абсолютная величина абсциссы всякой точки увеличилась втрое, а абсолютная величина её ординаты уменьшилась вдвое?

**125.** Как нужно изменить систему координат, чтобы абсциссы всех точек увеличились на пять единиц; чтобы ординаты всех точек уменьшились на две единицы; чтобы одновременно абсциссы всех точек уменьшились на три единицы, а ординаты увеличились на три единицы?

**126.** Относительно некоторой системы координат точка $A$ имеет координаты: $x = +7$ и $y = -5$. Вычислить координаты этой же точки при условии, что начало координат перенесено в одну из следующих точек: $O_1(+2; +3)$, $O_2(-4; +7)$, $O_3(+3; -9)$, $O_4(-1; -2)$, $O_5(+3; -5)$.

**127.** Найти расстояние между двумя точками, имеющими одинаковые координаты ($x = 1$ и $y = 2$) относительно двух различных прямоугольных систем координат, причём вторая система получается из первоначальной перенесением начала в точку $O'(+3; +4)$ (без изменения направления осей).

**128.** Найти расстояние между точками $A(+1; +2)$ и $B(+2; -1)$, причём координаты точки $B$ вычислены относительно новой системы координат, полученной из прежней перенесением начала в точку $O'(-1; +3)$.

**129.** Одна и та же точка имеет относительно двух разных систем координат координаты $(+2; +5)$ и $(-3; +6)$. Определить координаты начала каждой из этих систем относительно другой, зная, что оси их имеют одинаковое направление.

**130.** Каковы будут координаты трёх точек $A(+2; -3)$, $B(-1; +5)$ и $M(x, y)$ после того, как прямоугольные оси координат, к которым они отнесены, повернуть около начала: a) на прямой угол против часовой стрелки; b) на прямой угол по часовой стрелке; c) на два прямых угла?

**131.** Относительно прямоугольной системы координат даны точки $A\left(+\sqrt{8}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M(x, y)$. Найти координаты тех же точек в предположении, что оси координат заменены биссектрисами координатного угла.

**132.** Дан квадрат $ABCD$, сторона которого $a = 1$. За оси координат выбраны один раз стороны $AB$ и $AD$, а другой раз диагонали $AC$ и $BD$. Найти зависимость между координатами одной и той же точки относительно этих двух систем координат.

**133.** Две стороны прямоугольника $ABCD$ первоначально совпадали с осями координат ($AB = 5$ и $AD = 2$). Затем прямоугольник был передвинут так, что вершина $A$, совпадавшая раньше с началом координат, попала в точку $A_1(+4; -1)$, а сторона $AB$, совпадавшая с осью $x$, оказалась повёрнутой на угол $\alpha = 30°$. Определить новое положение остальных трёх вершин.

**134.** Оси координат первоначально совпадали с катетами $CA$ и $CB$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($CA=3$; $CB=4$). Затем за оси координат были выбраны: перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, и сама гипотенуза данного треугольника. Определить координаты вершин относительно этой новой системы и дать соответствующие формулы преобразования координат.

**135.** Дан равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого равны $a$. За оси координат приняты катеты $CA$ и $CB$; потом ось абсцисс оставлена была без изменения, а ось ординат заменена гипотенузой $AB$. Дать формулы преобразования координат при переходе от одной системы к другой.

**136.** По отношению к косоугольной системе координат ($\omega=60^\circ$) дана точка $M(-1;\ +4)$. Найти координаты этой же точки, приняв за новые оси координат биссектрисы прежнего координатного угла.

**137.** Дан ромб, сторона которого $a=2$. Оси координат сначала совпадали с двумя сторонами, угол между которыми $\omega=120^\circ$, и затем с его диагоналями. Определить координаты вершин ромба относительно второй системы и дать соответствующие формулы преобразования координат.

**138.** Известно, что площадь треугольника, одна из вершин которого находится в начале координат, выражается через прямоугольные координаты двух других вершин $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ следующим образом: $S={}^1/_2\,(x_1y_2-y_1x_2)$. Как выразится площадь того же треугольника через новые координаты его вершин, если: а) начало координат перенесено в точку $O'(a, b)$, а направление осей осталось прежним; b) начало координат и ось абсцисс остались прежними, но прямоугольная система заменена косоугольной с координатным углом $\omega$?

**139.** Координаты ряда точек удовлетворяют уравнению $x^2+y^2+2x-10y+22=0$. Какому уравнению будут удовлетворять координаты тех же точек, если прежняя система координат заменена новой, а именно — начало координат перенесено в точку $O'(-1;\ +5)$, а направление осей не изменилось?

**140.** Координаты некоторых точек удовлетворяют уравнению $xy+3x-2y-6=0$. Какому уравнению будут удовлетворять координаты тех же точек после того, как начало координат будет перенесено в точку $O'(+2;\ -3)$?

**140*.** Координаты ряда точек удовлетворяют уравнению

$$x^2+2xy-y^2+4x+8y-5=0.$$

Как выбрать новое начало координат, чтобы новые координаты тех же точек были связаны уравнением, не содержащим членов первой степени?

**141.** Прямоугольные координаты ряда точек удовлетворяют уравнению $y^2-x^2=a^2$. Как будет выражена зависимость между координатами тех же точек, если за оси координат принять биссектрисы прежнего координатного угла?

**142.** На какой угол нужно повернуть прямоугольные оси координат, чтобы уравнение $2x^2-5xy+2y^2+3x-4=0$ после преобразования координат не содержало члена с произведением координат?

## ГЛАВА III

# ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

### 1. Построение кривой по её уравнению

Одно уравнение, связывающее две переменные величины $x$ и $y$, имеет простой геометрический смысл, если рассматривать $x$ и $y$ как координаты точки на плоскости. Одному уравнению удовлетворяет бесчисленное множество пар значений $(x, y)$, и каждая такая пара даёт определённую точку плоскости, — таким образом, существует бесчисленное множество точек, координаты которых удовлетворяют одному уравнению. Совокупность этих точек представляет некоторую линию, некоторую кривую,— следовательно, *одно уравнение между двумя координатами определяет кривую.*

Возьмём какое-нибудь уравнение, например

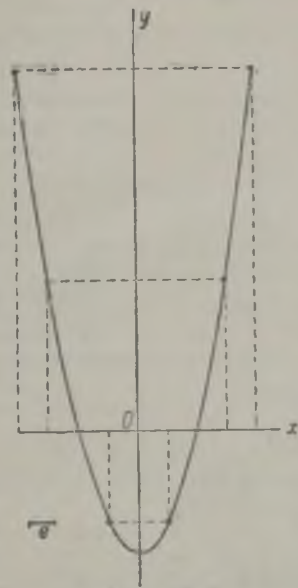
$$x^2-y-4=0,$$

и построим соответствующую кривую. С этой целью решим уравнение относительно $y$:

$$y=x^2-4;$$

затем, давая $x$ различные значения и вставляя их в преобразованное уравнение, будем вычислять соответствующие значения $y$. Полученные результаты вычислений запишем в виде таблички. В каждой строке таблицы мы имеем пару координат, удовлетворяющих данному уравнению, т. е. координаты одной из точек кривой. Построим эти точки (черт. 28) и соединим их плавной кривой. Эта кривая и будет искомой линией, изображаемой данным уравнением. Если нам неясно течение кривой между отмеченными точками, то, давая $x$ добавочные значения, строим промежуточные точки. Например, в нашем случае полезно вычислить ординаты, соответствующие

$$x = \pm {}^1/_2, \quad x = \pm {}^1/_4.$$




| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | $-4$ |
| $+1$ | $-3$ |
| $+2$ | 0 |
| $+3$ | $+5$ |
| $+4$ | $+12$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $-1$ | $-3$ |
| $-2$ | 0 |
| $-3$ | $+5$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |

Черт. 28.

По уравнению кривой мы можем судить о важнейших её свойствах. Например, благодаря тому, что в рассматриваемое уравнение абсцисса входит только в квадрате, — соответствующая кривая симметрична относительно оси ординат, так как, давая $x$ значения, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, мы получим одно и то же значение для $y$; иначе, если на кривой лежит точка $(a, b)$, то на ней должна лежать точка $(-a, b)$, а такие две точки симметричны относительно оси $y$.

Если мы имеем уравнение, в правой части которого стоит нуль, а левая часть представляет произведение двух или нескольких сомножителей, то кривая, определяемая этим уравнением, представляет совокупность двух или нескольких линий, уравнения которых получим, приравнивая нулю каждый множитель отдельно. Например, уравнение:

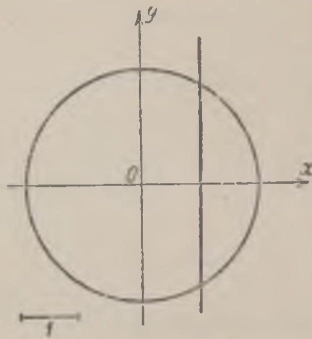
$$(x^2 + y^2 - 4)(x - 1) = 0 \qquad (1)$$

представляет две линии:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ и } x - 1 = 0, \qquad (2)$$

так как координаты, удовлетворяющие одному из этих уравнений (2), удовлетворяют и уравнению (1). Мало того, только те координаты удовлетворяют уравнению (1), которые удовлетворяют одному из уравнений (2).

Уравнение $x^2+y^2-4=0$, или $x^2+y^2=4$, представляет окружность с центром в начале координат и радиусом, равным двум единицам, потому что квадрат расстояния её любой точки от начала $(x^2+y^3)$ равен 4.




Черт. 29.

Второе уравнение, $x-1=0$, изображает совокупность всех точек, имеющих абсциссу, равную единице, т. е. прямую, параллельную оси $y$ и проходящую с правой стороны от неё на расстоянии единицы (черт. 29).

Если зависимость между двумя переменными величинами выражена формулой, т. е. дано уравнение, их связывающее, то построение соответствующего графика (см. гл. II, п. 1) сводится к построению кривой, определяемой этим уравнением, при условии, что переменные рассматриваются как координаты точки на плоскости.

**143.** Исследовать, какие геометрические образы определяются уравнениями:

1) $x-y=0$; 6) $y=a$;
2) $x+y=0$; 7) $(x-1)(x+3)=0$;
3) $x^2-y^2=0$; 8) $xy=0$;
4) $x^2+y^2=0$; 9) $x(x+1)(x-2)=0$;
5) $x^2+y^2=a^2$; 10) $(x+a)(y-b)=0$.

**144.** Построить линии, соответствующие уравнениям:

a) $2x+3y=6$; b) $y=x-5$; c) $y=x^2$;
d) $y=(x-1)^2+2$; e) $y=x^3$.

**145.** Построить кривые, данные следующими уравнениями:

a) $xy=4$; b) $y=\frac{1}{x^2}$; c) $(x^2+1)y=4x$.

**146.** Построить графики тригонометрических функций:

$$y=\sin x;\quad y=\cos x;\quad y=\operatorname{tg} x.$$

**147.** Построить кривую, зная, что полярные координаты её точек удовлетворяют уравнению: $\rho = \frac{\varphi}{2}$. (Спираль Архимеда.)

**148.** Построить кривую: $\rho = \frac{\pi}{\varphi}$. (Гиперболическая спираль.)

**149.** Построить кривую: $\rho = a(1 - \cos\varphi)$. (Кардиоида.)

**150.** Построить кривую: $\rho = \frac{4}{1 - \cos\varphi}$. (Парабола.)

**151.** Проверить, лежат ли точки $A(0; +5)$, $B(-2; +3)$ и $C(+1; -1{,}5)$ на кривой $2x^3 - 3xy + y - 5 = 0$.

**152.** Проходит ли кривая: $x^2 + 4y^2 - 2(x + y) - 6 = 0$ через точку $(+2; -1)$?

**153.** Указать, какие из следующих кривых:

a) $x^2(2x + y) - 3y^2(x + 5) = 4$; b) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x - y) = 6x^3$;

c) $3x^3 + 5y^2 - 7x^2 - y + 4x + 8 = 0$; d) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

e) $ax - by = 0$,

проходят через начало координат.

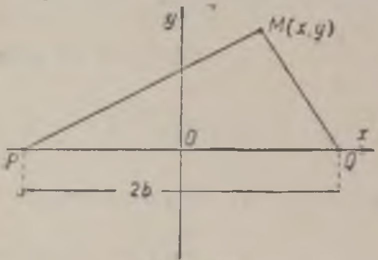
**154.** Какой особенностью должно обладать уравнение кривой, если она проходит через начало координат?

## 2. Составление уравнения кривой по её геометрическим свойствам

Кривая может быть определена как некоторое геометрическое место точек, т. е. может быть дано геометрическое свойство, присущее всем точкам кривой, и только им одним,— свойство, отличающее точки кривой от остальных точек плоскости. В таком случае возникает вопрос о нахождении уравнения кривой. Задача сводится к тому, чтобы выразить аналитически тот факт, что все точки кривой обладают определённым свойством. Но нет надобности рассматривать все точки кривой: мы можем представить себе, что кривая описана подвижной точкой $M(x, y)$, и тогда достаточно будет выразить, что точка $M(x, y)$ неизменно обладает указанным свойством.

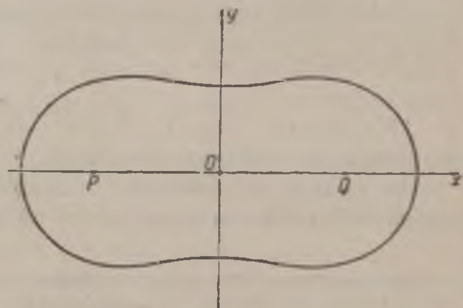
Составим, например, уравнение кривой (овала Кассини), определяемой как геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух данных точек $P$ и $Q$ есть величина постоянная, равная $a^2$.

Расстояние между данными точками $P$ и $Q$ обозначим через $2b$. Прежде чем составлять уравнение кривой, нужно выбрать определённую систему координат. От выбора системы координат зависит бо́льшая или меньшая сложность искомого уравнения (см. задачи 139—142). В данном случае выберем за ось абсцисс прямоугольной системы координат прямую, соединяющую данные две точки $P$ и $Q$ (чтобы координаты данных точек были как можно проще); начало координат поместим в середине между ними (равноправность точек позволяет рассчитывать на симметрию кривой, поэтому мы помещаем точки $P$ и $Q$ симметрично относительно оси $y$). По отношению к установленной системе (черт. 30) координаты постоянных точек $P$ и $Q$ будут $(-b;\ 0)$ и $(+b;\ 0)$.




Черт. 30.

Пусть будет $M(x, y)$ — подвижная точка, описывающая кривую; в таком случае $x$ и $y$ будут переменные, так называемые текущие координаты; они могут принимать значения, равные координатам любой точки кривой. Уравнение кривой мы получим, выразив формулой, что произведение расстояний точки $M$ от двух точек $P$ и $Q$ равно $a^2$, т. е.




Черт. 31.

$$MP \cdot MQ = a^2,$$

или, выражая отрезки $MP$ и $MQ$ через координаты их концов, получим

$$\sqrt{(x+b)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-b)^2+y^2} = a^2.$$

Это и есть уравнение овала Кассини (черт. 31). Остаётся только упростить его: освободиться от радикалов, произвести возможные сокращения и пр.:

$$(x^2+y^2+b^2+2bx)(x^2+y^2+b^2-2bx) = a^4;$$

$$(x^2+y^2+b^2)^2 - 4b^2x^2 = a^4;\quad (x^2+y^2)^2 + 2b^2(x^2+y^2) - 4b^2x^2 = a^4 - b^4;$$

и окончательно

$$(x^2+y^2)^2 - 2b^2(x^2-y^2) = a^4 - b^4.$$

**155.** Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек $A(+2;\ +1)$ и $B(-1;\ +4)$. (Составить уравнение и определить вид кривой.)

**155*.** Даны две точки: $M(-1;\ +3)$ и $N(+5;\ -3)$. Составить уравнение прямой линии, перпендикулярной к отрезку $MN$ и делящей его в отношении $\lambda = 2$.

**156.** Определить траекторию точки $M$, которая при своём движении всё время остаётся вдвое ближе к точке $A(+1;\ 0)$, чем к точке $B(+4;\ 0)$.

**157.** Требуется разложить силу $P = 15$ *кг* на две силы, отношение которых равно $2:3$. Найти геометрическое место вершин силовых треугольников, удовлетворяющих этому условию.

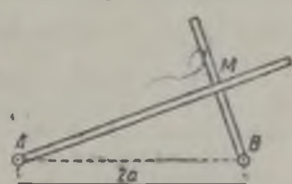
**158.** Точка движется так, что расстояния её от двух пересекающихся прямых остаются всё время в постоянном отношении. Написать уравнение её траектории.

**158*.** Составить уравнение геометрического места центров тяжести треугольников, имеющих две вершины $A(+1;\ 0)$ и $B(+5;\ 0)$, если третьи их вершины лежат на биссектрисе координатного угла.

**159.** Найти геометрическое место концов векторов, изображающих силы, приложенные к точке $A$ и имеющие относительно центра $O$ момент данной величины $M$. Расстояние центра $O$ до точки приложения сил $OA = a$.

Указание. Моментом силы $P$ относительно центра $O$ называется произведение силы на расстояние прямой, по которой она направлена, от центра. Решить задачу предварительно в полярных координатах.

**160.** Два стержня вращаются вокруг двух неподвижных точек, расстояние между которыми равно $2a$ (черт. 32). При этом вращении стержни остаются всё время перпендикулярными друг к другу. Найти геометрическое место точек пересечения стержней.

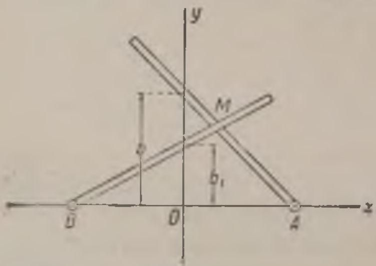


Черт. 32.

**161.** Вокруг точек $A(a, 0)$ и $B(-a, 0)$ вращаются два стержня, причём произведение отрезков, отсекаемых ими на оси ординат, считая от начала, равно постоянному числу $b \cdot b_1 = a^2$ (черт. 33). Написать уравнение геометрического места точек пересечения вращающихся стержней.

**161*.** Найти геометрическое место вершин всех треугольников, имеющих общее основание $a=12$ и равные суммы квадратов двух других сторон $b^2+c^2=100$. Решить эту задачу и в общем виде.

**162.** Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная, равная $2a$. Составить уравнение эллипса, зная, что расстояние между двумя данными точками (фокусами эллипса) равно $2c$.




Черт. 33.

**162*.** Составить уравнение геометрического места точек, находящихся от точки $A(+3;\ 0)$ вдвое ближе, чем от прямой $x=12$.

**163.** Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек (фокусов гиперболы) есть величина постоянная, равная $2a$. Расстояние между фокусами равно $2c$. Написать уравнение гиперболы.

**163*.** Найти траекторию точки, которая при своём движении остаётся всё время в полтора раза дальше от точки $F(0;\ +6)$, чем от прямой $y={}^8/_3$.

**164.** Параболой называется линия, обладающая тем свойством, что каждая её точка находится на одинаковом расстоянии от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы). Написать уравнение параболы, обозначив через $p$ расстояние от фокуса до директрисы.

**164*.** Составить уравнение геометрического места центров окружностей, касающихся оси $x$ и проходящих через точку $(+3;\ +4)$.

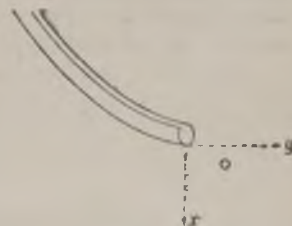
**165.** Точка $M$ движется так, что для любого момента $t$ её координаты могут быть вычислены по формулам:

a) $x=2t,\quad y=\frac{t}{3}$; c) $x=a\cdot\cos t,\ y=a\cdot\sin t$;

b) $x=5t^2-1,\ y=10t^2+4$; d) $x=a\cdot\cos t,\ y=b\cdot\sin t$.

Составить уравнения соответствующих траекторий.

**166.** Шарик скатывается по желобку и, приобретя скорость $v$, срывается с него в той точке, где касательная имеет горизонтальное направление. Определить дальнейшую траекторию шарика (черт. 34).



Черт. 34.

Указание. По закону инерции шарик должен продолжать движение по направлению касательной с постоянной скоростью $v$, т. е. по прошествии $t$ секунд быть на $vt$ метров правее точки срыва. Но, кроме того, на него действует сила тяжести, которая заставляет его опускаться в вертикальном направлении с постоянным ускорением $g = 9{,}8$ *м/сек*$^2$, т. е. по прошествии $t$ секунд он должен находиться на $\frac{gt^2}{2}$ *м* ниже, чем в первоначальный момент. (Сопротивление воздуха в расчёт не принимается.)

**167.** Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить траекторию тела, брошенного со скоростью $v$ кверху под углом $\alpha$ к горизонтальному направлению.

**168.** Решить предыдущую задачу при следующих числовых данных: $\alpha = 45°$; $v = 28$ *м/сек* и определить, на каком расстоянии упадёт тело от исходной точки.

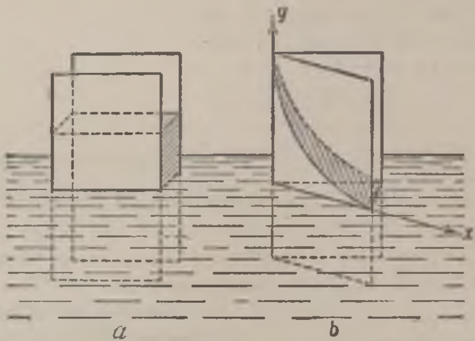
**168*.** Две точки, двигаясь равномерно и с одинаковой скоростью, описывают две взаимно перпендикулярные прямые. Зная начальное положение подвижных точек, составить уравнение геометрического места середин отрезков, их соединяющих, в различные моменты движения.

**169.** Найти геометрическое место вершин равновеликих прямоугольников, две стороны которых лежат на сторонах одного и того же прямого угла.

Указание. Для вывода уравнения принимаем за оси координат стороны данного прямого угла, а потом преобразовываем уравнение, приняв за новые оси координат биссектрисы прежнего координатного угла.

**169*.** Прямая перемещается так, что треугольник, образованный ею с осями координат, меняется, но сохраняет постоянную площадь. Найти траекторию середины отрезка, отсекаемого осями координат на этой прямой.

**170.** Если две одинаковые и достаточно близкие друг к другу параллельные пластинки погружены в жидкость, то вследствие капиллярности жидкость поднимается между ними выше уровня в сосуде (черт. 35, *a*,); эта высота поднятия $h$ обратно пропорциональна расстоянию $d$ между пластинками, т. е. $h=\frac{c}{d}$, где $c$ — постоянный множитель, зависящий от поверхностного натяжения и плотности жидкости. Если в ту




Черт. 35.

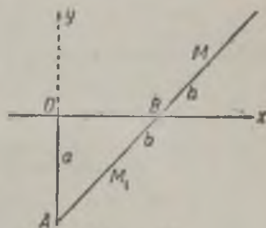
же жидкость погрузить пластинки, образующие весьма малый двугранный угол с вертикальным ребром, то жидкость поднимется между ними (черт. 35, *b*), согласно данной формуле, на разные высоты. Какую кривую образует край жидкости с внутренней стороны каждой пластинки?

**171.** Лемнискатой называется частный вид овала Кассини (см. задачу, разобранную в тексте) при условии, что $a=b$. Найти уравнение лемнискаты в декартовых и полярных координатах. Построить лемнискату, приняв $a=5$.

**172.** Дана прямая $Ox$ и на расстоянии $a$ от неё дана точка $A$ (черт. 36). Через эту точку $A$ проведены всевозможные прямые, и на каждой из них от точки $B$ её пересечения с основной прямой $Ox$ отложены в обе стороны отрезки постоянной длины, равные $b$. Таким образом, на каждой из прямых пучка $A$ выбраны две точки $M$ и $M_1$.

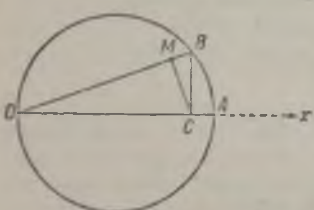
Найти уравнение геометрического места этих точек. Полученная таким образом кривая называется **конхоидой**. Начертить конхоиду для трёх случаев: $a > b$, $a = b$ и $a < b$.

173. Дана прямая $Ox$ и внешняя точка $A$ на расстоянии $a$ от неё. Вокруг точки $A$ вращается луч $AB$, и на нём в обе стороны от точки $B$ (пересечения его с прямой $Ox$) отложены переменные по величине отрезки $BM = BM_1 = OB$, где $O$ обозначает основание перпендикуляра, опущенного из $A$ на основную прямую. При вращении луча $AB$ точки $M$ и $M_1$ описывают кривую, называемую **строфоидой**. Составить уравнение этой кривой и построить её.




Черт. 36.

174. Дана окружность, диаметр которой $OA = 2r$ (черт. 37). Из конца диаметра $O$ проведена хорда $OB$, и из конца её $B$ опущен перпендикуляр на диаметр $OA$; из основания этого перпендикуляра $C$ опущен перпендикуляр обратно на хорду $OB$. Какую кривую опишет основание $M$ этого второго перпендикуляра, когда хорда $OB$ вращается вокруг $O$?



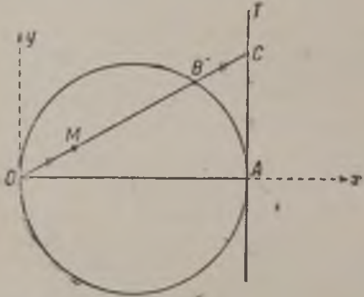

Черт. 37.

Указание. Вывести уравнение искомой кривой сначала в полярных координатах.

175. Дана окружность (радиус её $r$) и на ней точка $O$. Вокруг точки $O$ вращается луч, который пересекает окружность в переменной точке $A$. От точки $A$ в положительном направлении луча откладываем отрезок $AM = AB$, где $B$ — точка окружности, диаметрально противоположная точке $O$. Какую траекторию опишет точка $M$ при вращении луча?

176. Дана окружность, диаметр которой $OA = 2r$ (черт. 38). В одном конце диаметра проведена касательная $AT$, а через другой конец $O$ проведён секущий луч, встречающий окружность вторично в точке $B$ и данную касательную в точке $C$.

На этом луче от его начала $O$ отложен отрезок $OM$, равный отрезку $BC$. При вращении луча вокруг точки $O$ величина отрезка $OM$ меняется, и точка $M$ описывает кривую, называемую циссоидой. Составить уравнение циссоиды и построить её.

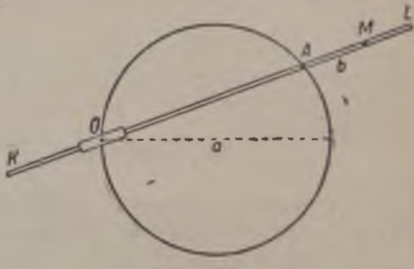


Черт. 38.

**177.** Отрезок $AB$ неизменной длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины прямого угла $O$ на этот отрезок опущен перпендикуляр $OM$. Найти геометрическое место оснований этих перпендикуляров.

Указание. Предварительно вывести уравнение искомой кривой в полярных координатах.

**178.** В точке $O$ к плоскости чертежа прикреплён ползун так, что он может только вращаться вокруг этой точки, а стержень $KL$, в него просунутый, может свободно скользить в нём и вместе с ним вращаться вокруг $O$ (черт. 39). К одной из точек стержня ($A$) прикреплён карандаш, и мы регулируем движение стержня так, чтобы этот карандаш описал окружность, проходящую через $O$ и имеющую диаметр, равный $a$. Какую кривую опишет при этом движении любая другая точка $M$ подвижного стержня?



Черт. 39.

Указание. Обозначить постоянное расстояние $AM$ через $b$ и вывести уравнение искомой кривой (улитки Паскаля) сначала в полярных координатах. Рассмотреть три случая: $a < b$, $a = b$ и $a > b$.

**179.** Прямоугольник, две стороны которого совпадают с осями координат, деформируется так, что диагональ его сохраняет постоянную величину $a$. Из вершины прямоугольника, противолежащей началу координат, опущен перпендикуляр на его диагональ. Основание этого перпендикуляра описывает при деформации прямоугольника кривую, называемую астроидой. Составить уравнение астроиды и вычертить её.

Указание. Предварительно составим уравнения астроиды в параметрической форме (см. указание к ответу задачи 165), т. е. выразим обе координаты подвижной точки через один и тот же параметр, например, через острый угол, образованный диагональю прямоугольника с осью абсцисс.

**180.** Циклоидой называется траектория любой точки окружности, катящейся без скольжения по прямой. Составить параметрические уравнения циклоиды, приняв за параметр угол поворота радиуса, соединяющего центр катящегося круга с образующей точкой.

**181.** Показать, что астроида (см. задачу 179) может быть определена как траектория точки круга, катящегося без скольжения по внутренней стороне другого круга[1]), причём радиус катящегося круга равен четверти радиуса того неподвижного круга, по которому он катится.

**182.** Составить параметрические уравнения «развёртки круга», т. е. траектории конца туго натянутой нити, сматываемой с неподвижной круглой катушки.

# ГЛАВА IV

# ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

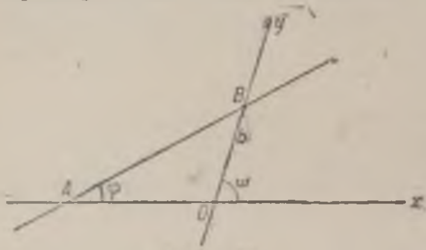
## 1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между двумя прямыми. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Всякое уравнение первой степени относительно декартовых координат изображает прямую линию, и, обратно, всякая прямая линия изображается в декартовых координатах уравнением первой степени.

---

[1]) Такая кривая называется гипоциклоидой.

Прямая линия определяется двумя условиями. Уравнение прямой содержит кроме текущих координат два независимых друг от друга параметра. Чтобы написать уравнение определённой прямой, надо знать числовые значения её параметров. Давая параметрам различные значения, получим различные прямые на плоскости.




Черт. 40.

Уравнение прямой, разрешённое относительно ординаты $y$, имеет вид:

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Параметр $k$ характеризует направление прямой и называется её угловым коэффициентом. В случае прямоугольной системы координат

$$k = \operatorname{tg} \varphi, \tag{2}$$

где $\varphi$ — угол, образованный прямой с положительным направлением оси абсцисс. В случае косоугольной системы координат (черт. 40)

$$k = \frac{\sin \varphi}{\sin(\omega - \varphi)}. \tag{2'}$$

Второй параметр уравнения (1), свободный член $b$, равен по величине и по знаку отрезку, отсекаемому данной прямой на оси ординат, считая от начала координат.

Если известны угловые коэффициенты $k$ и $k'$ двух прямых, то угол $\vartheta$ между этими прямыми вычисляется по формулам

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{k' - k}{1 + k'k} \tag{3}$$

для прямоугольной системы координат и

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{(k' - k) \cdot \sin \omega}{1 + (k' + k) \cos \omega + k'k} \tag{3'}$$

для косоугольной системы.

Условие параллельности двух прямых выразится так:

$$k' = k. \tag{4}$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$1 + k'k = 0, \quad \text{или} \quad k' = -\frac{1}{k}, \tag{5}$$

для прямоугольной системы и

$$1 + (k' + k) \cos \omega + k'k = 0 \tag{5'}$$

для косоугольной системы координат.

$-\frac{1}{3} + 4 = \frac{-1+12}{3}$

Прямая, проходящая через точку $(x', y')$ и имеющая угловой коэффициент $k$, изображается уравнением:

$$y - y' = k(x - x'). \qquad (6)$$

**183.** Даны две прямые: $y = 2x + 3$ и $y = -x + 4$. Проверить, проходят ли они через точки: $A(-1; +1)$, $B(+2; -3)$, $C(+4; 0)$, $D(+3; +1)$, $E(+2; +7)$, $F(+{}^1/_3; +{}^{11}/_3)$, $O(0; 0)$.

**184.** Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки $P(+2; -8)$ и $Q(-1; +7)$.

**185.** Определить угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси ординат прямой, данной уравнением:

a) $2x - y + 3 = 0$; b) $5x + 2y - 8 = 0$; c) $3x + 8y + 16 = 0$.

**186.** Построить прямые, данные следующими уравнениями: $y = 3x + 1$; $y = x - 2$; $y = -5x + 3$; $y = -2x - 1$; $y = 2x$; $y = 5$.

**187.** Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и наклонённой к оси $x$ под углом: a) 45°; b) 135°; c) 30°; d) 180°. Система координат — прямоугольная.

**188.** Сила $P$ приложена к началу координат, и составляющие её по осям соответственно равны 5 и $-2$. Найти уравнение прямой, по которой направлена сила.

**189.** Какая линия служит графиком равномерного движения, определяемого уравнением $s = s_0 + vt$?

**190.** Найти скорость равномерного движения, зная, что график его пересекает ось абсцисс в точке $A(-{}^1/_3; 0)$ и ось ординат в точке $B(0; +8)$. Масштаб выбран так, что на оси $x$ единица длины соответствует одному часу, а на оси $y$ — одному километру.

**191.** Точка, вышедшая из начала координат, должна одновременно перемещаться по направлению оси абсцисс с постоянной скоростью $v_1$ и по направлению оси ординат с постоянной скоростью $v_2$. Найти истинную траекторию движущейся точки.

**192.** Как изменится результат предыдущей задачи, если оба движения точки $M$ по направлению осей — равноускоренные, и постоянные ускорения соответственно равны $g_1$ и $g_2$? (Начальная скорость в обоих движениях равна нулю.)

**193.** Написать уравнения сторон квадрата, диагонали которого служат осями координат. Длина стороны квадрата равна $a$.

**194.** Написать уравнения сторон равнобочной трапеции, зная, что основания её соответственно равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с основанием угол в 60°. За оси координат взяты: большее основание и ось симметрии трапеции.

**195.** Луч света направлен по прямой $y = {}^2/_3\, x - 4$; дойдя до оси абсцисс, он от неё отразился. Определить точку встречи луча с осью и уравнение отражённого луча. $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**196.** Вычислить угол между двумя прямыми:

a) $\begin{cases} y = 3x, \\ y = -2x + 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 4x - 7, \\ y = -{}^1/_4 x + 2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 5x - 3, \\ y = 5x + 8; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \sqrt{3}\cdot x - 5, \\ y = -\sqrt{3}\cdot x + 1; \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 7x - 2, \\ y = x - \sqrt{2}. \end{cases}$

Система координат — прямоугольная.

**197.** Относительно прямоугольной системы координат написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и

a) параллельна прямой $y = 4x - 3$;

b) перпендикулярна к прямой $y = {}^1/_2 x + 1$;

c) образует угол в 45° с прямой $y = 2x + 5$;

d) наклонена под углом в 60° к прямой $y = x - 1$.

**198.** Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(+3;\ -1)$ и параллельна:

a) оси абсцисс;

b) биссектрисе координатного угла;

c) прямой $y = 3x + 7$.

**199.** По какой линии должна двигаться точка, начальное положение которой определено координатами $(+3;\ +8)$, чтобы кратчайшим путём дойти до прямой $y = {}^1/_2 x - 1$? В какой точке она достигнет этой прямой и как велик будет пройденный путь? $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**200.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(+2;\ -1)$ и составляющей с осью $x$ угол, вдвое больший угла, составляемого с тою же осью прямой $y=\frac{x}{3}+\frac{4}{3}$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**201.** Из точки $A(+6;\ +9)$ направлен луч под углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой $y=0{,}4x+0{,}8$. Найти уравнение луча, отражённого от этой прямой. $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**202.** Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y=3x+5$ и вершину прямого угла $(+4;\ -1)$. Угол $\omega=90°$.

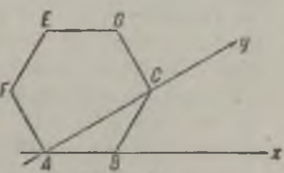
**203.** В равнобедренном прямоугольном треугольнике даны координаты вершины острого угла $(+5;\ +7)$ и уравнение противолежащего катета: $6x+4y-9=0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника. $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**203*.** Составить уравнения сторон квадрата, если даны относительно прямоугольной системы координат одна из его вершин $A(+2;\ -4)$ и точка пересечения диагоналей $M(+5;\ +2)$.

**204.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(-1;\ -3)$ и составляющей с осью $x$ угол: a) 30°; b) 60°; c) 90° при условии, что $\omega=120°$.

**205.** Написать уравнения перпендикуляров, восставленных к осям координат в точке их пересечения, если известен координатный угол $\omega=150°$.

**206.** Относительно косоугольной системы координат с координатным углом $\omega=\frac{\pi}{3}$ дана прямая $y=-2x+5$. Вычислить углы, образованные этой прямой с осями координат.



Черт. 41.

**207.** Написать уравнения всех сторон правильного шестиугольника $ABCDEF$ (черт. 41), если оси координат совпадают со стороной $AB$ и диагональю $AC$, а сторона шестиугольника равна $a$.

**208.** Вычислить угол между двумя прямыми: $y=-x+5$ и $y=-{}^1/_2x-7$. Угол $\omega=\frac{\pi}{3}$.

**209.** Определить координатный угол $\omega$, если известно, что прямые $y=-2x+1$ и $y=x+1$ образуют угол в $120°$.

**210.** Определить координатный угол $\omega$, зная, что уравнения $y=2x+3$ и $y=-{}^4/_5x+1$ изображают две перпендикулярные друг к другу прямые.

**211.** Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(+5;\ 0)$ на прямую $y=3x-4$. Угол $\omega=120°$.

**212.** Через точку $(+2;\ -5)$ проходит прямая, образующая угол $\frac{\pi}{6}$ с прямой $4x-3y+1=0$. Составить уравнение этой прямой при условии, что $\omega=\frac{\pi}{3}$.

**213.** Относительно косоугольной системы координат с углом $\omega=\frac{2\pi}{3}$ дана вершина $A(+3;\ +2)$ равностороннего треугольника и уравнение противолежащей стороны: $6x-2y-7=0$. Написать уравнения двух других сторон треугольника.

## 2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой относительно отрезков. Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой

Прямая, проходящая через две данные точки $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$, изображается уравнением:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (7)$$

Угловой коэффициент этой прямой вычисляется по формуле

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad (8)$$

т. е. угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, равен отношению разности ординат к разности абсцисс этих точек.

Пользуясь определителями, можно ещё иначе написать уравнение прямой, проходящей через две данные точки, а именно:

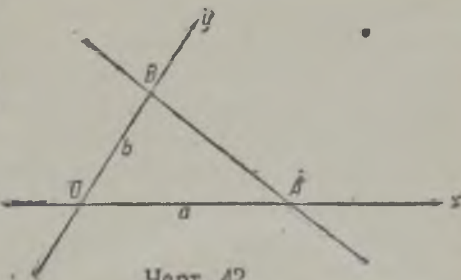
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (7')$$

Если точка $C(x_3, y_3)$ лежит на одной прямой с точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то её координаты удовлетворяют уравнению (7) или (7′), т. е. условие того, что три точки лежат на одной прямой, представится так:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}, \qquad (9)$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0^{1)}. \qquad (9')$$




Черт. 42.

Если, в частности, данные точки $A$ и $B$ лежат на осях координат, то уравнение (7) примет более простой вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (10)$$

где $a$ и $b$ обозначают отрезки, отсекаемые прямой на осях (черт. 42)[2].

**214.** Даны вершины треугольника: $A(+4; +6)$, $B(-4; 0)$ и $C(-1; -4)$. Составить уравнения:

a) трёх его сторон;

b) медианы, проведённой из вершины $C$;

c) биссектрисы угла $B$;

d) высоты, опущенной из вершины $A$ на сторону $BC$.

**215.** Написать уравнение прямой, соединяющей центр тяжести треугольника $ABC$ с началом координат, причём координаты вершин такие:

$$(+2; -1), \ (+4; +5) \text{ и } (-3; +2).$$

**216.** Даны вершины треугольника: $A(-1; +2)$, $B(+3; -1)$ и $C(0; +4)$. Через каждую из них провести прямую, параллельную противолежащей стороне.

---

[1]) Написав определитель в раскрытом виде, мы получим: $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$. (См. гл. II, п. 2, формулу (5).)

[2]) Сведения, данные в этом параграфе, могут применяться при любом координатном угле $\omega$. Только в тех задачах, в которых приходится пользоваться величиной отрезков, углов и площадей, предполагается, что $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**217.** Проверить, что четыре точки $A(-2;\ -2)$, $B(-3;+1)$, $C(+7;\ +7)$ и $D(+3;\ +1)$ служат вершинами трапеции, и составить уравнения средней линии и диагоналей этой трапеции.

**218.** Даны вершины двух треугольников $ABC$ и $A'B'C'$, а именно $A(+3;0)$, $B(0;+3)$, $C(-2;\ -1)$ и $A'(+6^1/_2;\ +2^1/_2)$, $B'(+5;\ +4)$, $C'(+4;\ +2)$. Доказать, что стороны их соответственно параллельны и что прямые, соединяющие сходственные вершины, пересекаются в одной точке.

**219.** Дан центр подобия $M(-4;\ -1)$ двух подобных и подобно расположенных треугольников и даны вершины меньшего из них; $A(-3;\ -2)$, $B(+2;\ 0)$, $C(-1;\ +1)$. Составить уравнения сторон второго треугольника, зная, что отношение сходственных сторон этих треугольников равно трём.

Примечание. В подобных и подобно расположенных треугольниках сходственные стороны параллельны, а прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в центре подобия.

**220.** Проверить, лежат ли на одной прямой три данные точки:

a) $(+1;\ +3)$, $(+5;\ +7)$ и $(+10;\ +12)$;

b) $(-3;\ -8)$, $(+1;\ -2)$ и $(+10;\ +12)$.

**221.** Какую ординату имеет точка $C$, лежащая на одной прямой с точками $A(-8;\ -6)$ и $B(-3;\ -1)$ и имеющая абсциссу $x=+5$?

**222.** Под каким углом к оси $x$ надо направить луч из точки $A(+5;\ +2)$, чтобы отражённый луч прошёл через точку $B(-1;\ +4)$? $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**223.** Относительно прямоугольной системы координат даны две точки $A(-3;\ +8)$ и $B(+2;\ +2)$. На оси абсцисс найти такую точку $M$, чтобы ломаная линия $AMB$ имела наименьшую длину.

**224.** Даны две точки: $A(-3;\ +1)$ и $B(+3;\ -7)$. На оси ординат найти такую точку $M$, чтобы прямые $AM$ и $BM$ были перпендикулярны друг к другу. Система координат прямоугольная.

**225.** Диагонали ромба, равные 10 и 4 единицам длины, приняты за оси координат. Написать уравнения сторон этого ромба.

**226.** Составить уравнения диагоналей ромба, если две смежные стороны его приняты за оси координат так, что весь ромб расположен в третьем углу. Сторона ромба равна $a$.

**227.** Найти отрезки, отсекаемые на осях координат следующими прямыми: $3x-2y+12=0$; $y=4x-2$; $y=-x+1$ и $5x+2y+20=0$.

**228.** Определить площадь треугольника, заключённого между осями координат и прямой: $x+2y-6=0$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**229.** Через точку $M(+4;\ -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями, была равна трём квадратным единицам. $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**230.** Через точку $P(+5;\ +2)$ провести прямую, отсекающую равные отрезки на осях координат.

**231.** Через точку $M(+3;\ +2)$ провести прямую так, чтобы её отрезок, заключённый между осями координат, делился в данной точке пополам.

**232.** Какая зависимость должна существовать между отрезками $a$ и $b$, чтобы прямая $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ была наклонена к оси $x$ под углом: a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{3\pi}{4}$, c) $\frac{\pi}{3}$? $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**233.** Относительно косоугольной системы координат с координатным углом $\omega=\frac{2\pi}{3}$ дана прямая $3x+5y-15=0$. Найти отрезок этой прямой, заключённый между осями координат.

**234.** Через точку $M(+6;\ -2)$ провести прямую, образующую с осями координат равносторонний треугольник. Координатный угол $\omega=60^\circ$.

**235.** Вычислить площадь треугольника, образованного осями координат и прямой $4x+3y-24=0$, если $\omega=\frac{5\pi}{6}$.

**236.** Дана прямая $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ и луч, вращающийся около начала координат; точку их пересечения обозначим через $P$.

4. 180/3 540/4 120.

На луче откладывается от начала координат отрезок $OM$ так, чтобы отрезки $OM$ и $OP$ находились в постоянном отношении $\lambda$, т. е. $\frac{OM}{OP}=\lambda$. Определить геометрическое место точек $M$.

**236*.** Прямая линия перемещается так, что сумма отрезков, отсекаемых ею на осях координат, сохраняет постоянную величину; $a+b=9$. Найти геометрическое место центров кругов, описанных около треугольников, образованных подвижной прямой и осями координат. $\omega=\frac{\pi}{3}$.

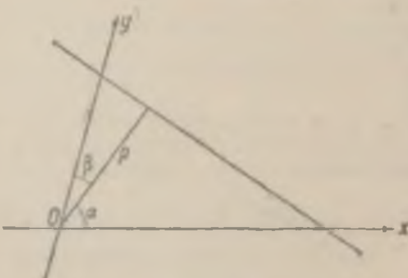
## 3. Нормальное уравнение прямой. Расстояние точки от прямой

Нормальное уравнение прямой имеет следующий вид:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0 \text{ при } \omega=\frac{\pi}{2} \tag{11}$$

или, в общем случае:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta-p=0; \tag{11'}$$




Черт. 43.

$p$ обозначает длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую ($p\geqslant 0$) (черт. 43); $\alpha$ обозначает угол между этим перпендикуляром и положительным направлением оси $x$; $\beta$ — угол между этим же перпендикуляром и осью $y$, иначе:

$$\beta=\omega-\alpha.$$

Всякое уравнение первой степени $Ax+By+C=0$ может быть приведено к нормальному виду, для чего достаточно умножить его на нормирующий множитель:

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ при } \omega=\frac{\pi}{2} \tag{12}$$

или, в общем случае:

$$M=\pm\frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}. \tag{12'}$$

Нормирующий множитель должен иметь знак, обратный знаку свободного члена $C$ данного уравнения. Если $\omega = \frac{\pi}{2}$, то параметры соответствующей прямой вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\\ \sin\alpha &= \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};\\ p &= \mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

15/II
3

а в случае косоугольной системы координат — по формулам:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}};\ \cos\beta = \pm\frac{B\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}};$$

$$p = \mp\frac{C\sin\omega;}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}. \qquad (13')$$

Расстояние ($\delta$) точки $M(x', y')$ от данной прямой равно левой части нормального уравнения этой прямой, в которой текущие координаты заменены координатами точки $M$, т. е., в случае прямоугольной системы:

$$\delta = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p, \qquad (14)$$

а в случае косоугольной системы:

$$\delta = x'\cos\alpha + y'\cos\beta - p. \qquad (14')$$

Если же прямая дана общим уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$, то его нужно предварительно привести к нормальному виду, и искомое расстояние будет:

$$\delta = \frac{Ax' + By' + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (15)$$

или

$$\delta = \frac{(Ax' + By' + C)\sin\omega}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}. \qquad (15')$$

При вычислении расстояния точки от прямой по данным формулам результат может получиться как положительный, так и отрицательный, в зависимости от того, находится ли точка и начало координат по разные стороны или по одну и ту же сторону от прямой. Расстояние прямой от начала координат ($p$) считается всегда положительным.

**237.** Относительно прямоугольной системы координат даны уравнения нескольких прямых:

a) $3x - 2y + 7 = 0$; d) $x + {}^1/_2 y - 3 = 0$;
b) ${}^2/_3 x - {}^4/_7 y - 1 = 0$; e) $-{}^{12}/_{13} x + {}^5/_{13} y - 3 = 0$;
c) ${}^3/_5 x - {}^4/_5 y - 2 = 0$; f) $x - 5 = 0$.

Которые из этих прямых представлены нормальными уравнениями?

238. Привести к нормальному виду уравнения прямых:
$4x - 3y + 10 = 0$; $5x + 12y - 39 = 0$; $6x + 8y - 15 = 0$; $x - 2y + 3 = 0$; $y - x\sqrt{3} = 4$; $x \cdot \cos 10° + y \cdot \sin 10° + 4 = 0$.

Система координат — прямоугольная.

239. Найти расстояние прямой $9x - 12y + 10 = 0$ от начала координат. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

240. Проверить, что прямые

$$2x + \sqrt{5}y - 15 = 0 \text{ и } \sqrt{11}x - 5y + 30 = 0$$

касаются одного и того же круга с центром в начале координат, и вычислить радиус этого круга. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Указание. Все касательные отстоят от центра круга на расстоянии, равном радиусу. Если данные прямые касаются указанного круга, то они должны находиться на одинаковых расстояниях от начала координат.

241. Через точку $P(+5; 0)$ провести касательную к окружности $x^2 + y^2 = 9$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Данная окружность имеет центр в начале координат и радиус $r = 3$; следовательно, искомая касательная находится от начала координат на расстоянии $p = 3$. Будем искать нормальное уравнение этой прямой; параметр $p$ уже известен, и уравнение имеет вид: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - 3 = 0$; второй параметр $\alpha$ определяем из того условия, что прямая проходит через точку $(+5; 0)$, и следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнению прямой. Вставляя эти координаты, мы получим: $5 \cos \alpha - 3 = 0$, откуда $\cos \alpha = {}^3/_5$. Определим последний коэффициент:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - ({}^3/_5)^2} = \pm {}^4/_5.$$

Задача имеет два решения: ${}^3/_5 x + {}^4/_5 y - 3 = 0$ и ${}^3/_5 x - {}^4/_5 y - 3 = 0$. Это обстоятельство имеет место потому, что из внешней точки можно провести две касательные к окружности.

**242.** Привести к нормальному виду уравнения прямых:

a) $x+5y-4=0$ при условии, что $\omega=\frac{\pi}{3}$,

b) $2x+5\sqrt{3}y-7=0$ » » » $\omega=\frac{\pi}{6}$,

c) $5x+2y+13=0$ » » » $\omega=\frac{2\pi}{3}$.

**243.** Дано уравнение прямой $6x+3\sqrt{2}y-1=0$, отнесённой к косоугольной системе координат с координатным углом $\omega=\frac{\pi}{4}$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, и углы наклона этого перпендикуляра к осям.

**244.** Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $P(+4;\ -1)$ на прямую $12x-5y-27=0$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**245.** Найти расстояние точки:

a) $P_1(+4;\ -2)$ от прямой $8x-15y-11=0$;

b) $P_2(+2;\ +7)$ » » $12x+5y-7=0$;

c) $P_3(-3;\ +5)$ » » $9x-12y+2=0$;

d) $P_4(-3;\ +2)$ » » $4x-7y+26=0$;

e) $P_5(+8:\ +5)$ » » $3x-4y-15=0$.

Система координат — прямоугольная.

**246.** Найти расстояние точки $P(0;\ +5)$ от прямой $y=\sqrt{3}x+7$, зная, что $\omega=\frac{5\pi}{6}$.

**247.** Определить координатный угол, если известно, что расстояние точки $P(-1;\ +2)$ от прямой $x+2y-6=0$ равно $-{}^{8}/_{2}$.

**248.** Даны вершины треугольника: $A(-{}^{1}/_{7};\ -{}^{8}/_{28})$, $B(+4;\ +3)$ и $C(+2;\ -1)$. Вычислить длину его высот. Система координат — прямоугольная.

**249.** Дан треугольник: $A(+1;\ +2)$, $B(+3;\ +7)$, $C(+5;\ -13)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины $B$ на медиану, проведённую из вершины $A$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

250. На оси ординат прямоугольной системы координат найти точку, одинаково удалённую от начала координат и от прямой $3x-4y+12=0$.

251. На оси абсцисс найти точку, которая отстоит от прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ на расстоянии $\delta=a$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Обозначим искомую точку через $M(x, 0)$; приводим уравнение прямой к нормальному виду, предварительно освободив его от знаменателей: $\frac{bx+ay-ab}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$; вставив в левую часть этого уравнения координаты точки $M$, приравниваем её данному расстоянию $a$. Тогда мы получим: $\frac{bx-ab}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=a$. Из этого равенства определяем единственную неизвестную: $x=a\pm\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$. Знак перед радикалом зависит от того, имеют ли отрезки $a$ и $b$ одинаковые или разные знаки.

252. Диагонали ромба, длиной в 30 и 16 единиц, приняты за оси координат. Вычислить расстояние между параллельными сторонами этого ромба.

253. Через точку $P(-2;\ +1)$ проведена прямая так, что её расстояние от точки $C(+3;\ +1)$ по абсолютной величине равно 4. Найти угловой коэффициент этой прямой.

Решение. Уравнение всякой прямой, проходящей через точку $P(-2;\ +1)$, имеет вид: $y-1=k(x+2)$, или $kx-y+2k+1=0$. Требуется определить параметр $k$ из условия, что прямая проходит на расстоянии четырёх единиц от точки $C(+3;\ +1)$. Выражение этого расстояния через неизвестный параметр $k$ мы получим, если приведём уравнение прямой к нормальному виду и в левую часть его вставим координаты $(+3;\ +1)$. Таким образом получим: $\frac{3k-1+2k+1}{\sqrt{k^2+1}}=\pm 4$; решая это уравнение относительно $k$, найдём $k=\pm 4/3$.

253*. На расстоянии 5 единиц от точки $C(+4;\ +3)$ провести прямую, отсекающую равные отрезки на осях прямоугольной системы координат.

254. На расстоянии 5 единиц от начала координат провести прямую так, чтобы она прошла через ту точку прямой $8x+5y-39=0$, которая имеет абсциссу $x=-2$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**255.** Доказать, что прямые $3x-4y+10=0$ и $6x-8y+15=0$ параллельны между собой, и найти расстояние между ними. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

Указание. Искомое расстояние $d$ легко определить, зная расстояния обеих прямых от начала координат, а именно: $d=|p\pm p_1|$, верхний или нижний знак берётся в зависимости от того, находится ли начало координат между прямыми или по одну и ту же сторону от обеих прямых.

✓**256.** Дана прямая: $12x+5y-52=0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от неё на расстоянии $d=2$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**257.** Относительно прямоугольной системы координат даны уравнения двух параллельных прямых: $4x-6y-3=0$ и $2x-3y+7=0$. Составить уравнение прямой, им параллельной и проходящей посредине между ними.

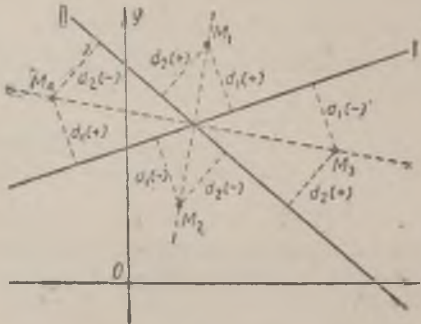
**258.** Через начало координат и точку $M(+1;\ +3)$ проходят две параллельные прямые. Найти их уравнения, если известно, что расстояние между этими прямыми равно $\sqrt{5}$ и координатный угол $\omega=90^\circ$.

**259.** Даны две прямые: $3x+4y-10=0$ и $5x-12y+26=0$. Найти точку, которая находилась бы на расстоянии $\delta=+5$ как от той, так и от другой прямой. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**260.** Найти центр круга, касающегося двух данных прямых: $3x-4y+10=0$ и $3x+4y=0$, причём радиус круга $r=8$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

✓**261.** Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя прямыми: $2x-9y+18=0$ и $6x+7y-21=0$. Проверить, что эти биссектрисы перпендикулярны друг к другу. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Искомые биссектрисы являются геометрическим местом точек, равноудалённых от сторон угла. Таким образом, если мы возьмём на биссектрисе любую точку $M_1$, то её расстояния $d_1$ и $d_2$ до двух данных прямых должны быть равны между собой. Для всех точек биссектрисы, взятых в том углу, где расположена точка $M_1$, и в вертикальном углу (черт. 44), эти расстояния будут равны и по величине и по знаку, т. е. все точки биссектрисы $M_1M_2$ удовлетворяют уравнению: $d_1 = d_2$. Для точек биссектрисы, проходящей в смежных углах, расстояния $d_1$ и $d_2$ будут тоже равны по величине, но противоположны по знаку; поэтому уравнение биссектрисы $M_3M_4$ напишется так: $d_1 = -d_2$. Обозначив через $X$ и $Y$ текущие координаты биссектрисы, будем иметь:




Черт. 44.

$$d_1 = \frac{2X - 9Y + 18}{-\sqrt{85}}$$

и

$$d_2 = \frac{6X + 7Y - 21}{\sqrt{85}}.$$

Уравнение биссектрисы $M_1M_2$:

$$\frac{2X - 9Y + 18}{-\sqrt{85}} = \frac{6X + 7Y - 21}{\sqrt{85}},$$

или, после упрощений: $8X - 2Y - 3 = 0$. Уравнение биссектрисы $M_3M_4$:

$$\frac{2X - 9Y + 18}{-\sqrt{85}} = -\frac{6X + 7Y - 21}{\sqrt{85}},$$

или окончательно: $4X + 16Y - 39 = 0$. Угловые коэффициенты прямых: $k_1 = 4$ и $k_2 = -{}^1/_4$, т. е. они противоположны по знаку и обратны по величине, что является условием перпендикулярности прямых.

**262.** Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми: $x + 7y - 6 = 0$ и $5x - 5y + 1 = 0$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**263.** Вычислить координаты центра круга, вписанного в треугольник $ABC$; треугольник дан своими вершинами относительно прямоугольной системы координат:

$$A(+{}^9/_5;\ +{}^2/_5),\ B(0;\ +4)\ \text{и}\ C(-3;\ -2).$$

**264.** Через точку $M(+1;\ +2)$ надо провести прямую так, чтобы она прошла на одинаковом расстоянии от точек $A(+3;\ +3)$ и $B(+5;\ +2)$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**265.** Даны две точки: $A(+2;\ -3)$ и $B(+5;\ -1)$. Провести прямую так, чтобы она прошла на расстоянии 6 единиц от точки $A$ и на расстоянии 4 единиц от точки $B$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$..

**266.** Точка движется так, что расстояние её от начала координат остаётся всё время вдвое больше расстояния от прямой $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$. Найти траекторию движущейся точки; $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**267.** Составить уравнение прямой, параллельной прямой $y={}^{8}/_{15}x+1$ и проходящей от точки $P(+6;\ -2)$ на расстоянии $\delta=+4$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**268.** Нужно восстановить границы квадратного участка земли по трём сохранившимся столбам: одному в центре участка и по одному на двух противоположных границах. На плане положение столбов определено координатами: среднего $M(+1;\ +6)$ и двух боковых: $A(+5;\ +9)$ и $B(+3;\ 0)$. Составить уравнения прямых, изображающих искомые границы..

Указание. Чтобы восстановить те границы участка, на которых сохранились столбы, достаточно провести через точки $A$ и $B$ две параллельные прямые, проходящие на одинаковом расстоянии от центра $M$. Две другие границы будут к ним перпендикулярны и должны проходить на таком же расстоянии от $M$.

## 4. Общее уравнение прямой. Пересечение двух прямых. Условие прохождения трёх прямых через одну точку. Пучок прямых

Общее уравнение прямой имеет вид:

$$Ax+By+C=0. \qquad (16)$$

Для определения прямой нет надобности знать все три коэффициента $A$, $B$, $C$; достаточно знать два независимых их отношения $A:B:C$.

Исследование общего уравнения прямой (16);

| | | |
|---|---|---|
| Если | $C=0$, | то прямая проходит через начало координат, |
| » | $A=0$, | » » параллельна оси абсцисс; |
| » | $B=0$, | » » » » ординат, |
| » | $A=C=0$, | » » совпадает с осью абсцисс, |
| » | $B=C=0$, | » » » » » ординат. |

Если даны две прямые:

$$Ax+By+C=0 \text{ и } A'x+B'y+C'=0, \tag{17}$$

то угол между ними вычисляется в случае прямоугольной системы координат по формуле:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{AB'-A'B}{AA'+BB'}, \tag{18}$$

а в случае косоугольной системы — по формуле:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{(AB'-A'B)\sin\omega}{AA'+BB'-(AB'+A'B)\cos\omega}. \tag{18'}$$

Условие параллельности прямых для любой системы координат:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}. \tag{19}$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$\frac{A}{B'}=-\frac{B}{A'} \text{ или } AA'+BB'=0 \text{ для } \omega=\frac{\pi}{2} \tag{20}$$

и

$$AA'+BB'-(AB'+A'B)\cos\omega=0 \text{ для любого } \omega. \tag{20'}$$

Чтобы найти координаты точки пересечения двух прямых (17), надо совместно решить их уравнения.

Решения этих уравнений будут:

$$x=\frac{BC'-B'C}{AB'-A'B}=\frac{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \text{ и } y=\frac{CA'-C'A}{AB'-A'B}=\frac{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}. \tag{21}$$

Если $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$, то прямые имеют определённую точку пересечения.

Если $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$, то прямые параллельны и точки их пересечения нет.

Если $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$, то прямые совпадают и точка пересечения становится неопределённой.

Чтобы узнать, проходят ли три данные прямые:

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+C&=0,\\ A'x+B'y+C'&=0,\\ A''x+B''y+C''&=0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

через одну и ту же точку, надо найти точку пересечения двух из них и потом проверить, удовлетворяют ли координаты этой точки уравнению третьей прямой. Можно пользоваться и готовой формулой, а именно: для того чтобы прямые (22) проходили через одну точку, нужно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

Совокупность всех прямых, проходящих через одну и ту же точку, называется **пучком прямых**, а их общая точка — **центром пучка**. Если $x'$ и $y'$ обозначают координаты центра, то уравнение

$$A(x - x') + B(y - y') = 0 \tag{24}$$

изображает любую прямую пучка. Давая отношению $A:B$ определённое значение, мы выделяем из пучка (24) одну определённую прямую [1]).

Центр пучка может быть определён не только своими координатами, но любыми двумя прямыми, через него проходящими. Если даны две прямые:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A'x + B'y + C' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

то всякая прямая, проходящая через их точку пересечения, изобразится уравнением:

$$(Ax + By + C) + q(A'x + B'y + C') = 0. \tag{25}$$

Каждому значению параметра $q$ пучка соответствует определённая прямая пучка; меняя $q$, мы получим всевозможные прямые пучка, определённого двумя основными прямыми (17).

**269.** Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые: $3x - y = 0$, $3x - y + 1 = 0$, $2x + 5 = 0$, $4y - 9 = 0$, $7x = 0$, $x + 2y = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ и построить их.

**270.** Дано уравнение первой степени: $\frac{3x+2}{6} - \frac{2y-5}{3} = 4$. Найти для соответствующей прямой: a) общее уравнение; b) нормальное уравнение; c) уравнение с угловым коэффициентом и d) уравнение относительно отрезков. $\omega = \frac{\pi}{2}$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**271.** Не определяя угловых коэффициентов, вычислить угол между прямыми:

a) $2x + y - 5 = 0$ и $6x - 2y + 7 = 0$ при $\omega = \frac{\pi}{2}$,

---

[1]) При неопределённом угловом коэффициенте уравнение $y - y' = k(x - x')$ представляет пучок с центром $(x', y')$ [гл. IV, п. 1, уравнение (6)].

$\frac{45}{16}$ $\frac{45}{\frac{16}{29}}$ $\frac{45}{\frac{-16}{29}}$ $\frac{45}{\frac{-16}{29}}$

b) $4x-5y+7=0$ и $9x+4y-11=0$ при $\omega=\frac{\pi}{3}$,

c) $x-2y+5=0$ и $3x-8=0$ при $\omega=\frac{2\pi}{3}$,

d) $4x+3y-13=0$ и $22x+(19\sqrt{3}-7)y+15=0$ при $\omega=\frac{\pi}{6}$.

**272.** Вычислить углы треугольника, стороны которого относительно прямоугольной системы координат даны уравнениями:

$18x+6y-17=0$, $14x-7y+15=0$ и $5x+10y-9=0$.

**273.** Относительно косоугольной системы координат с координатным углом $\omega=\frac{\pi}{3}$ дан треугольник $A(-1;\ +2)$, $B(+1;\ +1)$, $C(+2;\ -{}^5/_2)$. Вычислить угол между стороной $AB$ и медианой, проведённой из вершины $C$.

**274.** Нет ли среди прямых, заданных уравнениями: a) $3x-2y+7=0$; b) $6x-4y-9=0$; c) $6x+4y-5=0$; d) $2x+3y-6=0$; e) $x-y+8=0$; f) $x+y-12=0$ и g) $-x+y-3=0$, параллельных или перпендикулярных прямых? $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**275.** Определить координатный угол $\omega$, если известно, что уравнения $4x+3\sqrt{2}y-5=0$ и $\sqrt{2}x-y+11=0$ изображают перпендикулярные друг к другу прямые.

**276.** При каком значении параметра $a$ уравнения $3ax-8y+13=0$ и $(a+1)x-2ay-21=0$ изображают параллельные прямые?

**277.** При каком значении постоянного $a$ прямые $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$ и $(5a-2)x+(a+4)y-7=0$ окажутся перпендикулярными друг к другу? $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**278.** Через начало координат провести прямую, параллельную прямой: $2x-3y+7=0$.

Решение. Искомая прямая проходит через начало координат; поэтому её уравнение не содержит свободного члена и имеет вид: $Ax+By=0$. Искомая прямая параллельна данной; следовательно, коэффициенты в их уравнениях пропорциональны: $\frac{A}{2}=\frac{B}{-3}=\lambda$, или $A=2\lambda$ и $B=-3\lambda$. Вставляя полученные значения коэффици-

14
8
112
14
252

ентов в уравнение искомой прямой, получим $2\lambda x - 3\lambda y = 0$, или $2x - 3y = 0$. Так как геометрический смысл уравнения не меняется от умножения (или деления) всех его членов на одно и то же число, то при составлении уравнения прямой, параллельной данной, можно брать коэффициенты при координатах не только пропорциональными, но равными соответствующим коэффициентам данного уравнения.

**279.** Через начало координат провести прямую параллельно прямой $4x + y - 5 = 0$.

**280.** Через точку $M(+2; -1)$ провести прямую, параллельную прямой $4x - 7y + 12 = 0$.

**281.** Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $6x + 5y - 19 = 0$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**282.** Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(-5; +2)$ на прямую $4x - y + 3 = 0$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**283.** Из точек пересечения прямой $3x + 5y - 15 = 0$ с осями координат восставлены перпендикуляры к этой прямой. Найти их уравнения. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**284.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(x', y')$ и перпендикулярной к прямой: $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**285.** Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую $2x - 6y + 13 = 0$ при условии, что $\omega = \frac{\pi}{3}$.

**286.** Из точки $M(-1; +4)$ опустить перпендикуляр на прямую $5x - 3y + 11 = 0$, при условии, что $\omega = \frac{2\pi}{3}$.

**287.** Найти точки пересечения прямых:

a) $8x - 3y - 1 = 0$, $4x + y - 13 = 0$; b) $3x + 7y - 15 = 0$, $9x + 21y - 32 = 0$; c) $5x - 2y + 13 = 0$, $x + 3y - 11 = 0$.

Предварительно исследовать данные системы уравнений.

**288.** Даны уравнения сторон треугольника: $5x - 3y - 15 = 0$, $x + 5y - 3 = 0$ и $3x + y + 5 = 0$. Вычислить координаты его вершин.

**289.** Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, восставленных из середин сторон треугольника,

45
14
61

вершинами которого служат точки: $A(+2; +3)$, $B(0; -3)$ и $C(+5; -2)$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**290.** Даны вершины четырёхугольника: $A(-9; 0)$, $B(-3; +6)$, $C(+3; +4)$ и $D(+6; -3)$. Найти точку пересечения его диагоналей $AC$ и $BD$ и вычислить угол между ними. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**291.** Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $2x - 5y - 1 = 0$, $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей: $x + 3y - 6 = 0$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**291*.** Составить уравнения сторон ромба, зная две противолежащие его вершины $A(-3; +1)$, $B(+5; +7)$ и площадь ромба $S = 25$ кв. ед.

**292.** Найти точку, симметричную с точкой $Q(-2; -9)$ относительно прямой: $2x + 5y - 38 = 0$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**293.** Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма: $x - y - 1 = 0$; $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(+3; -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

**293*.** Вычислить площадь ромба, зная одну из его вершин $A(0; -1)$, точку пересечения диагоналей $M(+4; +4)$ и точку $(+2; 0)$ на стороне $AB$.

**294.** Даны две вершины треугольника $A(-6; +2)$, $B(+2; -2)$ и точка $H(+1; +2)$ пересечения его высот. Вычислить координаты третьей вершины $C$, зная, что $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**295.** Относительно прямоугольной системы координат дан треугольник: $A(-6; -3)$, $B(-4; +3)$, $C(+9; +2)$. На внутренней биссектрисе угла $A$ найти такую точку $M$, чтобы четырёхугольник $ABMC$ оказался трапецией.

**296.** Проверить, проходят ли через одну и ту же точку следующие три прямые:

a) $3x - y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$, $x - y + 7 = 0$;

b) $x + 3y - 1 = 0$, $5x + y - 10 = 0$, $3x - 5y - 8 = 0$;

c) $3x-y+6=0,$ $4x+3y-5=0,$ $2x-y+5=0;$ d) $5x-3y-15=0,$ $x+5y-3=0,$ $3x+y+5=0.$

**297.** Какому условию должны удовлетворять коэффициенты $a$ и $b$ для того, чтобы прямые $ax+by+1=0$, $2x-3y+5=0$ и $x-1=0$ проходили через одну и ту же точку?

**298.** Треугольник дан своими сторонами: $x+2y+3=0$; $3x-7y+9=0$; $5x-3y-11=0$. Проверить, что его высоты пересекаются в одной точке. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**299.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых: $7x-y+3=0$ и $3x+5y-4=0$ и через точку $A(+2;\ -1)$.

Решение. Всякая прямая, проходящая через точку пересечения двух данных прямых, изобразится уравнением: $7x-y+3+q(3x+5y-4)=0$. Нужно только подобрать значение параметра $q$ так, чтобы прямая прошла через точку $A(+2;\ -1)$, т. е. чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравнению прямой; вставляя их в уравнение пучка, получим: $18-3q=0$ или $q=6$. При этом значении параметра мы получим искомую прямую пучка $7x-y+3+6(3x+5y-4)=0$, или $25x+29y-21=0$.

**300.** Через точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$ и $x-3y+4=0$ провести прямую, которая, кроме того,

a) проходит через начало координат;

b) параллельна оси абсцисс;

c) параллельна оси ординат;

d) проходит через точку $(+4;\ +3)$.

**301.** Через точку пересечения прямых: $2x-5y-1=0$ и $x+4y-7=0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(+4;\ -3)$ и $B(-1;\ +2)$ в отношении $\lambda={}^2/_3$.

**302.** Не вычисляя координат вершин треугольника, написать уравнения прямых, проведённых через эти вершины параллельно противолежащим сторонам. Стороны треугольника даны уравнениями $5x-2y+6=0$, $4x-y+3=0$ и $x+3y-7=0$.

**303.** Составить уравнения высот треугольника, зная уравнения его сторон: $2x-y+3=0$, $x+5y-7=0$ и $3x-2y+6=0$.

**304.** В треугольнике $ABC$ известны: сторона $AB$: $4x+y-12=0$, высота $BH$: $5x-4y-15=0$ и высота $AH$:

$2x+2y-9=0$. Написать уравнения двух других сторон и третьей высоты. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

305. Найти уравнения прямых, принадлежащих пучку

$$(x+2y-7)+q(3x-y+5)=0$$

и перпендикулярных к каждой из основных прямых пучка. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

306. Найти прямую, которая принадлежит одновременно двум пучкам: $(x+y-1)+q(x-1)=0$ и $(2x-3y)+q'(y+1)=0$.

307. Даны стороны четырёхугольника: $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$ и $3x+y-12=0$; определить его диагонали.

## 5. Смешанные задачи на прямую

307*. Через точку $P(0;\ +1)$ провести прямую так, чтобы её отрезок, заключённый между двумя данными прямыми $x-3y+10=0$ и $2x+y-8=0$, делился в точке $P$ пополам.

308*. Найти уравнение прямой, зная, что её отрезок, заключённый между осями координат в первом квадранте, вдвое больше её расстояния от начала координат, а площадь треугольника, образованного искомой прямой с осями, равна 4,5 квадратных единиц. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

309. Прямая линия перемещается так, что отрезки, отсекаемые ею на осях координат, сохраняют постоянное отношение $a:b=q$. Найти траекторию точки, делящей в отношении $\lambda$ отрезок подвижной прямой, заключённый между осями координат.

309*. Стороны угла, данные своими уравнениями $2x-3y+1=0$ и $x+4y-5=0$, пересечены рядом параллельных прямых: $y=2x+b$. Найти геометрические места:

a) середин отрезков параллельных прямых, заключённых между сторонами угла;

b) точек, делящих в отношении $\lambda=3$ отрезки параллельных прямых, заключённых между сторонами угла.

310. Найти центр вписанного круга и центр тяжести равнобедренного треугольника, если даны уравнения боковых

сторон треугольника: $7x - y - 9 = 0$; $5x + 5y - 35 = 0$ и точка $M(3; -8)$, лежащая на его основании. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**310*.** В равнобедренном треугольнике известно уравнение основания: $x - 2y + 3 = 0$, уравнение одной из боковых сторон: $4x - y + 5 = 0$ и точка $P(+1{,}2; +5{,}6)$ на другой боковой стороне. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

a) расстояние боковой стороны от противолежащей вершины;

b) координаты центра тяжести;

c) площадь треугольника.

**311.** Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(+3; -4)$ и уравнения двух высот: $7x - 2y - 1 = 0$ и $2x - 7y - 6 = 0$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

V

**311*.** Даны две вершины треугольника $A(+2; -3)$ и $B(+5; +1)$, уравнение стороны $BC$: $x + 2y - 7 = 0$ и медианы $AM$: $5x - y - 13 = 0$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины $C$ на сторону $AB$, и вычислить её длину. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**312.** Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4; +2)$ и уравнения двух медиан: $3x - 2y + 2 = 0$ и $3x + 5y - 12 = 0$.

**312*.** Дан треугольник: $A(-4; +2)$, $B(-2; -2)$, $C(+6; +8)$. Через концы его медианы $AM$ проведены прямые $AP$ и $MP$, соответственно параллельные двум другим медианам. Проверить, что стороны треугольника $AMP$ равны по длине медианам треугольника $ABC$. Вычислить отношение площадей треугольников $ABC$ и $AMP$.

**313.** Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин: $A(+2; -4)$ и уравнения биссектрис двух его углов: $x + y - 2 = 0$ и $x - 3y - 6 = 0$. Угол $\omega = \frac{\pi}{2}$.

**313*.** В треугольнике $A(-3; -1)$, $B(+1; -5)$, $C(+9; +3)$ стороны $AB$ и $AC$ разделены в отношении $\lambda = 3$, считая от общей вершины $A$. Проверить, что прямые, соединяющие точки деления с противолежащими вершинами, и медиана $AM$ пересекаются в одной точке.

**314.** Прямые $3x+4y-30=0$ и $3x-4y+12=0$ касаются окружности, радиус которой $R=5$. Вычислить площадь четырёхугольника, образованного этими касательными и радиусами круга, проведёнными в точки касания. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**314*.** Зная вершины треугольника $A(+3;\ -2)$, $B(+1;\ +5)$ и $C(-4;\ +3)$, проверить, что высоты его пересекаются в одной точке, и вычислить площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника $ABC$. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**315.** Даны уравнения сторон треугольника: $2x-5y-2=0$, $x+y-8=0$ и $5x-2y-5=0$. Найти внутри треугольника такую точку, чтобы прямые, соединяющие её с вершинами треугольника, разбивали его на три равновеликих треугольника.

**315*.** Проверить, что точка пересечения высот треугольника лежит на одной прямой с точкой пересечения его медиан и с центром описанного круга. Взять, например, треугольник

$$A(+5;\ +8),\ B(-2;\ +9),\ C(-4;\ +5) \qquad \left[\omega=\frac{\pi}{2}\right].$$

**316.** Относительно полярной системы координат составить уравнение прямой, выбрав в качестве её параметров:

a) длину перпендикуляра $p$, опущенного из полюса на данную прямую, и угол $\alpha$ наклона этого перпендикуляра к полярной оси;

b) угол $\vartheta$ наклона прямой к полярной оси и отрезок $a$, отсекаемый прямой на оси, считая от полюса.

**316*.** Через точку $A(\rho_1,\ \varphi_1)$ проведена прямая, образующая с полярной осью угол $\vartheta$. Составить уравнение этой прямой.

**317.** Относительно полярной системы координат составить уравнение прямой, проходящей через точки $(\rho_1,\ \varphi_1)$ и $(\rho_2,\ \varphi_2)$.

**317*.** Относительно полярной системы координат составить уравнения следующих прямых:

a) прямая проходит через полюс и образует с осью угол $\frac{\pi}{3}$;

b) прямая проходит на расстоянии четырёх единиц от полюса и наклонена к полярной оси под углом $\frac{\pi}{3}$;

c) прямая проходит через точку $A\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$ и перпендикулярна к оси;

d) прямая проходит через точку $B\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$ и параллельна полярной оси;

e) прямая проходит через точку $C\left(3; \frac{\pi}{12}\right)$ и образует с осью угол $\frac{\pi}{4}$;

f) прямая проходит через точки $P\left(5; \frac{\pi}{12}\right)$ и $Q\left(8; \frac{5\pi}{12}\right)$.

ГЛАВА V

# ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

## 1. Окружность

Окружность есть геометрическое место точек, равноудалённых от одной и той же точки, называемой её центром. Если мы обозначим через $a$ и $b$ координаты центра и через $r$ — радиус окружности, т. е. расстояние любой её точки, от центра, то нормальное уравнение окружности примет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

В нормальное уравнение окружности входят три параметра: координаты центра и радиус.

Перенеся начало координат в её центр, мы получим наиболее простое уравнение окружности

$$x^2+y^2=r^2. \tag{2}$$

Общее уравнение второй степени

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \tag{3}$$

представляет окружность, если коэффициенты при квадратах координат равны между собой и если, кроме того, отсутствует член с произведением координат, т. е.

$$A=B \text{ и } C=0. \tag{4}$$

Чтобы найти точки пересечения окружности (1) и прямой $Ax+By+C=0$, надо совместно решить эти два уравнения.

[1] В настоящей главе мы будем пользоваться только прямоугольной системой координат.

Исключив из них одну из координат, например $y$, мы получим квадратное уравнение относительно абсциссы точки пересечения; если это квадратное уравнение имеет вещественные и различные корни (подкоренное количество положительное), то окружность и прямая имеют две различные точки пересечения,— прямая является секущей; если это квадратное уравнение имеет вещественные, но равные корни (подкоренное количество равно нулю), то обе точки пересечения сливаются в одну, и прямая касается окружности; если квадратное уравнение имеет мнимые корни (подкоренное количество отрицательное), то окружность и прямая не имеют действительных точек пересечения,— прямая проходит вне окружности.

Если $x_1$ и $y_1$ обозначают координаты какой-нибудь точки окружности, то касательная к окружности в этой точке имеет уравнение:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2, \tag{5}$$

или

$$xx_1+yy_1=r^2 \tag{6}$$

в зависимости от того, определяется ли окружность уравнением (1) или (2).

**318.** Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке: а) $(+2; -5)$ и радиус, равный 4; b) $(-3; +4)$ и проходящей через начало координат; c) $(0; +4)$ и проходящей через точку $(+5; -8)$.

**319.** Найти уравнение окружности, если известны координаты концов одного из её диаметров $AB$: $A(+1; +4)$ и $B(-3; +2)$.

**320.** На оси абсцисс найти центр окружности, проходящей через точки $A(+2; +3)$ и $B(+5; +2)$, и написать уравнение этой окружности.

**321.** Написать уравнение окружности, проходящей через точки $(+3; 0)$ и $(-1; +2)$, зная, что центр её лежит на прямой $x-y+2=0$.

**322.** Составить уравнение окружности, проходящей через три данные точки: $A(0; +2)$, $B(+1; +1)$ и $C(+2; -2)$.

Решение. Уравнение искомой окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ содержит три параметра $a$, $b$ и $r$, которые следует определить. Раскроем в уравнении скобки и перенесём все члены в левую часть; тогда уравнение примет вид: $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$. Так как, по условию, точки $A$, $B$ и $C$ лежат на окружности, то их координаты должны удовлетворять этому уравнению, и, произведя подстановку, мы получим три соотношения, связывающие искомые параметры:

$$\begin{aligned}4-4b+a^2+b^2-r^2&=0,\\ 2-2a-2b+a^2+b^2-r^2&=0,\\ 8-4a+4b+a^2+b^2-r^2&=0.\end{aligned}$$

Чтобы исключить $r$, вычтем из последнего уравнения сначала первое, потом — второе. Получим:

$$4-4a+8b=0,$$
$$6-2a+6b=0,$$

откуда $a=-3$; $b=-2$.

Вставляя полученные значения $a$ и $b$ в первое уравнение, определим $r^2$, а именно: $r^2=25$, и уравнение искомой окружности будет:

$$(x+3)^2+(y+2)^2=25.$$

Центр искомой окружности можно также определить как точку пересечения перпендикуляров, восставленных из середин двух хорд, например $AB$ и $AC$.

**323.** Найти уравнение окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты:

a) $(+7;\ +7)$, $(0;\ +8)$ и $(-2;\ +4)$;

b) $(0;\ +4)$, $(+1;\ +2)$ и $(+3;\ -2)$.

**324.** Как расположены точки: $A(-3;\ 0)$, $B(+5;\ 0)$, $C(+4;\ +2)$, $D(+2;\ +7)$, $E(-4;\ +6)$, $F(+3;\ -1)$, $G(-2;\ +3)$ относительно окружности $(x+1)^2+(y-2)^2=25$?

**325.** Определить центр и радиус окружности, данной уравнением:

2-го порядка

$$x^2+y^2-8x+6y+21=0.$$

Решение. Данное уравнение представляет окружность, так как отсутствует член с произведением координат и коэффициенты при квадратах координат равны между собой. Приводим это уравнение к нормальному виду $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Для этого собираем отдельно члены, содержащие абсциссу $(x^2-8x)$, и члены, содержащие ординату $(y^2+6y)$; потом дополняем их до полных квадратов, прибавив к первой группе $+16$ и ко второй $+9$, после чего будем иметь сумму двух квадратов: $(x-4)^2+(y+3)^2$. К левой части уравнения мы прибавили $16+9=25$; чтобы уравнение осталось равносильным прежнему, прибавим и к правой части 25, что вместе со свободным членом, перенесённым в правую часть, даст 4, и окончательно уравнение окружности примет вид: $(x-4)^2+(y+3)^2=4$, откуда заключаем, что центр имеет координаты $a=4$, $b=-3$ и радиус $r=2$.

Эту же задачу можно решить иначе, воспользовавшись тем, что в данном уравнении и в искомом коэффициенты должны быть пропорциональны (оба уравнения изображают одну и ту же кривую). Раскрыв скобки в нормальном уравнении и сравнивая коэффициенты, получим:

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{-2a}{-8}=\frac{-2b}{6}=\frac{a^2+b^2-r^2}{21},$$

или

$$a = \frac{8}{2} = 4; \quad b = -\frac{6}{2} = -3;$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - 21 = 4.$$

Отсюда можно сделать следующее заключение: если в общем уравнении окружности коэффициенты при квадратах координат равны единице, то координаты центра равны половинам коэффициентов при первых степенях соответствующих координат, взятых с обратным знаком, а квадрат радиуса определяется по формуле $r^2 = a^2 + b^2 - F$, где $F$ — свободный член данного уравнения окружности.

**326.** Привести к нормальному виду уравнения следующих окружностей:

a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; c) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$; d) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$.

**327.** Исследовать, какие линии изображаются уравнениями:

a) $x^2 + y^2 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$;
b) $x^2 + y^2 = -1$; d) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 14 = 0$.

**328.** Какой вид примет уравнение окружности $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$, если перенести начало координат в точку $A(-1; +3)$ или в точку $B(-4; +3)$, и как расположены эти точки относительно окружности?

**329.** Как преобразится уравнение окружности $x^2 + y^2 + 4x - 12y - 9 = 0$, если перенести начало координат в её центр?

**330.** Какие особенности можно отметить в расположении окружности относительно осей координат, если некоторые из коэффициентов её общего уравнения $A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0$ обращаются в нуль?

**331.** Найти точки пересечения каждой из окружностей:

a) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$; c) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$; d) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$

с осями координат.

**332.** Составить уравнение окружности, зная, что она касается оси $x$ в начале координат и пересекает ось $y$ в точке $A(0; +4)$.

**333.** Составить уравнение окружности, зная, что она касается оси $y$ в точке $A(0; -3)$ и имеет радиус $r=2$.

**334.** Окружность касается обеих осей координат и проходит через точку $A(+2; +9)$. Найти её уравнение.

**335.** Написать уравнение окружности, которая касается оси $x$ в точке $(+5; 0)$ и отсекает на оси $y$ хорду длиной в 10 единиц.

**336.** Найти центр окружности, радиус которой $r=50$, зная, что окружность отсекает на оси $x$ хорду длиной в 28 единиц и проходит через точку $A(0; +8)$.

**337.** Написать уравнение окружности, имеющей центр в точке $(+6; +7)$ и касающейся прямой $5x-12y-24=0$.

**338.** Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ с прямыми: a) $x-y-4=0$; b) $3x-4y+36=0$; c) $x-y-5=0$.

**339.** Как расположены прямые: a) $x-2y+5=0$; b) $5x-12y+26=0$; c) $3x-4y+30=0$; d) $x+y-17=0$ относительно окружности $x^2+y^2=36$.

**340.** Дана окружность $(x-1)^2+y^2=4$. Через точку $A(+2; -{}^1/_2)$ требуется провести такую хорду, которая делилась бы в этой точке пополам.

**341.** Написать уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $(+1; -2)$.

**342.** Дана окружность: $(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Составить уравнение её касательной в точке $(+5; +5)$.

**343.** В точке $(0; +3)$ провести касательную к окружности $x^2+y^2-2x-3y=0$.

**344.** Написать уравнения касательных, проведённых из начала координат к окружности $x^2+y^2-10x-4y+25=0$.

Решение. Способ 1. Всякая прямая, проходящая через начало координат, имеет уравнение $y=kx$; надо подобрать угловой коэффициент так, чтобы прямая $y=kx$ и данная окружность имели две слившиеся точки пересечения. Решаем совместно оба уравнения (исключаем $y$):

$$x^2+k^2x^2-10x-4kx+25=0,$$

или

$$x^2(1+k^2)-2x(5+2k)+25=0.$$

В случае касания корни этого уравнения должны быть вещественные и равные; поэтому составляем подкоренное количество и приравниваем его нулю: $(5+2k)^2-25(1+k^2)=0$; решив это уравнение, мы найдём: $k_1=0$ и $k_2=\frac{20}{21}$; уравнения искомых касательных будут: 1) $y=0$ и 2) $y=\frac{20}{21}x$, или $20x-21y=0$.

Способ 2. Уравнение данной окружности приводим к нормальному виду: $(x-5)^2+(y-2)^2=4$; тогда уравнение всякой касательной имеет вид: $(x'-5)(x-5)+(y'-2)(y-2)=4$. Координаты точки прикосновения $x'$ и $y'$ определяются из двух условий: 1) касательная проходит через начало координат, и, следовательно, координаты начала удовлетворяют уравнению касательной, т. е. $-5(x'-5)-2(y'-2)=4$, или $5x'+2y'-25=0$; 2) точка прикосновения лежит на окружности, следовательно, её координаты $(x', y')$ удовлетворяют данному уравнению круга, и мы имеем: $x'^2+y'^2-10x'-4y'+25=0$. Из этих двух уравнений определяем координаты точки прикосновения $x_1'=5$, $y_1'=0$, $x_2'=\frac{105}{29}$, $y_2'=\frac{100}{29}$ и, вставляя их в общее уравнение касательной, получим уравнения искомых прямых: $y=0$ и $20x-21y=0$.

**345.** Составить уравнения касательных, проведённых

a) из начала координат к окружности $(x-2)^2+(y-4)^2=2$;

b) из точки $(+7; +1)$ к окружности $x^2+y^2=25$.

**346.** Найти те касательные к окружности $x^2+y^2=5$, которые параллельны прямой $2x-y+1=0$.

**347.** Вокруг начала координат описана окружность радиусом $r=12$; провести к ней касательную так, чтобы отрезок этой касательной от точки прикосновения до пересечения с положительной частью оси $x$ имел длину $l=35$.

**348.** Написать уравнение окружности, проходящей через точку $(+1; +1)$ и касающейся прямых $7x+y-3=0$ и $x+7y-3=0$.

**349.** Известно, что прямая $4x-3y-38=0$ касается окружности $(x-1)^2+(y+3)^2=25$. Найти точку их прикосновения.

**350.** Под влиянием некоторой силы точка $M$ двигалась по окружности $(x-5)^2+(y+3)^2=25$. Действие силы прервалось в тот момент, когда точка $M$ совпала с точкой $A(+2; +1)$. Определить дальнейшую траекторию подвижной точки.

**351.** Точка $M$ двигалась по окружности $(x-4)^2+(y-8)^2=20$, потом сорвалась с неё, и относительно дальнейшего её свободного движения известно, что она пересекла ось $x$ в точке $(-2;\ 0)$. Определить точку окружности, с которой сорвалась движущаяся точка.

**352.** Определить угол, под которым видна окружность $x^2+y^2=16$ из точки $(+8;\ 0)$.

**352*.** Найти геометрическое место точек, из которых данная окружность $x^2+y^2=r^2$ видна под прямым углом.

**353.** Написать уравнение линии центров двух окружностей:

$$x^2+y^2-6x+8y=0 \text{ и } x^2+y^2+2x-12y+1=0.$$

1 **354.** Найти уравнение общей хорды двух окружностей:

$$x^2+y^2=10$$

и

$$x^2+y^2-10x-10y+30=0.$$

**355.** Дана окружность $x^2+y^2-4x-5=0$ и точка $C(+5;\ +4)$. Написать уравнение окружности, имеющей центр в точке $C$ и касающейся данной окружности внешним образом.

Указание. Если две окружности касаются друг друга внешним образом, то сумма их радиусов равна расстоянию между центрами.

1 **356.** Через точку $M(+2;\ +1)$ провести окружность, касающуюся окружности $x^2+y^2-8x-4y+19=0$ и имеющую радиус, равный единице.

**357.** Под каким углом пересекаются окружности $x^2+y^2=16$ и $(x-5)^2+y^2=9$?

Указание. Углом, под которым пересекаются окружности, называется угол между касательными к этим окружностям в одной из точек их пересечения.

**358.** Найти условие, при котором две окружности

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$$

и

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$$

ортогональны, т. е. пересекаются под прямым углом.

**359.** Через точку $M(+2;\ +3)$ провести окружность, ортогональную к окружности $x^2+y^2=1$ и имеющую радиус $r=3$.

**360.** Найти центры подобия следующих двух окружностей:

$$x^3+y^2-6x+2y+6=0 \quad \text{и} \quad x^2+y^2+4x+3=0.$$

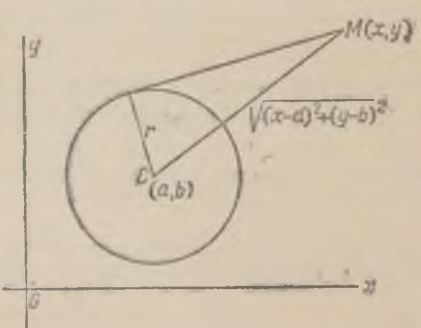
Указание. Центром подобия двух окружностей называется точка, обладающая тем свойством, что на каждой прямой, через неё проходящей, отрезки от этой точки до точек пересечения с обеими окружностями пропорциональны их радиусам. Каждая пара окружностей имеет два центра подобия: они делят отрезок между центрами этих окружностей внутренним и внешним образом в отношении, равном отношению радиусов.

**361.** Составить уравнение общих касательных двух окружностей:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1 \quad \text{и} \quad (x+2)^2+(y+1)^2=9.$$

Указание. Общие касательные двух окружностей попарно проходят через их центры подобия. (См. задачу 360.)

**362.** Найти длину касательной, проведённой из точки $M(+2;\ +6)$ к окружности $(x+3)^2+(y-2)^2=25$.




Черт. 45.

Указание. Если мы перенесём все члены нормального уравнения окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ в левую часть, то эта левая часть

$$U=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$$

и даст квадрат длины касательной, проведённой из точки $M(x,\ y)$ к данной окружности (черт. 45), или, иначе, даст степень точки $M(x,\ y)$ относительно окружности. Если точка $M(x,\ y)$ лежит на окружности, то степень её равна нулю; если $M$ лежит внутри окружности, то степень её отрицательная и касательные, проведённые из этой точки, — мнимые.

**363.** Вычислить длины касательных, проведённых к окружности $x^2+y^2-10x+2y+10=0$ из следующих точек: $M_1(0;\ -1)$, $M_2(+1;\ -1)$, $M_3(+2;\ 0)$ и $M_4(0;\ 0)$.

**364.** Найти геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что касательные, проведённые из них к окружности $(x-5)^2+(y+2)^2=9$, имеют одну и ту же длину $l=4$.

**365.** Найти геометрическое место точек, степени которых относительно двух данных окружностей $x^2+y^2-8x+6y=0$ и $x^2+y^2-10y=0$ находятся в постоянном отношении: a) $\lambda=2$; b) $\lambda={}^3/_2$; c) $\lambda=1$.

**366.** Доказать, что уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2+\lambda[(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2]=0$$

представляет пучок окружностей, проходящих через точки пересечения двух основных окружностей $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ и $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=0$, что центры всех этих окружностей лежат на одной прямой и значение параметра $\lambda$ равно отношению, в котором центр соответствующей окружности делит отрезок между центрами двух основных окружностей.

**367.** Составить уравнение радикальной оси следующих двух окружностей:

a) $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0,$
$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+a_1^2+b_1^2-r_1^2=0;$

b) $x^2+y^2-6x-4y+9=0,$
$x^2+y^2-2x+10y+25=0;$

c) $x^2+(y-1)^2=5$ и $(x+2)^2+(y+1)^2=4.$

Указание. Радикальная ось двух окружностей есть геометрическое место точек, имеющих одинаковую степень относительно этих окружностей. (См. задачу 362.)

**368.** Доказать, что радикальная ось двух окружностей проходит через точки их пересечения, перпендикулярна к линии центров и служит геометрическим местом центров окружностей, ортогональных к двум данным окружностям.

**369.** Через точку $(-3;+1)$ провести окружность, имеющую одну и ту же радикальную ось с двумя данными окружностями: $(x-5)^2+y^2=5$ и $x^2+(y-10)^2=130$.

Указание. Искомая окружность принадлежит пучку, определяемому двумя данными окружностями. (См. задачу 366.)

**370.** Через точку $(+5; -4)$ провести окружность, ортогональную к двум окружностям, заданным уравнениями: $(x-3)^2+y^2=24$ и $x^2+(y+1)^2=16$.

**371.** Найти радикальный центр трёх окружностей: $x^2+y^2-6x+8y=0$, $x^2+y^2-2x-8=0$ и $x^2+y^2+6y+8=0$.

Указание. Радикальным центром трёх окружностей называется точка пересечения радикальных осей этих окружностей, взятых попарно.

**372.** Написать уравнение окружности, ортогональной к трём следующим окружностям $x^2+y^2+x-y-2=0$, $x^2+y^2+2x-3=0$ и $x^2+y^2+3x-1=0$.

**373.** Дана окружность, радиус которой $r=a$. Через одну из её точек $P$ проведены все возможные хорды. Найти геометрическое место точек, делящих эти хорды в одном и том же отношении $\lambda$.

**374.** Стержень скользит по плоскости так, что конец его $Q$ описывает окружность радиуса $a$; сам же он всё время проходит через неподвижную точку $P$, не лежащую на окружности. Найти геометрическое место точек, делящих пополам отрезки стержня между точкой $P$ и концом стержня $Q$.

## 2. Эллипс

Эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух постоянных точек — фокусов эллипса — есть величина постоянная, равная $2a$. Расстояние между фокусами $F_2F_1=2c$ (черт. 46). Простейшее уравнение эллипса мы получим, выбрав прямую, соединяющую фокусы, за ось абсцисс и поместив начало координат в середине между ними. Тогда уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{7}$$

где

$$b^2=a^2-c^2. \tag{8}$$

При таком выборе системы координат оси координат совпадают с осями симметрии эллипса, а начало координат — с центром симметрии[1]).

Точки пересечения эллипса с его осями ($A_1$ и $A_2$, $B_1$ и $B_2$) называются **вершинами** эллипса.

---

[1]) В дальнейшем будем говорить просто: оси и центр эллипса.

Отрезки, заключённые между вершинами, называются **осями** эллипса: большая (фокальная) ось $A_2A_1 = 2a$ и малая ось $B_2B_1 = 2b$.

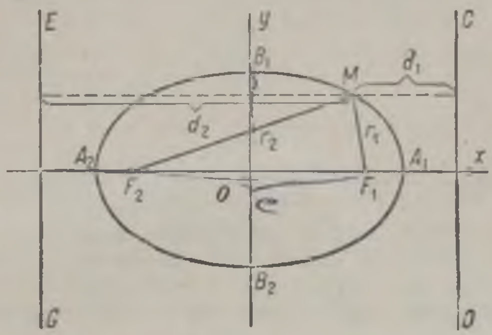
Таким образом, параметры $a$ и $b$, входящие в уравнение эллипса (7), равны его полуосям.

**Эксцентриситетом** ($e$) эллипса называется отношение расстояния ($2c$) между фокусами к большой оси ($2a$), т. е.

$$e = \frac{c}{a}; \tag{9}$$

очевидно, что

$$e < 1. \tag{10}$$




Черт. 46.

Расстояния точки до фокусов называются её **фокальными радиусами-векторами** ($r_1$ и $r_2$). Для любой точки $M(x, y)$ эллипса мы имеем:

$$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex, \tag{11}$$

и по самому определению эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a, \tag{12}$$

т. е. сумма фокальных радиусов-векторов любой точки эллипса равна его большой оси.

**Директрисами** эллипса называются две прямые, параллельные малой оси и отстоящие от неё на расстоянии, равном $\frac{a}{e}$ (на черт. 46 прямые $CD$ и $EG$). Уравнения директрис следующие:

$$x = \frac{a}{e} \text{ и } x = -\frac{a}{e}. \tag{13}$$

Отношение расстояния любой точки эллипса до фокуса ($r_1$ или $r_2$) к расстоянию той же точки до соответствующей[1]) директрисы ($d_1$ или $d_2$) равно эксцентриситету:

$$\frac{r_1}{d_1} = e \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{14}$$

Таким образом, эллипс может быть определён как геометрическое место точек, отношение расстояний которых от данной точки и данной прямой есть величина постоянная, меньшая единицы.

[1]) Соответствующими друг другу называются тот фокус и та директриса, которые расположены по одну сторону от малой оси.

Эллипс имеет со всякой прямой две точки пересечения (действительные, мнимые или сливающиеся).

Если прямая встречает эллипс в двух слившихся точках, то она называется касательной к эллипсу.

Уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

в точке $M(x_1, y_1)$ имеет вид

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1. \tag{15}$$

Из всякой точки можно провести к эллипсу две касательные. Если точка лежит вне эллипса, обе касательные действительные; если точка лежит на эллипсе, касательные сливаются; если точка лежит внутри эллипса, обе касательные мнимые.

**375.** Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что:

a) полуоси его соответственно равны 4 и 2;

b) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;

c) большая полуось равна 10 и эксцентриситет $e=0{,}8$;

d) малая полуось равна 3 и эксцентриситет $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

e) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами тоже равно 8.

**376.** Дано уравнение эллипса: $25x^2+169y^2=4225$. Вычислить длину его осей, координаты фокусов и эксцентриситет.

**377.** Расстояния одного из фокусов эллипса до концов его большой оси соответственно равны 7 и 1. Составить уравнение этого эллипса.

**378.** Дан эллипс своим уравнением: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Построить его фокусы, не вычисляя их координат.

**379.** Сторона ромба равна 5 и высота 4,8. Через две противолежащие его вершины проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Составить уравнение эллипса, приняв диагонали ромба за оси координат.

**380.** Вершина треугольника, имеющего неподвижное основание, перемещается так, что периметр треугольника сохраняет постоянную величину. Найти траекторию вершины при условии, что основание равно 24 *см*, а периметр равен 50 *см*.

381. Построить эллипс, пользуясь его определением.

Указание. Точки эллипса служат вершинами треугольников, имеющих общее основание (расстояние между фокусами, равное $2c$) и данную сумму двух других сторон ($2a$).

382. Составить уравнение директрис эллипса, зная, что директрисы перпендикулярны к фокальной оси и пересекают её в точках, которые являются четвёртыми гармоническими к фокусам относительно вершин.

383. Дан эллипс: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Написать уравнения его директрис.

384. Прямые $x=\pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.

385. Определить эксцентриситет эллипса, зная, что

a) малая ось его видна из фокуса под прямым углом;

b) расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами малой и большой осей;

c) расстояние между директрисами в четыре раза больше расстояния между фокусами.

386. Меридиан земного шара имеет форму эллипса, отношение осей которого равно $^{299}/_{300}$. Определить эксцентриситет земного меридиана.

387. На эллипсе $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ найти точку, отстоящую на расстоянии пяти единиц от его малой оси.

388. Эллипс проходит через точки $M(+\sqrt{3};\ -2)$ и $N(-2\sqrt{3};\ +1)$. Составить уравнение эллипса, приняв его оси за оси координат.

389. Доказать, что для всякой точки $P(x_1, y_1)$, лежащей внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, имеет место неравенство $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$, а для всякой внешней точки $Q(x_2, y_2)$ — неравенство $\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}>1$.

**390.** Определить положение точек: $A(+6; -3)$, $B(-2; +5)$, $C(+3; -6)$, $D(+\sqrt{50}; 0)$, $E(-4; 2\sqrt{6})$ и $G(+1; +\sqrt{26})$ относительно эллипса $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$.

**391.** В эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной большой оси. Найти координаты двух других вершин треугольника.

**392.** На эллипсе $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния её от левого фокуса.

**393.** На эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ найти точку, для которой произведение фокальных радиусов-векторов равно квадрату малой полуоси.

**394.** На эллипсе, один из фокусов которого имеет координаты $(+3; 0)$, взята точка $M(+4; +2{,}4)$. Найти расстояние этой точки до соответствующей директрисы, зная, что центр эллипса совпадает с началом координат.

**395.** Найти точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ с прямой $2x-y-9=0$.

**396.** Через фокус $F(c, 0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ проведена хорда, перпендикулярная к большой оси. Найти длину этой хорды.

**397.** Дан эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Найти длину его диаметра[1]), направленного по биссектрисе координатного угла.

**398.** В эллипс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

**399.** Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

---

[1]) Диаметром эллипса называется всякая хорда, проходящая через его центр.

**400.** Дан эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Через точку $(+1;\ +1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

**401.** Написать уравнение прямой, касающейся эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ в точке $(+2;\ -3)$.

**402.** Составить уравнения касательных, проведённых из точки $A\ (-6;\ +3)$ к эллипсу $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$.

**403.** Найти те касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, которые параллельны прямой $2x-y+17=0$.

**404.** Провести к эллипсу $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ касательные, перпендикулярные к прямой $13x+12y-115=0$.

**405.** Известно, что прямая $4x-5y-40=0$ касается эллипса $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$. Найти точку их прикосновения.

**406.** Найти уравнения тех касательных эллипса $3x^2+8y^2=45$, расстояние которых от центра эллипса равно 3.

**407.** Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проведённые в концах одного и того же диаметра, параллельны между собой; и обратно, если две касательные к эллипсу параллельны, то точки касания лежат на одном и том же диаметре.

**408.** Найти уравнения сторон квадрата, описанного около эллипса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

**409.** Найти уравнение той касательной эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, отношение расстояний которой от двух фокусов равно 9.

**410.** Доказать, что произведение расстояний любой касательной эллипса от двух его фокусов есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

**411.** Вывести условие, при котором прямая $Ax+By+C=0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**412.** Эллипс проходит через точку $P\ (+3;\ +{}^{12}/_{5})$ и касается прямой $4x+5y=25$. Написать уравнение этого эллипса и найти точку, в которой он касается данной прямой. Оси координат совпадают с осями эллипса.

413. Эллипс касается двух прямых: $x+y=5$ и $x-4y=10$. Найти уравнение этого эллипса при условии, что оси его совпадают с осями координат.

414. Найти общие касательные к следующим двум эллипсам:

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1.$$

415. Составить уравнения общих касательных двух эллипсов:

$$\frac{x^2}{6}+y^2=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

416. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ отсекают на двух касательных, проведённых в концах большой оси, отрезки, произведение которых есть величина постоянная, равная $b^2$.

417. Доказать, что отрезки касательных к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, заключённые между касательными, проведёнными в вершинах большой оси, видны из фокусов под прямым углом.

418. Найти геометрическое место точек, из которых эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ виден под прямым углом.

419. Доказать, что всякая касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами-векторами точки прикосновения.

420. Эллипс с полуосями $a$ и $b$ перемещён так, что центр его совпал с точкой $C(x', y')$, а оси остались параллельными осям координат. Какое уравнение изображает эллипс в этом новом положении?

Указание. Нового положения эллипса относительно осей можно достигнуть при неподвижном эллипсе параллельным перемещением осей координат с переносом начала в точку $(-x', -y')$.

421. Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр его находится в точке $(+5; 0)$. Составить уравнение эллипса, зная, что эксцентриситет его $e=0{,}8$.

**422.** Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(+7; 0)$ и оси ординат в точке $B(0; +4)$. Составить уравнение эллипса, если известно, что оси его параллельны осям координат.

**423.** Эллипс касается оси $y$ в точке $(0; +3)$ и пересекает ось $x$ в точках $(+3; 0)$ и $(+7; 0)$. Каково уравнение эллипса, если оси его параллельны осям координат?

**424.** Подвижная точка $P$ описывает окружность $x^2+y^2=r^2$. Какова будет траектория другой подвижной точки $M$, которая делит ординату точки $P$ в постоянном отношении $\lambda$?

**425.** В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписан треугольник $A_1MA_2$, одна из сторон которого $A_1A_2$ совпадает с большой осью. Вершина $M$ движется по эллипсу. Определить траекторию, которую при этом опишет центр тяжести треугольника $A_1MA_2$.

**426.** Вокруг начала координат вращается стержень $OP=p$ с угловой скоростью $\omega$, а вокруг $P$ вращается второй стержень $PQ=q$ с угловой скоростью $-\omega$. Найти траекторию точки $Q$, зная, что в начальный момент оба стержня совпадали с осью $x$-ов и точка $P$ находилась между $O$ и $Q$. Разобрать случаи, когда $p>q$, $p<q$ и $p=q$.

**427.** Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Взять на отрезке любую точку $M$ и найти путь, который она описывает при этом скольжении.

**428.** При условиях предыдущей задачи взять точку $M$ не на самом отрезке, а на его продолжении и найти траекторию этой новой точки $M$.

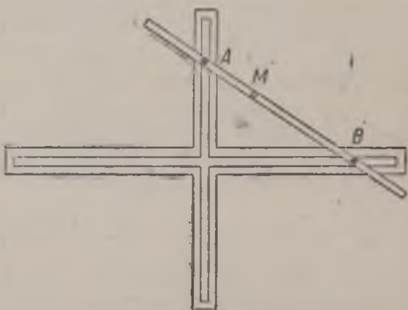
**429.** На черт. 47 изображён эллиптический циркуль, у которого с помощью винтов можно менять длину $l$ скользящей линейки $AB$ и место прикрепления карандаша $M$. Как установить циркуль, чтобы начертить эллипсы:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

b) $\frac{x^2}{16}+y^2=1$;

c) $x^2+y^2=25$?

**430.** Даны координаты вершин треугольника $ABC$: $(0;\ 0)$, $(+2;\ +2)$ и $(-2;\ +2)$. Точка $M$ движется так, что сумма квадратов её расстояний от трёх сторон треугольника остаётся всё время постоянной, равной 16. Найти траекторию точки $M$.



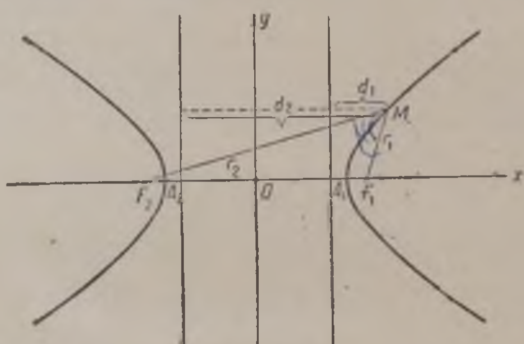

Черт. 47.

**431.** Найти геометрическое место середин хорд, проведённых из конца малой полуоси эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**432.** Определить геометрическое место центров окружностей, которые проходят через точку $A(+3;\ 0)$ и касаются круга $x^2+y^2=25$. (Сделать чертёж.)

### 3. Гипербола

Гипербола есть геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух постоянных точек — фокусов гиперболы — есть величина постоянная, равная $2a$.




Черт. 48.

Расстояние между фокусами $F_2F_1=2c$ (черт. 48).

Простейшее уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{16}$$

где

$$b^2=c^2-a^2. \tag{17}$$

Прямая, соединяющая фокусы гиперболы, служит осью абсцисс, и начало координат выбрано в середине между фокусами; при этом оси координат совпадают с осями симметрии гиперболы и начало координат — с её центром симметрии (о с и и ц е н т р гиперболы).

Гипербола имеет две действительные в е р ш и н ы ($A_1$ и $A_2$) на фокальной оси; отрезок, заключённый между ними, $A_2A_1=2a$, называется д е й с т в и т е л ь н о й (вещественной) о с ь ю гиперболы. Со второй осью гипербола пересекается в двух мнимых точках $(0; \pm ib)$; но, условно, действительный отрезок $2b$ называется м н и м о й о с ь ю гиперболы. Таким образом, параметры $a$ и $b$, входящие в уравнение гиперболы (16), дают длину действительной и мнимой полуосей гиперболы. Для гиперболы возможны все три случая: $a>b$, $a=b$ и $a<b$.

Если $a=b$, гипербола называется р а в н о с т о р о н н е й.

Если мнимая ось гиперболы имеет длину $2a$ и направлена по оси $x$, а действительная ось, длиной $2b$, совпадает с осью $y$, то уравнение такой гиперболы будет:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{18}$$

Гиперболы (16) и (18) называются с о п р я ж ё н н ы м и г и п е р б о л а м и.

Э к с ц е н т р и с и т е т о м гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси:

$$e=\frac{c}{a}, \qquad e=\frac{c}{a}; \tag{19}$$

и при этом

$$e>1. \qquad e>1: \tag{20}$$

Гипербола (16) состоит из двух ветвей (правой и левой), простирающихся в бесконечность.

Для точек правой ветви фокальные радиусы-векторы вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} r_1&=ex-a,\\ r_2&=ex+a; \end{aligned}\right\} \qquad \begin{cases} r_1=ex-a.\\ r_2=ex+a \end{cases} \tag{21}$$

$$r_2-r_1=2a. \qquad r_2-r_1=2a \tag{22}$$

Для точек левой ветви мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -ex + a, \\ r_2 &= -ex - a; \end{aligned}\right\} \tag{21'}$$

$$r_1 - r_2 = 2a. \tag{22'}$$

Таким образом, разность фокальных радиусов-векторов любой точки гиперболы равна действительной оси.

**Директрисами** гиперболы называются прямые, перпендикулярные к фокальной оси и отстоящие от центра на расстоянии $\frac{a}{e}$.

Их уравнения:

$$x = \frac{a}{e}; \quad x = -\frac{a}{e}. \tag{23}$$

Отношение расстояния любой точки гиперболы от фокуса к расстоянию той же точки от соответствующей директрисы равно эксцентриситету гиперболы:

$$\frac{r_1}{d_1} = e; \quad \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{24}$$

Таким образом, геометрическое место точек, отношение расстояний которых от данной точки и данной прямой постоянно, есть гипербола, если только это постоянное отношение больше единицы. Если точка, двигаясь по гиперболе, неограниченно удаляется, то расстояние её от одной из **асимптот** (25) стремится к нулю.

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{b}{a}x; \\ y &= -\frac{b}{a}x. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Асимптоты служат диагоналями прямоугольника, центр которого совпадает с центром гиперболы, а стороны равны и параллельны осям гиперболы (черт. 49).

Прямая линия имеет с гиперболой вообще две общие точки (действительные, мнимые или сливающиеся), координаты которых мы получим, решая совместно уравнение гиперболы и уравнение прямой. Но если прямая параллельна одной из асимптот, то она имеет только одну точку пересечения с гиперболой, так как, исключая одну из текущих координат из уравнения этой прямой и уравнения гиперболы, мы получим уравнение только первой степени для определения другой координаты (старшие члены уничтожаются). Если же прямая совпадает с одной из асимптот, то она совсем не имеет общих точек с гиперболой, так как уравнения гиперболы и её асимптоты представляют систему несовместную.

Каждая асимптота совпадает с предельным положением одной из касательных к гиперболе, когда точка прикосновения неограниченно удаляется по гиперболе.

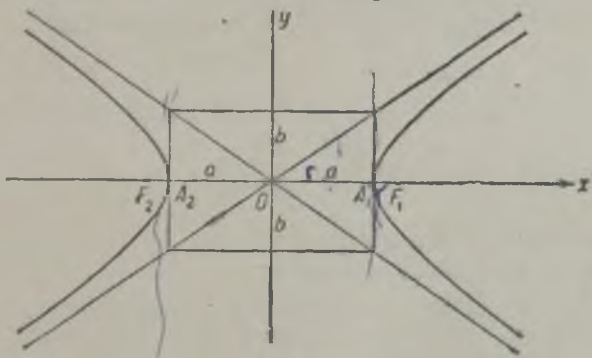
Касательная к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{16}$$

в точке $(x_1, y_1)$ имеет уравнение:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1. \tag{26}$$

Из каждой точки плоскости можно провести две касательные к гиперболе; если точка взята на гиперболе, то обе касательные




Черт. 49.

сливаются в одну; точки, из которых можно провести две действительные и разные касательные, составляют **в н е ш н ю ю** область гиперболы; точки, из которых можно провести только мнимые касательные, составляют **в н у т р е н н ю ю** область гиперболы.

**433.** Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, зная, что

a) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами 10;

b) вещественная полуось равна 5 и вершины делят расстояния между центром и фокусами пополам;

c) вещественная ось равна 6 и гипербола проходит через точку $(+9; -4)$;

d) гипербола проходит через две точки $P(-5; +2)$ и $Q(+2\sqrt{5}; +\sqrt{2})$.

**434.** Составить уравнение гиперболы, зная фокусы $F_1(+10;\ 0)$, $F_2(-10;\ 0)$ и одну из точек гиперболы $M(+12;\ +3\sqrt{5})$.

**435.** Построить гиперболу, основываясь на её определении.

Указание. Гипербола есть геометрическое место вершин треугольников, имеющих общее основание ($2c$) и постоянную разность двух других сторон ($2a$).

**436.** Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ при условии, что эксцентриситет её $e=1,25$.

**437.** Написать уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$, и имеющей фокусы в вершинах этого эллипса.

**438.** Построить фокусы и асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$.

**439.** Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Требуется:

a) вычислить координаты фокусов;

b) вычислить эксцентриситет;

c) написать уравнения асимптот и директрис;

d) написать уравнение сопряжённой гиперболы и вычислить её эксцентриситет.

**439*.** Зная уравнения асимптот гиперболы $y=\pm\frac{1}{2}x$ и одну из её точек $M(+12;\ +3\sqrt{3})$, составить уравнение гиперболы.

**440.** Доказать, что отрезки, отсекаемые директрисами на асимптотах (считая от центра гиперболы), равны действительной полуоси. Пользуясь этим свойством, построить директрисы гиперболы.

**440*.** Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Вычислить длину этого перпендикуляра.

**441.** Вычислить полуоси гиперболы, зная, что

a) расстояние между фокусами равно 8 и расстояние между директрисами равно 6;

b) директрисы даны уравнениями $x = \pm 3\sqrt{2}$ и угол между асимптотами — прямой;

c) асимптоты даны уравнениями $y = \pm 2x$ и фокусы находятся на расстоянии 5 от центра;

d) асимптоты даны уравнениями $y = \pm {}^5/_3\, x$ и гипербола проходит через точку $N(+6;\ +9)$.

**442.** Написать уравнения двух сопряжённых гипербол, зная, что расстояние между директрисами первой из них равно 7,2 и расстояние между директрисами второй равно 12,8.

**442*.** Составить уравнение гиперболы, оси симметрии которой совпадают с осями координат, если дана точка пересечения $P(+3{,}2;\ +2{,}4)$ одной из асимптот с одной из директрис этой гиперболы.

**443.** Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой:

a) эксцентриситет $e = 2$;

b) расстояние между фокусами вдвое больше расстояния между директрисами.

**444.** Вычислить эксцентриситет гиперболы при условии что

a) угол между асимптотами равен $60°$;

b) угол между асимптотами равен $90°$;

c) действительная ось гиперболы видна из фокуса сопряжённой гиперболы под углом в $60°$.

**445.** Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти софокусную гиперболу, проходящую через точку $M(-5;\ +3)$.

**446.** На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ взята точка, абсцисса которой равна 10 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиусы-векторы этой точки и угол между ними.

**447.** На гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти точку, для которой:

a) фокальные радиусы-векторы перпендикулярны друг к другу;

b) расстояние от левого фокуса вдвое больше, чем от правого.

**448.** Какому условию должен удовлетворять эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ для того, чтобы на её правой ветви существовала точка, одинаково удалённая от правого фокуса и от левой директрисы?

**449.** Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до двух асимптот есть величина постоянная.

**450.** На гиперболе $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ найти точку, которая была бы в три раза ближе от одной асимптоты, чем от другой.

**451.** Найти точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{36}=1$ со следующими прямыми:

a) $x-5y=0$; c) $x-y+5=0$;

b) $2x+y-18=0$; d) $\sqrt{10}\,x-5y+15=0$.

**452.** Через точку $(+2;\ -5)$ провести прямые, параллельные асимптотам гиперболы $x^2-4y^2=4$.

**452*.** Дана гипербола $9x^2-16y^2=576$. Найти уравнение того диаметра, длина которого равна 20.

**453.** Через точку $A(+3;\ -1)$ провести хорду гиперболы $\frac{x^2}{4}-y^2=1$, делящуюся пополам в этой точке.

**453*.** Доказать, что геометрическое место середин параллельных хорд гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ есть диаметр.

**454.** Проверить, что оси гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ являются единственными диаметрами, перпендикулярными к тем хордам, которые они делят пополам.

**454*.** Доказать, что стороны любого прямоугольника, вписанного в гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, параллельны её осям.

**455.** Найти вершины квадрата, вписанного в гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, и исследовать, в какие гиперболы возможно вписать квадрат.

**456.** Написать уравнение прямой, касающейся гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ в точке $(+5;\ -4)$.

**457.** Провести касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ через каждую из следующих точек:

$$(+2;\ 0),\ (-4;\ +3)\ \text{и}\ (+5;\ -1).$$

**458.** К данной гиперболе $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ провести касательную:

a) параллельно прямой $x+y-7=0$;
b) параллельно прямой $x-2y=0$;
c) перпендикулярно той же прямой $x-2y=0$.

**459.** Можно ли к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ провести касательные любого направления и если нет, то какое ограничение наложено на угловые коэффициенты касательных к этой гиперболе?

**460.** На гиперболе $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ найти точки, касательные в которых наклонены к оси абсцисс под углом $\frac{\pi}{3}$.

**461.** К гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ провести такую касательную, которая находилась бы на одинаковом расстоянии от центра и от правого фокуса.

**462.** Гипербола касается прямой $x-y-2=0$ в точке $M(+4;\ +2)$. Составить уравнение этой гиперболы.

**463.** Найти условие, при котором прямая $Ax+By+C=0$ касается гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

**464.** Составить уравнение гиперболы, зная уравнения её асимптот $y=\pm{}^1/_2\,x$ и уравнение одной из её касательных: $5x-6y-8=0$.

**465.** Прямой угол перемещается так, что стороны его всё время касаются гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Найти траекторию его вершины.

**466.** Из точек пересечения директрис гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ с её действительной осью проведены касательные к гиперболе. Найти их уравнения и определить координаты точек прикосновения.

**467.** Доказать, что если эллипс и гипербола имеют общие фокусы, то они пересекаются под прямым углом, т. е. касательные, проведённые к обеим кривым в точке их пересечения, перпендикулярны друг к другу.

**468.** Доказать, что произведение расстояний любой касательной к гиперболе от двух её фокусов есть величина постоянная.

**469.** Доказать, что отрезок любой касательной гиперболы, заключённый между асимптотами, делится в точке прикосновения пополам.

**470.** Доказать, что касательные к гиперболе образуют с асимптотами равновеликие треугольники.

**470*.** Прямая линия перемещается так, что площадь треугольника, образованного ею с осями координат, сохраняет постоянную величину $S$. Найти геометрическое место точек, делящих отрезок этой прямой, заключённый между осями, в данном отношении $\lambda$.

**471.** Найти уравнение гиперболы, зная, что оси её соответственно равны $2a$ и $2b$, что центр её помещён в точку $(x_1, y_1)$ и действительная ось параллельна оси абсцисс.

**472.** Привести к простейшему виду уравнения гипербол:

a) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$;

b) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$;

c) $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$.

Определить положение их центров и величину осей.

**473.** Центр гиперболы помещён в точку $(-15;\ 0)$, один из фокусов совпадает с началом координат. Найти уравнение гиперболы, если, кроме того, известно, что она отсекает от оси ординат хорду, длина которой равна 32.

**474.** Через вершину $A\,(a;\ 0)$ гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ проведены все возможные хорды. Найти геометрическое место их середин.

**475.** Найти геометрическое место середин фокальных радиусов-векторов, проведённых из правого фокуса ко всем точкам гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**476.** Два стержня, вращаясь в противоположных направлениях около двух неподвижных точек $A$ и $B$, образуют всё время с прямой $AB$ углы, дополняющие друг друга до прямого угла. Найти геометрическое место точек пересечения стержней.

**477.** Найти геометрическое место точек пересечения перпендикуляров, опущенных из фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ на касательные, с прямыми, соединяющими центр с соответствующими точками прикосновения.

**478.** Найти геометрическое место центров кругов, отсекающих на двух перпендикулярных прямых отрезки данной длины ($2a$ и $2b$).

**479.** Доказать, что геометрическое место центров кругов, касающихся внешним образом данной окружности и проходящих через одну и ту же точку, есть гипербола.

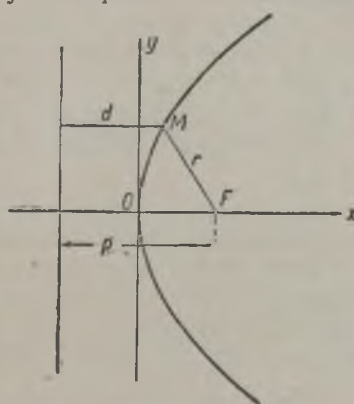
## 4. Парабола

Парабола есть геометрическое место точек, равноудалённых от постоянной точки — фокуса параболы — и постоянной прямой — директрисы параболы.

Если за ось абсцисс принять перпендикуляр, опущенный из фокуса на директрису, а начало координат поместить посредине между фокусом и директрисой (черт. 50), то уравнение параболы будет:

$$y^2=2px, \tag{27}$$

где параметр $p$ есть расстояние фокуса от директрисы. Парабола имеет одну ось симметрии, которая совпадает, при таком выборе системы координат, с осью $x$. Единственная вершина параболы совпадает с началом координат; второй точки пересечения параболы с её осью симметрии нет,



Черт. 50.

так как результат исключения ординаты из уравнений параболы и её оси выразится уравнением первой степени. Всякая прямая, параллельная оси $x$, встречает параболу также только в одной точке. Прямые любого другого направления пересекают параболу в двух точках (действительных или мнимых).

Фокальный радиус-вектор любой точки параболы равен

$$r=x+\frac{p}{2}; \tag{28}$$

согласно определению параболы,

$$\frac{r}{d}=1, \tag{29}$$

где $d$ обозначает расстояние точки параболы от директрисы.

Касательная к параболе

$$y^2=2px \tag{27}$$

в точке $(x_1, y_1)$ изображается уравнением:

$$yy_1=p(x+x_1). \tag{30}$$

**480.** Составить уравнение параболы, зная, что

a) расстояние фокуса от вершины равно 3;

b) фокус имеет координаты $(+5; 0)$, а ось ординат служит директрисой;

c) парабола симметрична относительно оси $x$, проходит через начало координат и через точку $M(+1; -4)$;

d) парабола симметрична относительно оси $y$, фокус помещается в точке $(0; +2)$ и вершина совпадает с началом координат;

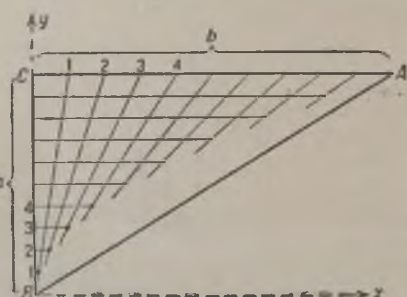
e) парабола симметрична относительно оси $y$, проходит через начало координат и через точку $M(+6; -2)$.

**481.** На параболе $y^2=8x$ найти точку, фокальный радиус-вектор которой равен 20.

**482.** На параболе $y^2=4,5x$ взята точка $M(x, y)$, находящаяся от директрисы на расстоянии

$$d=9,125.$$

Вычислить расстояние этой точки от вершины параболы.




Черт. 51.

**483.** Построить параболу, пользуясь её определением.

**484.** Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами $a$ и $b$. Оба катета разделены на одинаковое число частей; через точки деления катета $a$ (черт. 51) проведены прямые, параллельные катету $b$, а точки деления катета $b$ соединены прямыми линиями с вершиной противолежащего угла. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, проведённых из тех точек деления катетов, которые имеют одинаковые номера, если нумерация на катете $a$ начинается от вершины острого угла, а на $b$ — от вершины прямого угла.

**485.** Каким треугольником можно воспользоваться, чтобы, согласно предыдущей задаче, построить параболу $y^2 = 5x$, и как дополнить это построение, чтобы получить точки параболы вне треугольника?

**486.** Найти признак, по которому можно было бы судить о расположении точек, данных своими координатами, относительно параболы $y^2 = 2px$.

**487.** Вычислить длину сторон правильного треугольника, вписанного в параболу $y^2 = 2px$.

**488.** Найти точки пересечения параболы $y^2 = 18x$ со следующими прямыми:

a) $6x + y - 6 = 0$;
b) $9x - 2y + 2 = 0$;
c) $4x - y + 5 = 0$;
d) $y - 3 = 0$.

**489.** Найти точки пересечения параболы $y^2 = 12x$ с эллипсом

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

**490.** Составить уравнение общей хорды параболы $y^2 = 18x$ и круга $(x + 6)^2 + y^2 = 100$.

**491.** Через фокус параболы $y^2 = 2px$ проведена хорда, перпендикулярная к её оси. Определить длину этой хорды.

**491*.** Составить уравнения сторон треугольника, вписанного в параболу $y^2 = 8x$, зная, что одна из его вершин совпадает с вершиной параболы, а точка пересечения высот совпадает с фокусом параболы.

**492.** Через точку $A(+2; +1)$ провести такую хорду параболы $y^2 = 4x$, которая делилась бы в данной точке пополам.

**493.** Через точку $P(+5; -7)$ провести касательную к параболе $y^2 = 8x$.

**494.** Дана парабола $y^2 = 4x$ и касательная к ней $x + 3y + 9 = 0$. Найти точку их прикосновения.

**495.** Доказать, что любая касательная параболы $y^2 = 2px$ отсекает на отрицательной части оси $x$ отрезок, равный абсциссе точки прикосновения, а на оси $y$ — отрезок, равный половине ординаты точки прикосновения.

**496.** Дана парабола $y^2 = 12x$. Провести к ней касательную,

a) в точке с абсциссой $x = 3$;

b) параллельно прямой $3x - y + 5 = 0$;

c) перпендикулярно к прямой $2x + y - 7 = 0$;

d) образующую с прямой $4x - 2y + 9 = 0$ угол $\frac{\pi}{4}$.

**497.** Найти условие, при котором прямая $y = kx + b$ касается параболы $y^2 = 2px$.

**498.** Найти кратчайшее расстояние параболы $y^2 = 64x$ от прямой $4x + 3y + 46 = 0$.

**499.** Вычислить параметр параболы $y^2 = 2px$, если известно, что она касается прямой $x - 2y + 5 = 0$.

**500.** Найти общие касательные эллипса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ и параболы $y^2 = {}^{20}/_{3}x$.

**500*.** На параболе $y^2 = 12x$ взяты три точки, ординаты которых $y_1 = 6$, $y_2 = 2$ и $y_3 = -3$. Вычислить отношение площадей двух треугольников: треугольника с вершинами в указанных точках и треугольника, образованного касательными в этих точках.

**501.** Доказать, что любая касательная параболы пересекает директрису и фокальную хорду, перпендикулярную к оси, в точках, равноудалённых от фокуса.

**502.** Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на её касательные, есть касательная к вершине параболы.

**503.** Прямой угол скользит так, что стороны его всё время касаются параболы $y^2 = 2px$. Определить траекторию его вершины.

**503*.** Проверить, что фокус параболы и точки прикосновения двух касательных к параболе, проведённых из любой точки директрисы, лежат на одной прямой.

**504.** Составить уравнение параболы, зная, что вершина её имеет координаты $(a, b)$, параметр равен $p$ и направление оси симметрии совпадает:

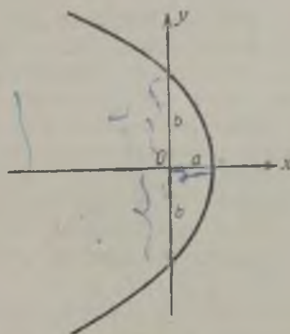
a) с положительным направлением оси $x$;
b) с отрицательным направлением оси $x$;
c) с положительным направлением оси $y$;
d) с отрицательным направлением оси $y$.

**505.** Какими особенностями должно обладать уравнение второй степени $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, чтобы соответствующая кривая была парабола

a) с осью, параллельной оси $x$;
b) с осью, параллельной оси $y$?

**506.** Определить координаты вершины параболы, величину параметра и направление оси; если парабола дана одним из следующих уравнений:

a) $y^2-10x-2y-19=0$;
b) $y^2-6x+14y+49=0$;
c) $y^2+8x-16=0$;
d) $x^2-6x-4y+29=0$;
e) $y=Ax^2+Bx+C$;
f) $y=x^2-8x+15$;
g) $y=x^2+6x$.



Черт. 52.

**507.** Доказать, что параболы, имеющие общий фокус и совпадающие, но противоположно направленные оси, пересекаются под прямым углом.

**508.** Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси $x$ и отсекающей на этой оси отрезок $+a$ и на оси ординат отрезки $\pm b$ (черт. 52).

**509.** Парабола симметрична относительно оси $x$, вершина её помещается в точке $(-5;\ 0)$ и на оси ординат она отсекает хорду, длина которой $l=12$. Написать уравнение этой параболы.

**510.** Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси $y$, отсекающей на оси абсцисс отрезки $\pm a$ и на оси ординат отрезок, равный $+b$.

**511.** Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролёт арки равен 24 *м*, а высота 6 *м*.

**512.** Камень, брошенный под острым углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 *м* от начального положения. Определить параметр параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 *м*.

**513.** Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой $p=0{,}1$. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстоянии двух метров от места выхода.

**514.** Найти геометрическое место середин ординат параболы $y^2=2px$.

**515.** Найти геометрическое место середин хорд параболы, проходящих через её фокус.

**516.** Прямой угол вращается около своей вершины, совпадающей с вершиной параболы. Доказать, что при этом движении прямая линия, соединяющая точки пересечения сторон угла с параболой, тоже вращается около некоторой точки, лежащей на оси параболы.

**517.** Найти геометрическое место центров кругов, проходящих через данную точку и касающихся данной прямой.

**518.** Найти геометрическое место центров кругов, касающихся оси ординат и круга $x^2+y^2=1$.

## 5. Полярные уравнения кривых второго порядка

**519.** Относительно полярной системы координат составить уравнение окружности, радиус которой равен $a$ и центр находится: a) в полюсе, b) в точке $(a, 0)$, c) в точке $(\rho_1, \varphi_1)$.

**520.** Относительно полярной системы координат составить уравнение эллипса, центр которого совпадает с полюсом и фокальная ось — с полярной осью.

**521.** Под каким углом к фокальной оси наклонён тот диаметр эллипса $\rho^2=\dfrac{288}{16-7\cos^2\varphi}$, длина которого равна 10 единицам?

**522.** Составить уравнение эллипса, приняв его фокальную ось за полярную ось и поместив полюс:

a) в левом фокусе эллипса;

b) в правом фокусе эллипса.

**523.** Вычислить длину полуосей и расстояние между двумя фокусами эллипса:

$$\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}.$$

**524.** Составить уравнение гиперболы, центр которой совпадает с полюсом и действительная ось — с полярной осью.

**525.** Вычислить угол между асимптотами гиперболы:

$$\rho^2 = \frac{48}{4\cos^2\varphi - 1}.$$

**526.** Составить уравнение гиперболы, приняв её фокальную ось за полярную ось и поместив полюс в правом фокусе гиперболы.

**527.** Составить уравнения асимптот и директрис гиперболы

$$\rho = \frac{2}{1 - \sqrt{2}\cos\varphi}.$$

**528.** Составить уравнение параболы, приняв её ось за полярную ось и вершину за полюс.

**529.** На параболе $\rho = \frac{8\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ найти точку, радиус-вектор которой равен расстоянию этой же точки от директрисы параболы.

**530.** Составить уравнение параболы, фокус которой совпадает с полюсом и ось которой служит полярной осью.

**531.** На параболе $\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$ найти точку:

a) с наименьшим радиусом-вектором;

b) с радиусом-вектором, равным параметру параболы.

**532.** Доказать, что произведение перпендикуляров, опущенных из концов любой фокальной хорды на ось параболы, имеет постоянную величину.

**533.** Относительно прямоугольной системы координат написать простейшие уравнения следующих кривых:

a) $\rho = \frac{25}{13 - 12\cos\varphi}$; c) $\rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$;

b) $\rho = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}$; d) $\rho = \frac{4}{\sqrt{5} - \cos\varphi}$.

# ГЛАВА VI

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## 1. Общее уравнение кривой второго порядка. Преобразование этого уравнения при параллельном перенесении осей координат. Центр кривой.

Общее уравнение кривой второго порядка, т. е. уравнение второй степени относительно декартовых координат $x$ и $y$, содержит шесть членов: три члена второй степени (с квадратами каждой из координат и с их произведением), два члена первой степени и свободный член. Все коэффициенты этого уравнения обозначаются буквой $a$ с нижними указателями, зависящими от того, какие переменные множители входят в состав члена; множителю $x$ соответствует указатель 1, множителю $y$ — указатель 2, а в членах низших степеней места недостающих множителей отмечаются указателем 3. Порядок, в котором расположены указатели, не играет роли: $a_{12}=a_{21}$; $a_{13}=a_{31}$; $a_{23}=a_{32}$. Коэффициенты с двумя неодинаковыми указателями имеют ещё числовой множитель 2. Таким образом, общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \tag{1}$$

Для определения кривой второго порядка нет надобности знать все шесть коэффициентов,— достаточно знать пять независимых их отношений. Кривая второго порядка определяется пятью условиями.

Если, не меняя направления осей координат, перенести начало координат в любую точку $O'(x';y')$, то уравнение кривой (1) преобразуется в следующее:

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2F_{x'}X+2F_{y'}Y+2F'=0, \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} 2F'&=a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+2a_{13}x'+2a_{23}y'+a_{33},\\ 2F_{x'}&=2(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}),\\ 2F_{y'}&=2(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

т. е. коэффициенты при старших членах не изменяются; коэффициентами при первых степенях координат будут частные производные от левой части первоначального уравнения по соответствующим координатам с заменой текущих координат координатами нового начала; свободный член представляет всю левую часть первоначального уравнения, в которой произведена та же замена.

Если кривая (1) обладает центром симметрии и начало координат перенесено в этот центр кривой $(x_0; y_0)$, то преобразованное уравнение не может содержать членов первой степени и потому примет вид:

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2F^0=0. \tag{4}$$

Так как координаты центра обращают в нуль коэффициенты $2F_{x_0}$ и $2F_{y_0}$, то эти координаты определяются из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0, \\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Решив уравнения (5), получим:

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}=\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ y_0&=\frac{a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}=\frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Кривая имеет центр и называется центральной кривой, если система уравнений (5) определённая, т. е. $\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$; если уравнения (5) несовместны ($\delta=0$), кривая не имеет центра в конечной части плоскости, мы называем её кривой параболического типа; если, наконец, система (5) неопределённая, кривая имеет бесчисленное множество центров — целую линию центров, так как любая точка прямой

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$$

является центром симметрии кривой.

Вставляя координаты центра в левую часть первоначального уравнения (1) кривой, мы выразим свободный член преобразованного уравнения (4) через коэффициенты первоначального уравнения:

$$2F^0=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{\Delta}{\delta}.$$

$\Delta$ называется дискриминантом кривой, а $\delta$ называется дискриминантом старших членов.

Таким образом, уравнение кривой, отнесённой к центру, имеет вид:

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \tag{7}$$

**534.** Составить уравнение кривой второго порядка, проходящей через следующие пять точек: (0; 0), (0; $+2$), ($-1$; 0), ($-2$, $+1$), ($-1$; $+3$).

**535.** Какую кривую второго порядка можно провести через точки: $(0;\ 0)$, $(0;\ +3)$, $(+6;\ 0)$, $(+2;\ +2)$ и $(-2;\ +1)$?

**536.** Даны четыре точки: $(0;\ +15)$, $(+3;\ 0)$, $(+5;\ 0)$ и $(+2;\ +3)$. Провести через них кривую параболического типа.

Указание. Параболическая кривая определяется четырьмя условиями, потому что между её коэффициентами должно существовать соотношение $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ и, следовательно, уравнение параболической кривой содержит только четыре независимых параметра.

**537.** Какой вид примет уравнение кривой $x^2-4xy+3y^2-2x+1=0$, если перенести начало координат в точку $O'(+1;\ 0)$?

**538.** Дана кривая $xy-6x+2y+3=0$. Найти преобразованное уравнение этой кривой после переноса начала координат в точку $(-2;\ +6)$.

**539.** Найти преобразованное уравнение кривой $x^2+6x-8y+1=0$, если начало координат будет перенесено в точку $(-3;\ -1)$.

**540.** Найти центры следующих кривых:

1) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$;
2) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$;
3) $2x^2-3xy-y^2+3x+2y=0$;
4) $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$;
5) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$;
6) $2x^2-4xy+5y^2-8x+6=0$;
7) $x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$;
8) $x^2+6xy+9y^2+4x+12y-5=0$;
9) $9x^2-6xy+y^2+2x-7=0$;
10) $x^2-4xy+4y^2+10x-20y+25=0$.

**541.** При каких значениях параметров $a$ и $b$ уравнение

$$x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$$

изображает:

a) центральную кривую;
b) кривую параболического типа;
c) кривую с линией центров.

**542.** Найти центры кривых:

a) $5x^2-3xy+y^2+4=0$;
b) $3x^2-2xy+4=0$;
c) $7xy-3=0$;
d) $9x^2-12xy+4y^2-1=0$;
e) $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{33}=0$.

**543.** Какой вид примет уравнение кривой

$$2x^2-6xy+5y^2-2x+2y-10=0,$$

если перенести начало координат в её центр?

**544.** Пользуясь перенесением начала координат, упростить уравнения следующих кривых:

a) $7x^2+4xy+4y^2-40x-32y+5=0$;
b) $x^2-2xy+2x+2y+1=0$;
c) $6x^2-4xy+9y^2-4x-32y-6=0$.

**545.** Составить общее уравнение всех кривых второго порядка, имеющих один и тот же центр $(x_0;\ y_0)$.

**546.** Кривая второго порядка проходит через начало координат, через точки $A(0;\ +1)$ и $B(+1;\ 0)$. Кроме того, известен её центр $C(+2;\ +3)$. Составить уравнение этой кривой.

**547.** Найти геометрическое место центров кривых

$$x^2+2xy-y^2-2ax+4ay+1=0,$$

где $a$ — переменный параметр.

**548.** Найти геометрическое место центров всех центральных кривых второго порядка, проходящих через четыре точки: $(0;\ 0)$, $(+2;\ 0)$, $(0;\ +1)$ и $(+1;\ +2)$.

## 2. Условие распадения кривой второго порядка на пару прямых. Исследование общего уравнения второй степени

Если левая часть уравнения кривой второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (1)$$

может быть разложена на два линейных множителя:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=$$
$$=(A_1x+B_1y+C_1)\quad(A_2x+B_2y+C_2),$$

то соответствующая кривая состоит из двух прямых, уравнения которых мы получим, приравнивая нулю отдельно каждый из линейных множителей. Мы говорим, что кривая второго порядка распалась на пару прямых.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение (1) представляло пару прямых, заключается в равенстве нулю **дискриминанта кривой**, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Если это условие выполнено, то координаты точки пересечения соответствующих двух прямых определяются из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \text{ [1]}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

а угловые коэффициенты этих прямых удовлетворяют уравнению:

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0. \tag{10}$$

Исследование уравнений (9) и (10) показывает, что среди центральных кривых ($\delta \neq 0$) существуют распавшиеся кривые, состоящие из двух различных пересекающихся прямых ($k_1 \neq k_2$); при этом не исключена возможность, что $\delta > 0$, и угловые коэффициенты прямых оказываются тогда мнимыми; в этом случае прямые называются мнимыми, но они имеют общую вещественную точку, — вся кривая стянулась в одну точку.

При выполнении условий $\Delta = 0$ и $\delta = 0$ кривая распадается на две параллельные прямые ($k_1 = k_2$) и имеет линию центров (система уравнений (9) становится неопределённой).

Наконец, возможно, что те параллельные прямые, на которые распалась кривая, сольются; тогда не только $\delta = 0$, но и все остальные миноры второго порядка [2]) дискриминанта $\Delta$ обращаются в нуль.

Для установления типа нераспадающейся кривой пользуемся изменением направления осей координат: всегда возможно найти такую **прямоугольную** систему координат, чтобы преобразованное уравнение кривой не содержало члена с произведением координат, т. е. всегда можно подобрать такой угол $\alpha$ между новой

---

[1]) Уравнения (9) равносильны уравнениям (5), определяющим центр кривой; если кривая распадается на пару пересекающихся прямых, то точка их пересечения является центром кривой.

[2]) Минорами второго порядка называются те определители второго порядка, которые получаются из $\Delta$ вычёркиванием одного из столбцов и одной из строк; например, $\delta$ получается вычёркиванием последней строки и последнего столбца.

и старой осью абсцисс, чтобы после преобразования координат по формулам

$$x = \frac{x' \sin(\omega - \alpha) - y' \cos(\omega - \alpha)}{\sin \omega},$$

$$y = \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \omega}$$

новый коэффициент $a'_{12}$ обратился бы в нуль.

Уравнение кривой, отнесённой к центру, примет вид:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{11}$$

Если $\delta > 0$, уравнение (11) изображает эллипс (действительный или мнимый); если $\delta < 0$ — гиперболу.

Для кривой параболического типа ($a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = 0$) одновременно с $a'_{12}$ обращается в нуль один из коэффициентов $a'_{11}$ и $a'_{22}$, т. е. преобразованное уравнение будет содержать лишь один член второй степени:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0 \tag{12}$$

или

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0; \tag{12'}$$

оба эти уравнения изображают параболы, у которых ось симметрии параллельна одной из осей координат.

Таким образом, при исследовании общего уравнения кривой второго порядка можно пользоваться следующей таблицей:

| | $\Delta \neq 0$ | $\Delta = 0$ |
|---|---|---|
| $\delta > 0$ | Эллипс (действительный или мнимый) | Мнимые прямые, пересекающиеся в вещественной точке |
| $\delta = 0$ | Парабола | Параллельные прямые (действительные, мнимые или слившиеся) |
| $\delta < 0$ | Гипербола | Действительные пересекающиеся прямые |

**549.** Исследовать, какие кривые даны следующими уравнениями:

a) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$;
b) $x^2-2xy-2y^2-4x-6y+3=0$;
c) $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$;
d) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+29=0$;
e) $x^2-2xy-2y^2-4x-6y-\frac{13}{3}=0$.

Решение. Возьмём уравнение a); коэффициенты в нём имеют следующие значения: $a_{11}=1$; $a_{12}=-1$; $a_{22}=2$; $a_{13}=-2$; $a_{23}=-3$; $a_{33}=3$. Составим из них дискриминант кривой $\Delta$, дискриминант старших членов $\delta$ и вычислим оба этих определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix}=6-6-6-8-9-3=-26;$$

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1.$$

Итак, $\Delta \neq 0$ и $\delta > 0$; следовательно, мы имеем эллипс.

**550.** Определить вид следующих кривых:

1) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$;
2) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$;
3) $x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0$;
4) $y^2+5xy-14x^2=0$;
5) $x^2-xy-y^2-x-y=0$;
6) $x^2+y^2-4x-6y=0$;
7) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$;
8) $x^2-4xy+4y^2+2x-2y-1=0$;
9) $2y^2+8x+12y-3=0$;
10) $9x^2-6xy+y^2-6x+2y=0$;
11) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0$.

**551.** Пользуясь разложением левой части уравнения на множители, обнаружить геометрическое значение уравнений:

a) $xy-bx-ay+ab=0$;
b) $x^2-2xy+5x=0$;
c) $x^2-4xy+4y^2=0$;
d) $9x^2+30xy+25y^2=0$;
e) $4x^2-12xy+9y^2-25=0$.

**552.** Проверить, что уравнение $y^2-xy-5x+7y+10=0$ представляет пару прямых, и найти уравнение каждой из этих прямых.

Решение. Способ 1. Прежде всего составляем оба дискриминанта и вычисляем их величину:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 10 \end{vmatrix}=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 20 \end{vmatrix}=\frac{1}{8}(35+35-50-20)=0;$$

$$\delta=-\frac{1}{4}.$$

Таким образом, уравнение изображает две действительные пересекающиеся прямые. Найдём точку их пересечения из уравнений (9), которые в нашем случае после умножения на 2 примут вид:

$$\left.\begin{aligned} -y-5&=0; \\ -x+2y+7&=0; \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} y&=-5, \\ x&=-3. \end{aligned}$$

Угловые коэффициенты прямых вычисляются из уравнения (10), которое в данном случае имеет вид: $k^2-k=0$, откуда $k_1=0$ и $k_2=1$. Искомые прямые проходят через точку $(-3;\ -5)$ и имеют угловые коэффициенты, соответственно равные 0 и 1; следовательно, их уравнения будут:

$$y+5=0 \text{ и } y=x-2.$$

Способ 2. Убедившись, что данное уравнение изображает пару прямых, решаем его относительно ординаты:

$$y^2-(x-7)y-5x+10=0;$$

$$y=\frac{x-7}{2}\pm\sqrt{\frac{(x+3)^2}{4}}.$$

Отсюда $y=x-2$ и $y=-5$. Это и будут уравнения искомых прямых. Второй способ примыкает к непосредственному разложению левой части уравнения на множители.

**553.** Найти уравнение каждой из двух прямых, совокупность которых дана уравнением:

a) $21x^2+xy-10y^2=0$;
b) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$;
c) $y^2-4xy-5x^2+5x-y=0$;
d) $4x^2-4xy+y^2+12x-6y+9=0$.

**554.** Доказать, что всякое однородное уравнение второй степени, т. е. уравнение вида $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$, изображает пару прямых, проходящих через начало координат.

**555.** Исследовать кривые:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ 2x^2+3xy-5y^2=0;\\ &\text{b)}\ x^2+4xy+4y^2=0;\\ &\text{c)}\ 10x^2-7xy+y^2=0;\\ &\text{d)}\ 5x^2-4xy+y^2=0. \end{aligned}$$

**556.** При каком значении параметра $a$ уравнение $x^2+2ay^2-x+y=0$ представляет:

a) кривую параболического типа;

b) распавшуюся кривую?

**557.** При каком значении параметра $a$ уравнение $x^2+2axy+y^2-5x-7y+6=0$ представляет пару прямых и при каком значении — кривую параболического типа?

**558.** Какой вид имеет уравнение распавшейся кривой, если отнести её к центру?

**558*.** Какое постоянное число надо прибавить к левой части уравнения $2x^2+5xy-3y^2+3x+16y=0$, чтобы новое уравнение представляло совокупность двух прямых?

**559.** При каких значениях параметров $a$ и $b$ уравнение

$$x^2+4xy+ay^2-3x+2by=0$$

представляет пару параллельных прямых?

**560.** Какие кривые определяются уравнением

$$x^2-2xy+\lambda y^2-4x-6y+3=0$$

при различных значениях параметра $\lambda$?

**561.** Какой вид имеют кривые, определяемые уравнением

$$2x^2+5xy-3y^2-3x+\lambda y-2=0,$$

при различных значениях параметра $\lambda$?

**562.** Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через точки $(0; 0)$, $(0; +3)$, $(+6; 0)$, $(+2; +2)$ и $(+4; +1)$.

## 3. Пересечение кривой второго порядка с прямой. Уравнение касательной

Координаты точек пересечения кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

с прямой

$$Ax + By + C = 0 \qquad (*)$$

определяют, решая совместно уравнения (1) и (*).

Эта система уравнений должна, вообще говоря, иметь две пары решений, а потому кривая второго порядка пересекается с прямой в двух точках (действительных, мнимых или слившихся). В частности, если эти две точки сливаются, прямая называется *касательной* к кривой в данной точке.

Касательная к кривой (1) в точке $(x', y')$ имеет уравнение:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})\,x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})\,y + \\ + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0. \qquad (13)$$

Если данная прямая

$$Ax + By + C = 0$$

касается кривой (1), то координаты точки прикосновения определяются из условия пропорциональности коэффициентов уравнения этой прямой и уравнения касательной (13):

$$\frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}}{A} = \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}}{B} = \frac{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}}{C}. \qquad (14)$$

Особым случаем пересечения кривой (1) с прямой (*) является тот, когда при исключении одной из координат из их уравнений мы получим для определения другой координаты уравнение не второй, а первой степени (коэффициент при квадрате определяемой координаты обращается в нуль). В этом случае на конечной части плоскости существует только одна общая точка у кривой (1) и прямой (*). Мы будем говорить, что они пересекаются лишь в одной точке. Угловые коэффициенты этих прямых определяются из уравнения

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0.$$

Если уравнения (1) и (*) несовместны, т. е. не имеют общих конечных решений, мы говорим, что кривая (1) не имеет ни одной общей точки с прямой (*). В этом случае при исключении одной из координат из уравнений (1) и (*) в нуль обращается не только коэффициент при квадрате, но и при первой степени определяемой координаты.

**563.** Найти точки пересечения кривой

$$x^2 + xy + 2y^2 - 7x - 12y + 10 = 0$$

с осями координат.

**564.** Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие кривые:

$$\text{a)}\ x^2+4xy-4x-y+4=0;$$
$$\text{b)}\ x^2-4x-y+3=0;$$
$$\text{c)}\ x^2+6xy+9y^2-18y=0.$$

**565.** Вычислить длину хорды, отсекаемой кривой

$$2x^2-4xy+5y^2-8x+6=0$$

на оси абсцисс.

**566.** При каком значении параметра $\lambda$ кривая

$$2x^2-3xy+y^2-7x+\lambda y+4=0$$

отсекает на оси ординат хорду длиной в 3 единицы и при каком значении $\lambda$ соответствующая кривая касается оси ординат?

**567.** Найти точки пересечения кривой

$$x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$$

с прямыми:

$$\text{a)}\ 5x-y-5=0;\quad \text{b)}\ x+2y+2=0;$$
$$\text{c)}\ x+4y-1=0;\quad \text{d)}\ x-3y=0.$$

**568.** В точках пересечения кривой $x^2-2y^2-5x+4y+6=0$ с осями координат провести касательные к этой кривой.

**569.** Написать уравнения касательных к кривой

$$3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$$

в её точках, абсциссы которых равны $-2$.

**570.** Зная уравнение касательной к кривой, данной общим уравнением, вывести уравнения касательных к кривым, заданным простейшими уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;\quad y^2=2px;\quad xy=m.$$

**571.** Через начало координат провести касательные к кривой

$$3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0.$$

**572.** Через точку $(+3;\ +4)$ провести касательные к кривой

$$2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0.$$

**573.** Через точку $(-2; +1)$ провести касательные к кривым

a) $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$;

b) $2x^2-xy-y^2-15x-3y+18=0$

и разобрать, почему в каждом из этих случаев мы можем провести только по одной касательной.

**574.** Среди прямых, касающихся кривой

$$x^2+xy+y^2+2x+3y-3=0,$$

найти те, которые параллельны оси абсцисс.

**575.** К данной кривой $x^2+xy+y^2+2x+3y-3=0$ провести касательные, параллельные прямой $3x+3y-5=0$, и определить точки прикосновения этих касательных.

**576.** Написать уравнение параболы, касающейся оси $x$ в точке $(+3; 0)$ и оси $y$ в точке $(0; +5)$.

**577.** Составить уравнение кривой второго порядка, проходящей через начало координат и касающейся прямой $4x+3y+2=0$ в точке $(+1; -2)$ и прямой $x-y-1=0$ в точке $(0; -1)$.

**578.** Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат и встречающих кривую

$$6x^2-xy-y^2+5x-3y+2=0$$

лишь в одной точке.

**579.** Через точку $(+2; 0)$ проведены две прямые, имеющие лишь по одной общей точке с кривой

$$3x^2-7xy+2y^2+6x-4y-5=0.$$

Составить уравнения этих прямых и вычислить угол между ними, если система координат прямоугольная.

V **580.** Какой угол образуют с осью абсцисс прямые, встречающие кривую

$$x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$$

лишь в одной точке? $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**581.** При каком значении параметра $\lambda$ кривая

$$x^2+2\lambda xy-y^2+5x-9=0$$

пересекает прямую $2x-y+7=0$ только в одной точке?

**582.** Какой вид имеет общее уравнение кривой второго порядка, если её пересекают лишь в одной точке:

a) прямые, параллельные оси $x$;

b) прямые, параллельные оси $y$;

c) прямые, параллельные одной из осей координат?

**583.** Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты общего уравнения кривой второго порядка, если она не имеет ни одной общей точки:

a) с осью $x$,

b) с осью $y$,

c) с осями $x$ и $y$?

**584.** Кривая второго порядка проходит через точки $(0; 0)$, $(0; +2)$, $(+2; +4)$ и пересекает лишь в одной точке каждую из прямых:

$$3x - 2y + 1 = 0 \text{ и } 2x + y - 5 = 0.$$

Найти уравнение этой кривой.

**585.** Кривая пересекает каждую из осей координат только в начале координат. Кроме того, известны две её точки:

$$(+2; -1) \text{ и } (-2; +2).$$

Составить уравнение этой кривой.

**586.** Кривая второго порядка имеет центр в точке $(0; -1)$, проходит через точку $(+3; 0)$ и встречает каждую из прямых

$$2x - 3y + 1 = 0 \text{ и } x + y - 5 = 0$$

лишь в одной точке. Найти уравнение этой кривой.

**586*.** Найти геометрическое место центров всех кривых второго порядка, касающихся оси абсцисс в точке $(+2; 0)$ и оси ординат в точке $(0; +1)$.

## 4. Диаметры кривой. Главные оси. Асимптоты. Уравнение кривой, отнесённой к сопряжённым направлениям; уравнение кривой, отнесённой к асимптотам

Если в кривой второго порядка провести все хорды одного и того же направления, то геометрическое место середин этих хорд представит некоторую прямую, которую называют *диаметром, сопряжённым* данным хордам. Уравнение диаметра:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0, \qquad (15)$$

или

$$F_x + kF_y = 0, \tag{15'}$$

где $k$ есть угловой коэффициент сопряжённых хорд. Меняя $k$, т. е. меняя направление хорд, получим бесчисленное множество диаметров; все они проходят через центр кривой. У параболы все диаметры параллельны между собой.

Направление хорд и направление сопряжённого им диаметра называются сопряжёнными направлениями относительно данной кривой. Зависимость между двумя сопряжёнными направлениями следующая:

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0. \tag{16}$$

**Сопряжёнными диаметрами** называются такие два диаметра, из которых каждый делит пополам хорды, параллельные другому. У параболы сопряжённых диаметров нет, так как все диаметры имеют одно и то же направление.

**Главными осями** кривой называются диаметры, перпендикулярные к сопряжённым хордам; их направления называются **главными направлениями**.

В случае прямоугольной системы координат главные направления определяются из уравнения:

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0, \tag{17}$$

или

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \tag{18}$$

где $\varphi$ — угол между одним из главных направлений и направлением оси $x$.

В случае косоугольной системы координат мы имеем:

$$(a_{12} - a_{22}\cos\omega)k^2 + (a_{11} - a_{22})k - (a_{12} - a_{11}\cos\omega) = 0. \tag{17'}$$

Всякая кривая второго порядка имеет два главных направления, за исключением окружности, для которой главные направления неопределённые.

Угловой коэффициент определяется для всех диаметров параболы по формуле:

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}, \tag{19}$$

или

$$k = -\frac{\alpha}{\beta}, \tag{19'}$$

если для старших коэффициентов параболы введены обозначения:

$$a_{11} = \alpha^2, \quad a_{12} = \alpha\beta \quad \text{и} \quad a_{22} = \beta^2.$$

Главная ось параболы как один из её диаметров имеет это же направление и в случае прямоугольных координат она изображается уравнением

$$F_x + \frac{\beta}{\alpha} F_y = 0. \tag{20}$$

Второе главное направление параболы перпендикулярно к её диаметрам, но второй главной оси у параболы нет.

Если отнести кривую к двум сопряжённым направлениям, т. е. выбрать за оси координат прямые, имеющие сопряжённые направления относительно этой кривой, то в уравнение кривой не войдёт член с произведением координат ($a_{12}=0$). У параболы, кроме того, исчезнет ещё один из старших членов ($a_{11}=0$ или $a_{22}=0$).

Если центральную кривую отнести к двум сопряжённым диаметрам (или к главным осям), то уравнение её примет вид:

$$a'_{11}x^2+a'_{22}y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \tag{21}$$

Простейшее уравнение параболы мы получим, поместив начало координат в вершину, т. е. в точку пересечения параболы с главной осью ($a'_{33}=0$), выбрав главную ось за ось абсцисс ($a'_{23}=0$, $a'_{12}=0$ и $a'_{11}=0$) и касательную в вершине (она перпендикулярна к оси) за ось ординат:

$$a'_{22}y^2+2a'_{13}x=0. \tag{22}$$

При таком же выборе осей координат центральная кривая изобразится уравнением

$$a'_{11}x^2+a'_{22}y^2+2a'_{13}x=0. \tag{23}$$

Асимптоты кривой можно рассматривать, как те её диаметры, которые сами себе сопряжены. Угловые коэффициенты асимптот определяются из уравнения

$$a_{11}+2a_{12}k+a_{22}k^2=0. \tag{24}$$

Асимптоты могут быть только у центральных кривых: гипербола имеет две действительные асимптоты, эллипс — две мнимые; в случае пересекающихся прямых асимптоты совпадают с этими прямыми.

Если принять асимптоты гиперболы за оси координат, то уравнение этой гиперболы примет вид:

$$2a'_{12}xy+a'_{33}=0. \tag{25}$$

**587.** Найти два сопряжённых диаметра кривой

$$x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0,$$

из которых один проходит через начало координат.

Решение. Данная кривая центральная, потому что $\delta=1$. Уравнение всякого её диаметра будет

$$(x-y-2)+k(-x+2y-3)=0,$$

где $k$ — угловой коэффициент сопряжённого диаметра. Так как искомый диаметр проходит через начало координат, то свободный член его уравнения должен равняться нулю, т. е. $-2-3k=0$, откуда $k=-{}^2/_3$. Вставив это значение параметра в общее уравнение диаметра и преобразовав его, получим: $5x-7y=0$. Это уравнение одного из искомых диаметров; его угловой коэффициент $k'={}^5/_7$; следовательно, уравнение сопряжённого ему диаметра будет:

$$(x-y-2)+{}^5/_7(-x+2y-3)=0,$$

или

$$2x+3y-29=0.$$

**588.** Через точку $(+1;\ -2)$ проведён диаметр кривой

$$3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0.$$

Найти уравнение этого диаметра и диаметра, ему сопряжённого.

**589.** Дана кривая:

$$2x^2+5xy-3y^2+3x+16y=0.$$

Найти её диаметр, параллельный оси абсцисс, и диаметр, ему сопряжённый.

**590.** Найти два сопряжённых диаметра кривой

$$xy-y^2-2x+3y-1=0,$$

из которых один параллелен оси ординат.

**591.** Дана кривая

$$3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$$

и один из её диаметров

$$x+2y-2=0.$$

Найти диаметр, ему сопряжённый.

**592.** Составить уравнение диаметра кривой

$$2x^2+4xy+5y^2-8x+6=0,$$

параллельного прямой

$$2x-y+5=0.$$

**593.** Определить диаметр кривой

$$6x^2-xy-2y^2+4y=0,$$

образующий угол в $45°$ с осью абсцисс. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**594.** Дана кривая:

$$3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0.$$

Найти геометрическое место середин её хорд:

a) параллельных оси $x$;

b) параллельных оси $y$;

c) параллельных прямой $x+y+1=0$.

**595.** Найти диаметр кривой

$$5x^2-3xy+y^2-3x+2y-5=0,$$

проходящий через середину хорды, отсекаемой этой кривой на прямой

$$x-2y-1=0.$$

**596.** Найти середину хорды, отсекаемой кривой

$$2x^2+4xy+3y^2-3x-3y=0$$

на прямой

$$x+3y-12=0.$$

**597.** Найти такие сопряжённые диаметры кривой

$$3x^2-6xy+5y^2-4x-6y+10=0,$$

которые образуют между собой угол в 45°. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**598.** Найти зависимость между угловыми коэффициентами прямых, имеющих сопряжённые направления относительно:

a) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

b) гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

**599.** Через точку $(+1; -3)$ провести хорду эллипса $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{12}=1$, сопряжённую диаметру $2x+5y=0$.

**600.** Найти направления и длину двух сопряжённых диаметров эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$, из которых один проходит через точку $(+2; +3)$.

**601.** Найти угол между двумя сопряжёнными диаметрами эллипса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$, из которых один образует угол в 30° с большой осью.

**602.** Определить длину тех сопряжённых диаметров эллипса $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{3}=1$, которые образуют между собою угол $\frac{\pi}{3}$.

Указание. В этой задаче удобно воспользоваться теоремами Аполлония: $a^2+b^2=a'^2+b'^2$ и $ab=a'b'\sin\varphi$, где $a$ и $b$ — полуоси эллипса; $a'$ и $b'$ — сопряжённые полудиаметры его; $\varphi$ — угол между этими сопряжёнными диаметрами.

**603.** Даны размеры двух сопряжённых диаметров эллипса $2a'=18$ и $2b'=14$ и угол между ними $\varphi=\arcsin\frac{11}{21}$. Вычислить длину его осей.

**604.** Определить угол между двумя сопряжёнными диаметрами гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{9}=1$, зная, что действительный из этих диаметров втрое больше действительной оси.

**605.** Найти уравнения двух сопряжённых диаметров гиперболы $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$, угол между которыми равняется $\frac{\pi}{4}$.

**606.** Дана парабола: $x^2-6xy+9y^2-12x+14y-7=0$. Написать уравнение диаметра этой параболы:

a) проходящего через начало координат;
b) сопряжённого хордам, параллельным оси $x$;
c) сопряжённого хордам, параллельным оси $y$;
d) образующего угол $\pm\frac{\pi}{4}$ с сопряжёнными хордами;
e) перпендикулярного к сопряжённым хордам.

$\omega=\frac{\pi}{2}$.

**607.** Найти диаметр параболы $y^2=2px$, сопряжённый тем хордам, которые наклонены под углом в $45^\circ$ к оси параболы.

**608.** Написать уравнение диаметра параболы $x^2=6y$, сопряжённого с прямой $4x-y-5=0$.

**609.** Найти главные оси кривых:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } 3x^2+2xy+3y^2+6x-2y-5=0; \\ \text{b) } 5x^2+24xy-2y^2+4x-1=0; \\ \text{c) } x^2-3xy+y^2+1=0. \end{array}\right\}\ \omega=\frac{\pi}{2}.$$

**610.** Каковы будут главные оси распавшейся центральной кривой?

**611.** Найти ось параболы $x^2-2xy+y^2+x-2y+3=0$.

Решение. Все диаметры данной параболы имеют угловой коэффициент $k=1$ [см. (19')]. Ось параболы есть диаметр, сопряжённый перпендикулярным хордам, т. е. хордам с угловым коэффициентом $k_1=-1$ (система координат предполагается прямоугольной). Уравнение всякого диаметра этой параболы будет $2x-2y+1+k(-2x+2y-2)=0$; при $k=-1$ мы получим уравнение оси: $4x-4y+3=0$.

**612.** Найти ось симметрии и вершину каждой из следующих парабол:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & x^2+4xy+4y^2-6x-2y+1=0; \\ \text{b)} & 9x^2-12xy+4y^2-8x=0; \\ \text{c)} & 3y^2+2x-6y+5=0. \end{array}\right\} \omega=\frac{\pi}{2}.$$

Указание. Вершина параболы находится как точка пересечения параболы с её осью.

**613.** Найти общий диаметр двух кривых:

$$x^2-xy-y^2-x-y=0 \text{ и } x^2+2xy+y^2-x+y=0.$$

**614.** Составить уравнение кривой второго порядка, проходящей через начало координат, если известны две пары сопряжённых её диаметров:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-2=0, \\ 5x-5y-4=0 \end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{r} 5y+3=0, \\ 2x-y-1=0. \end{array}\right\}$$

Решение. Угловые коэффициенты сопряжённых диаметров удовлетворяют уравнению: $a_{11}+a_{12}(k_1+k_2)+a_{22}k_1k_2=0$. Угловые коэффициенты данных диаметров: $k_1=1/_3$ и $k_2=1$, $k_1'=0$, $k_2'=2$; вставляя эти значения в указанное уравнение, получим:

$$\left.\begin{array}{r} 3a_{11}+4a_{12}+a_{22}=0, \\ a_{11}+2a_{12}=0, \end{array}\right\} a_{11}:a_{12}:a_{22}=2:-1:-2.$$

Координаты центра искомой кривой мы можем определить, решая совместно уравнения двух диаметров: $x_0=\frac{1}{5}$, $y_0=-\frac{3}{5}$. Эти координаты должны удовлетворять уравнениям: $F_{x_0}=0$ и $F_{y_0}=0$, которые в данном случае перепишутся так: $2x_0-y_0+a_{13}=0$ и $-x_0-2y_0+a_{23}=0$; вставим вместо $x_0$ и $y_0$ вычисленные их значения и тогда получим: $a_{13}=-1$ и $a_{23}=-1$. Кроме того, кривая проходит через начало координат; значит, $a_{33}=0$, и уравнение кривой будет:

$$2x^2-2xy-2y^2-2x-2y=0, \text{ или } x^2-xy-y^2-x-y=0.$$

**615.** Две пары прямых:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=0,\\ x+2y&=0 \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} x-\ \ y&=0,\\ 3x-5y&=0 \end{aligned}\right\}$$

служат сопряжёнными диаметрами кривой второго порядка. Составить уравнение этой кривой, зная, что она проходит через точку $(+1;\ +1)$.

**616.** Выяснить особенности в выборе осей координат, если кривые даны следующими уравнениями:

a) $3x^2+2xy+y^2-7=0$; d) $x^2-2y^2+3=0$;

b) $5x^2+3y^2+x-2=0$; e) $3x^2-4y^2+2y+5=0$;

c) $x^2+3y^2+4x-5y=0$; f) $8x^2-3y^2+2x-5y+1=0$.

**617.** Относительно некоторой прямоугольной системы координат кривая дана уравнением: $2x^2-12xy-7y^2+8x+6y=0$. Преобразовать это уравнение, приняв за оси координат главные оси кривой.

**618.** Отнести к главным осям кривые, данные относительно прямоугольной системы координат уравнениями:

a) $9x^2-4xy+6y^2+6x-8y+2=0$;

b) $32x^2+60xy+7y^2-16x-2y+1=0$;

c) $2xy+3x-y-2=0$;

d) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;

e) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.

**619.** Уравнение кривой, отнесённой к двум сопряжённым диаметрам, составляющим угол $\frac{\pi}{3}$, имеет вид: $x^2+y^2=4$. Найти уравнение той же кривой относительно её главных осей.

**620.** Отнести к главным осям кривые:

a) $3x^2-4xy+4y^2-2x-4y+2=0$; $\omega=120°$.

b) $x^2+xy+y^2-2x-4y-12=0$; $\omega=60°$.

**621.** Выяснить особенности в выборе осей координат, если параболы даны следующими уравнениями:

a) $x^2-2xy+y^2+2x-6y=0$; d) $x^2-5y=0$;
b) $2x^2+6x-y-1=0$; e) $4y^2-2x-3=0$.
c) $3x^2-4y+5=0$;

**622.** Привести к простейшему виду уравнение параболы

$$9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0; \quad \omega=\frac{\pi}{2}.$$

**623.** Привести к простейшему виду уравнения следующих парабол:

a) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$; $\omega=90°$;
b) $x^2+2xy+y^2-6x+2y-3=0$; $\omega=60°$.
c) $x^2+y=0$; $\omega=120°$.

**624.** Отнести к вершине следующие центральные кривые:

$$2xy+3x-y-2=0; \quad x^2+2y^2-16=0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Во всех трёх случаях $\omega=90°$.

**625.** Найти асимптоты следующих гипербол:

a) $3x^2+2xy-y^2+8x+10y+14=0$;
b) $3x^2+10xy+7y^2+4x+2y+1=0$;
c) $10xy-2y^2+6x+4y-21=0$;
d) $2x^2-3xy-x+3y+4=0$.

**626.** Доказать, что все кривые, уравнения которых отличаются друг от друга только свободными членами, имеют общие асимптоты. Найти, например, асимптоты кривых

$$2x^2+3xy-2y^2+3x+11y+\lambda=0$$

при различных значениях параметра $\lambda$.

**627.** Доказать, что если две кривые имеют общие асимптоты, то все члены их уравнений, кроме свободных членов, имеют пропорциональные коэффициенты.

**628.** Составить общее уравнение для всех кривых, имеющих прямые $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$ своими асимптотами.

**629.** Кривая второго порядка проходит через точку $(+1; -1)$ и имеет своими асимптотами две прямые: $2x+3y-5=0$ и $5x+3y-8=0$. Составить уравнение этой кривой.

**630.** Составить уравнение кривой, касающейся прямой

$$4x+y+5=0$$

и имеющей прямые $x-1=0$ и $2x-y+1=0$ своими асимптотами.

**630*.** Какому условию должны удовлетворять коэффициенты общего уравнения гиперболы, если гипербола равносторонняя?

**631.** Какой вид имеет уравнение гиперболы, если одна из осей координат или обе оси параллельны асимптотам?

**632.** Составить уравнение гиперболы, проходящей через точки $(+2; +1)$, $(-1; -2)$ и $(^1/_3; -^1/_4)$, при условии, что одна из её асимптот совпадает с осью абсцисс.

**633.** Уравнение гиперболы, отнесённой к главным осям, имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Преобразовать это уравнение, приняв асимптоты гиперболы за новые оси координат.

**634.** Отнести гиперболу $2xy-6x+4y-1=0$ к её асимптотам.

**635.** Как преобразуется уравнение гиперболы

$$2x^2-12xy-7y^2+8x+6y=0,$$

если за оси координат принять её асимптоты? Угол $\omega=90°$.

**636.** Сколько членов второй степени и какие именно могут войти в уравнение: a) эллипса; b) гиперболы; c) параболы?

## 5. Преобразование уравнения кривой второго порядка с помощью инвариантов

Если одна и та же кривая второго порядка, отнесённая к двум различным произвольно выбранным системам координат с координатными углами $\omega$ и $\omega'$, изображается уравнениями:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

и

$$a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+a'_{22}y^2+2a'_{13}x+2a'_{23}y+a'_{33}=0, \tag{1'}$$

то имеют место следующие равенства:

$$\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}=\frac{a'_{11}+a'_{22}-2a'_{12}\cos\omega'}{\sin^2\omega'},\tag{26}$$

$$\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\sin^2\omega}=\frac{a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}}{\sin^2\omega'},\tag{27}$$

$$\frac{\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}}{\sin^2\omega}=\frac{\begin{vmatrix}a'_{11}a'_{12}a'_{13}\\a'_{21}a'_{22}a'_{23}\\a'_{31}a'_{32}a'_{33}\end{vmatrix}}{\sin^2\omega'},\tag{28}$$

т. е. существуют выражения, составленные из коэффициентов уравнения кривой и соответствующего координатного угла, которые не меняют своей величины ни при каком преобразовании декартовых координат. Такие выражения называются **инвариантами** кривой второго порядка. Мы можем пользоваться тремя вышеприведёнными инвариантами:

$$I_1=\frac{a_{11}+a_{22}-2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega},\tag{26'}$$

$$I_2=\frac{\delta}{\sin^2\omega},\tag{27'}$$

$$I_3=\frac{\Delta}{\sin^2\omega}\tag{28'}$$

для упрощения уравнений кривой второго порядка, если только уравнение кривой после преобразования содержит не более трёх коэффициентов.

**637.** Пользуясь инвариантами, отнести к главным осям кривую

$$40x^2+36xy+25y^2-8x-14y+1=0,$$

зная, что $\omega=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Искомое уравнение имеет следующий вид:

$$a'_{11}x^2+a'_{22}y^2+a'_{33}=0,\quad\text{причём }\omega'=\frac{\pi}{2}.$$

Для прямоугольных систем координат инварианты упрощаются, так как $\sin\omega=\sin\omega'=1$ и $\cos\omega=\cos\omega'=0$, и мы будем иметь: $I_1=a_{11}+a_{22}$; $I_2=\delta$; $I_3=\Delta$. Найдём числовое значение этих инвариантов, исходя из данного уравнения:

$$I_1 = 40 + 25 = 65; \quad I_2 = 40 \cdot 25 - 18^2 = 676;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 40 & 18 & -4 \\ 18 & 25 & -7 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -676.$$

Составим теперь выражения этих же инвариантов через коэффициенты преобразованного уравнения: $I_1 = a'_{11} + a'_{22}$; $I_2 = a'_{11}a'_{22}$; $I_3 = a'_{11}a'_{22}a'_{33}$. Так как инварианты не меняют своей величины при преобразовании координат, то мы можем приравнять между собой найденные для них выражения, содержащие коэффициенты первоначального и преобразованного уравнения: $a'_{11} + a'_{22} = 65$; $a'_{11}a'_{22} = 676$; $a'_{11}a'_{22}a'_{33} = -676$. Из этой системы уравнений мы определяем неизвестные коэффициенты преобразованного уравнения: $a'_{33} = -1$; $a'_{11} = 13$; $a'_{22} = 52$, и искомое уравнение будет: $13x^2 + 52y^2 = 1$. Таким образом, пользуясь инвариантами, можно привести уравнение кривой к простейшему виду, не отыскивая её центра, осей и не составляя формул преобразования координат.

**638.** Пользуясь инвариантами, привести к простейшему виду уравнения следующих кривых:

a) $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$;
b) $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$;
c) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
d) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
e) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

при условии, что все они отнесены к прямоугольной системе координат.

**639.** Пользуясь инвариантами, упростить уравнения следующих парабол:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0; \\ \text{b)} & 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0; \\ \text{c)} & x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0; \\ \text{d)} & 4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0; \end{array}\right\} \omega = \frac{\pi}{2}.$$

**640.** Упростить уравнения следующих кривых:

a) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$; $\omega = 60°$;
b) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$; $\omega = 60°$;
c) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$; $\omega = 120°$.

**640*.** Отнести к главным осям кривую $x^2+y^2=4$, если известно, что $\omega=\frac{\pi}{3}$.

**641.** Отнести гиперболу $8y^2+6xy-12x-26y+11=0$ к её асимптотам, пользуясь инвариантами. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Уравнение кривой, отнесённой к асимптотам, имеет вид:

$$2a'_{12}xy+a'_{33}=0.$$

Нам надо найти два неизвестных коэффициента $a'_{12}$, $a'_{33}$ и новый координатный угол $\omega'$, т. е. угол между асимптотами. Найдём числовую величину инвариантов, пользуясь данным уравнением, при $\omega=90°$; $I_1=8$, $I_2=-9$, $I_3=81$. Выражения этих инвариантов в новых коэффициентах будут:

$$I_1=-\frac{2a'_{12}\cos\omega'}{\sin^2\omega'},\quad I_2=-\frac{a'^2_{12}}{\sin^2\omega'}\quad \text{и}\quad I_3=-\frac{a'^2_{12}a'_{33}}{\sin^2\omega'}.$$

Для определения трёх величин $\omega'$, $a'_{12}$ и $a'_{33}$ имеем три уравнения:

$$-\frac{2a'_{12}\cos\omega'}{\sin^2\omega'}=8,\quad \frac{a'^2_{12}}{\sin^2\omega'}=9\quad \text{и}\quad -\frac{a'^2_{12}a'_{33}}{\sin^2\omega'}=81.$$

Решив их, получим: $\operatorname{tg}\omega'=\pm{}^3/_4$, $\sin^2\omega'={}^9/_{25}$; $a'_{33}=-9$ и $a'_{12}=\pm{}^9/_5$; искомое уравнение будет: $\pm{}^{18}/_5 xy-9=0$. Выбираем направление осей так, чтобы гипербола была расположена в нормальном углу и вертикальном к нему углу; тогда после упрощений получим: $xy={}^5/_2$.

**642.** Отнести к асимптотам гиперболы, данные относительно прямоугольной системы координат уравнениями:

a) $2x^2+3xy-2y^2-8x-11y=0$;

b) $4x^2+2xy-y^2+6x+2y+3=0$;

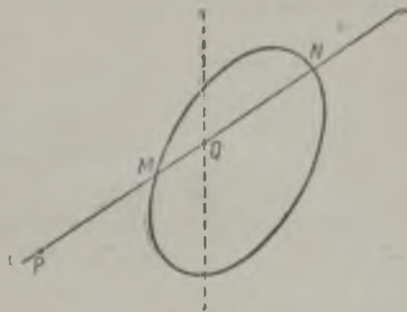
c) $y^2-2xy-4x-2y-2=0$.

**643.** Относительно некоторой прямоугольной системы координат кривая изображается уравнением $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$. Составить уравнение этой же кривой относительно её вершины.

Указание. Отнести кривую к вершине — значит принять одну из осей кривой за ось абсцисс, перенести начало координат в вершину и принять касательную в вершине за ось ординат.

## 6. Полюс и поляра

Две точки $P$ и $Q$ называются полярно-сопряжёнными относительно кривой второго порядка, если прямая, их соединяющая, пересекает кривую в двух точках $M$ и $N$, гармонически разделяющих данные точки $P$ и $Q$ (черт. 53).



Черт. 53.

Существует бесчисленное множество точек, полярно-сопряжённых данной точке $P$; их геометрическое место есть прямая — поляра данной точки (полюса $P$). Из двух сопряжённых точек каждая лежит на поляре другой.

Поляра точки $P(x', y')$ имеет уравнение:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0. \quad (29)$$

Если точка $P$ лежит на кривой, то её поляра совпадает с касательной в этой точке.

Каждая прямая $Ax + By + C = 0$ имеет определённый полюс относительно данной кривой второго порядка; координаты этого полюса определяются из условия пропорциональности коэффициентов уравнения прямой и уравнения поляры:

$$\frac{a_{11}x' + a_{13}y' + a_{13}}{A} = \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}}{B} = \frac{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}}{C}. \quad (30)$$

Если из двух прямых одна проходит через полюс другой, то и другая проходит через полюс первой. Такие две прямые называются сопряжёнными относительно данной кривой.

**644.** Составить уравнение поляры точки $P(+2; -1)$ относительно кривой: $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$.

**645.** Найти поляру точки:

1) $(-3; +5)$ относительно кривой
$$4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0;$$

2) $(0; +1)$ относительно кривой $6x^2 - xy - 2y^2 + 4y = 0$;

3) $(+1; -2)$ относительно кривой
$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0;$$

4) $(+7; +5)$ относительно кривой
$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$$

5) (0; 0) относительно кривой

$$x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0;$$

6) (0; 0) относительно кривой

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0;$$

7) $(x_1, y_1)$ относительно кривой $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

8) $(+5; +3)$ относительно кривой $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$;

9) $(-3; +2)$ относительно кривой $y^2=12x$;

10) $(+1; +1)$ относительно кривой

$$x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0.$$

**646.** Вычислить координаты полюса прямой $x-6y+8=0$ относительно кривой:

$$3x^2-6xy+5y^2-4x-6y+10=0.$$

**647.** Найти полюс прямой:

1) $18x-17y-41=0$ относительно кривой

$$2x^2-xy-3y^2-x-6y-15=0;$$

2) оси абсцисс относительно кривой

$$2x^2-4xy+5y^2-8x+6=0;$$

3) $15x+4=0$ относительно кривой

$$9x^2-4xy+6y^2+6x-8y+2=0;$$

4) $x+3y+1=0$ относительно кривой

$$3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0;$$

5) $x-y+3=0$ относительно кривой

$$2x^2+5xy-3y^2+3x+16y-5=0;$$

6) $3x-4y-12=0$ относительно кривой $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

7) $2x+5y-10=0$ относительно кривой $y^2=6x$.

**648.** В точках пересечения кривой $x^2-2xy+y^2+2x-6y=0$ с прямой $3x-y+6=0$ проведены касательные к этой кривой. Найти точку пересечения касательных.

**649.** Из точки $M(+3; +1)$ проведены две касательные к кривой $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$. Найти уравнение хорды, соединяющей обе точки прикосновения.

**650.** На прямой $4x+3y-12=0$ найти точку, полярно-сопряжённую с началом координат относительно кривой

$$9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0.$$

**651.** На прямой $4x - y + 30 = 0$ найти точку, полярно-сопряжённую с точкой $(+5; +1)$ относительно кривой

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0.$$

**652.** Через точку $M(0; +3)$ провести прямую, полярно-сопряжённую с прямой $x - 3y + 22 = 0$ относительно кривой $2xy - 6x + 4y - 1 = 0$.

**653.** Найти условие, при котором две прямые

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

являются сопряжёнными относительно кривой

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Какой вид примет это условие, когда кривая дана простейшим уравнением?

**654.** Доказать, что поляра точки относительно круга перпендикулярна к прямой, соединяющей эту точку с центром круга.

**655.** Доказать, что если две точки сопряжены относительно круга $x^2 + y^2 = R^2$ и расположены на одном и том же его радиусе, то расстояния их от центра круга удовлетворяют условию $\rho \cdot \rho_1 = R^2$.

**656.** Доказать, что диаметр, делящий хорду пополам, проходит через полюс этой хорды, т. е. что он ей полярно-сопряжён.

**657.** Проверить, что поляра любой точки директрисы кривой относительно этой кривой проходит через её фокус.

Указание. Уравнение кривой взять в канонической (простейшей) форме.

**658.** Доказать, что всякие две полярно-сопряжённые прямые, проходящие через фокус, перпендикулярны друг к другу.

Указание. Уравнение кривой взять в простейшей форме.

**659.** Доказать, что поляра любой точки асимптоты гиперболы параллельна этой асимптоте.

**660.** Концы малой оси эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ соединены с его фокусами. Найти полярную фигуру получившегося ромба относительно этого же эллипса.

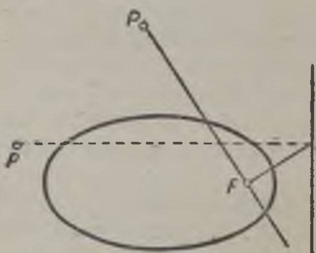
Указание. Полярная фигура данного многоугольника составлена из полюсов его сторон и поляр его вершин.

**661.** В гиперболу $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ вписан треугольник, вершины которого даны своими координатами: $A(+4;\ +6)$, $B(+4;\ -6)$ и $C(-2;\ 0)$. Найти фигуру, полярно-сопряжённую с треугольником относительно этой гиперболы.

**662.** Найти геометрическое место полюсов, касательных к окружности $x^2+y^2=9$, относительно эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$.

**663.** Найти геометрическое место полюсов, касательных к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, относительно гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

**664.** Если соединить любую точку $P(x_1, y_1)$ с фокусом эллипса $F$ и провести через $F$ перпендикуляр к этой прямой (черт. 54) то этот перпендикуляр, поляра $p$ точки $P$ и директриса, соответствующая фокусу $F$, пересекутся в одной точке. Доказать эту теорему аналитически и геометрически.



Черт. 54.

**665.** Найти кривую второго порядка, которая имеет центр в точке $M(+{}^3/_2;\ +{}^1/_2)$ и по отношению к которой вершины треугольника $O(0;\ 0)$, $A(-1;\ +1)$, $B(-{}^1/_4;\ +{}^1/_2)$ служат полюсами противолежащих сторон.

**666.** Относительно кривой второго порядка ось ординат служит полярой точки $(+5;\ 0)$ и ось абсцисс — полярой точки $(0;\ +3)$. Составить уравнение этой кривой, зная, что она проходит через точки $M(+1;\ +2)$ и $N(0;\ +{}^8/_2)$.

## 7. Задачи на фокальные свойства кривых, не отнесённых к главным направлениям[1])

**667.** Составить уравнение параболы, фокус которой находится в точке $(-{}^1/_3;\ -{}^2/_3)$ и директриса дана уравнением $3x-3y+8=0$.

**668.** Составить уравнение параболы, зная две её точки $(+2;\ 0)$, $(+12;\ 0)$ и уравнение директрисы $2x-y+1=0$.

[1]) Во всех задачах этого параграфа предполагается, что $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**669.** Составить уравнение кривой второго порядка, зная её эксцентриситет $e=\sqrt{5}$, фокус $F(+1; +1)$ и соответствующую директрису $x+2y-1=0$.

**670.** Кривая проходит через точку $A(+7; 0)$; кроме того, известен её фокус $F(0; +1)$ и директриса $x-y+$ $+3=0$. Написать уравнение этой кривой.

**671.** Найти равностороннюю гиперболу, директриса которой дана уравнением $x+y-1=0$ и соответствующий фокус координатами: $x=+1$, $y=+1$.

**672.** Найти фокусы и директрисы кривой

$$5x^2-8xy+5y^2-12x+6y=0.$$

Указание. Один из способов решения заключается в том, чтобы отнести данную кривую к её главным осям, определить координаты фокуса по каноническому уравнению и потом вновь перейти к первоначальной системе координат. Директрисы определяются как поляры фокусов.

Другой способ позволяет избежать преобразования координат, а именно: обозначим координаты одного из искомых фокусов через $x_1$, $y_1$ и уравнение соответствующей директрисы возьмём в нормальном виде

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0;$$

тогда уравнение кривой может быть представлено так:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=e^2(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)^2.$$

Из условия пропорциональности коэффициентов этого уравнения и данного уравнения мы определим пять неизвестных: $x_1$, $y_1$, $e$, $\alpha$ и $p$, что даёт нам сразу координаты фокуса и параметры из уравнения директрисы.

**673.** Найти фокус и директрису параболы

$$9x^2-24xy+16y^2-16x-12y-4=0.$$

**674.** Гипербола проходит через точку $A(+2; 0)$ и имеет следующие фокусы: $F_1(+2; +3)$; $F_2(+1; 0)$. Составить уравнение этой гиперболы.

**675.** Даны фокусы эллипса $F_1(+1; +3)$, $F_2(-1; +2)$ и одна из его касательных: $x-y+4=0$. Найти уравнение этого эллипса.

**676.** Можно ли найти гиперболу по заданиям предшествующей задачи?

**677.** Даны два фокуса кривой $F_1(+1;\ +1)$, $F_2(-2;\ -2)$ и одна из её директрис: $x+y-1=0$. Найти уравнение этой кривой.

**678.** Составить уравнение кривой второго порядка, зная её эксцентриситет $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и координаты двух фокусов: $(0;\ 0)$ и $(-{}^2/_5;\ +{}^4/_5)$.

**679.** Вершина параболы совпадает с началом координат, а фокус находится в точке $(+1;\ +1)$. Каково уравнение этой параболы?

**680.** Составить уравнение параболы, проходящей через точку $A(+2;\ +1)$, если известна её директриса $x-2y-5=0$ и ось симметрии $2x+y-1=0$.

**681.** Кривая второго порядка проходит через начало координат, имеет центр в точке $C(+1;\ +2)$ и её директрисой служит прямая $x+2y-1=0$. Найти уравнение кривой.

**682.** Гипербола имеет фокус в точке $(-2;\ +2)$, и прямые $2x-y+1=0$ и $x+2y-7=0$ служат ей асимптотами. Найти уравнение гиперболы.

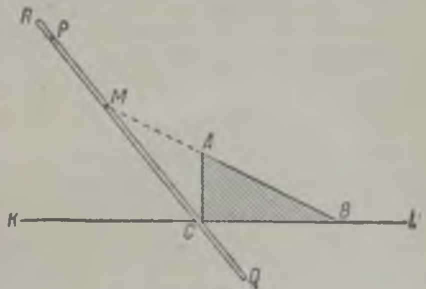
**683.** Гипербола проходит через точку $A(0;\ +1)$, имеет фокус в начале координат, и прямая $x-1=0$ служит ей асимптотой. Найти уравнение этой гиперболы.

## 8. Смешанные задачи

**684.** В точках пересечения осей координат с прямыми, принадлежащими одному и тому же пучку, проведены перпендикуляры к соответствующим осям. Найти геометрическое место точек пересечения этих перпендикуляров; угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

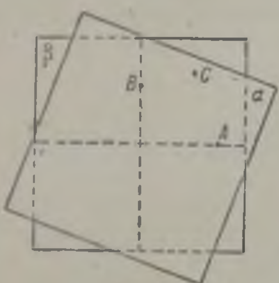
**684*.** Стержень $RQ$ вращается около неподвижной точки $P$ и подталкивает прямоугольный треугольник $ACB$, скользящий по прямой $KL$ (черт. 55). Найти геометрическое место точек $(M)$ пересечения стержня $PQ$ с продолжением гипотенузы $AB$. Составить уравнение, исследовать и вычертить соответствующую кривую. Привести полученное уравнение к простейшему виду.

**685.** Плоскость $\alpha$ скользит по неподвижной плоскости $\beta$ так, что две её точки $A$ и $B$ перемещаются по двум перпендикулярным прямым неподвижной плоскости. Определить и исследовать траекторию любой другой точки $C$ подвижной плоскости (черт. 56).

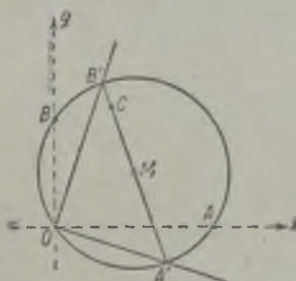


Черт. 55.

**686.** Доказать, что оси эллипса, описанного точкой $C$ в предшествующей задаче, направлены по прямым $OA'$ и $OB'$, соединяющим начало координат с концами того диаметра круга $OAB$, который проходит через точку $C$ (черт. 57). Найти величину этих осей. Какие точки подвижной плоскости описывают эллипсы с совпадающими осями? Какие точки описывают эллипсы с соответственно равными осями?



Черт. 56.

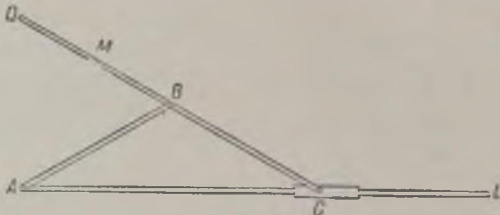


Черт. 57.

**686*.** Окружность катится без скольжения по внутренней стороне другой неподвижной окружности, радиус которой вдвое больше радиуса катящегося круга. Какова траектория любой точки, неизменно связанной с катящимся кругом?

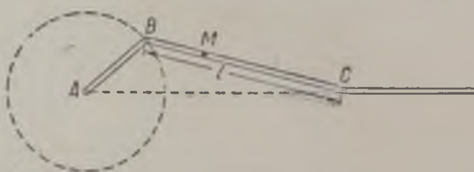
**687.** Две стороны $CB = a$ и $CA = b$ треугольника $ABC$ разделены точками $M$ и $N$ в отношениях $\lambda$ и $\frac{1}{\lambda}$ (считая от общей вершины). Найти геометрическое место точек пересечения прямых $AM$ и $BN$ при переменном $\lambda$.

**687*.** Найти траекторию центра круга, описанного около треугольника, когда одна из его вершин остаётся неподвижной, а противолежащая сторона, не меняя своей длины, скользит по прямой линии.




Черт. 58.

**688.** Шарнирный механизм (черт. 58) состоит из двух подвижных стержней $AB$ и $CD$ и неподвижной линейки $AL$. Стержень $AB$ прикреплён шарниром $B$ к стержню $CD$, причём $AB = CB$, и вращается около неподвижной точки $A$. Конец $C$ стержня $CD$ скользит по неподвижной линейке $AL$. Найти траекторию любой точки $M$ стержня $CD$.




Черт. 59

**689.** Найти траекторию любой точки шатуна паровой машины (черт. 59).

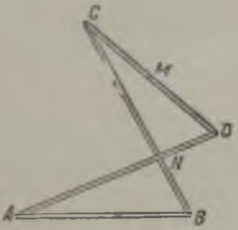
Указание. Эта задача отличается от предыдущей тем, что $AB \neq CB$.

**690.** Найти геометрическое место точек, симметричных с центром эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно его касательных; $\omega = \frac{\pi}{2}$.

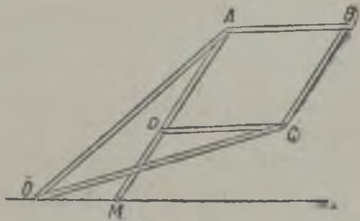
**691.** Доказать, что кривая предыдущей задачи может быть получена как траектория середины $M$ малого стержня $CD$ шарнирного антипараллелограмма $ABCD$, у которого закреплено противоположное звено $AB$ (черт. 60).

**692.** Найти геометрическое место точек, симметричных с центром гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ относительно её касательных. Угол $\omega=\frac{\pi}{2}$.

**693.** Доказать, что кривая предыдущей задачи есть траектория середины большого стержня антипараллелограмма, противоположное звено которого закреплено.




Черт. 60.




Черт. 61.

**694.** Доказать, что шарнирным механизмом $OABCD$ (черт. 61), так называемым инверсором, осуществляется прямолинейное движение точки $B$.

Пояснение к чертежу: точки $O$ и $M$ неподвижны, около них вращаются стержни $OA$, $OC$ и $MD$; все семь стержней соединены между собой шарнирами. Длина стержней:

$$OA=OC=l;\quad AB=BC=CD=DA=a;\quad MD=OM=b.$$

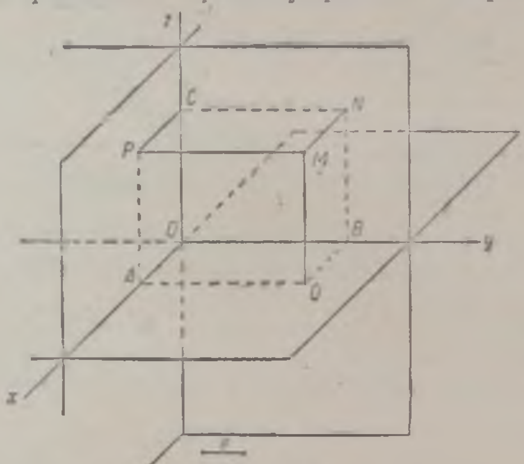
ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

## ГЛАВА VII

## ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Положение геометрических образов в пространстве можно определять по отношению к прямоугольной системе координат, состоящей из трёх взаимно перпендикулярных осей координат, пере-




Черт. 62.

секающихся в одной и той же точке (начало координат $O$), и трёх плоскостей, попарно их соединяющих (координатные плоскости). На каждой оси выбирается положительное направление и единица длины.

Положение точки $M$ в пространстве (черт. 62) определяется тремя числами — её координатами:

абсциссой

$$x = \frac{NM}{e} = \frac{OA}{e},$$

ординатой

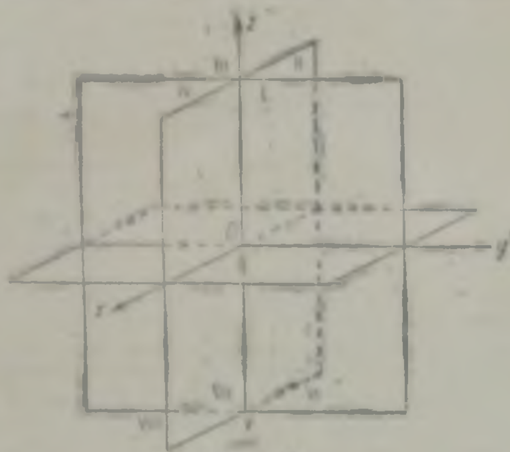
$$y=\frac{PM}{e}=\frac{OB}{e}$$

и аппликатой

$$z=\frac{QM}{e}=\frac{OC}{e}.$$

Каждая из них даёт расстояние точки $M$ от одной из плоскостей координат, а знак указывает, по какую сторону от этой плоскости расположена точка, а именно: взята ли она в сторону положительного или отрицательного направления третьей оси (не лежащей в соответствующей координатной плоскости).

Три координатные плоскости (черт. 63) делят пространство на восемь частей (октантов). Координаты точек, расположенных в различных частях, имеют различные знаки.



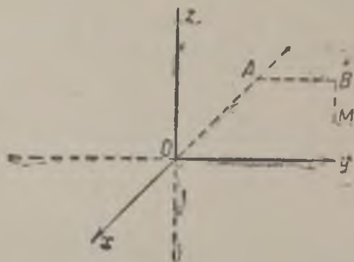
Черт. 63.

Точки, лежащие на координатных плоскостях, имеют одну из координат, равную нулю; точки, лежащие на осях координат, имеют две координаты, равные нулю; начало координат имеет все три координаты, равные нулю.

| Координата | Октант | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
| Абсцисса . | + | − | − | + | + | − | − | + |
| Ордината . | + | + | − | − | + | + | − | − |
| Аппликата . | + | + | + | + | − | − | − | − |

Зная значение трёх координат, можно построить одну единственную точку. Искомая точка служит концом ломаной линии, которую мы получим, отложив на оси $x$ отрезок $OA$, равный абсциссе; из конца его параллельно оси $y$ — отрезок $AB$, равный ординате, и из его конца параллельно оси $z$ — отрезок $BM$, равный аппликате точки. На черт. 64 построена точка $M(-3;\ +2;\ -1)$. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел $(x,\ y,\ z)$. Этим соответствием можно воспользоваться для изображения одновременного изменения трёх величин, или, иначе, для изображения зависимости одной функции от двух независимых переменных.

Так, например, объём ($v$) определённой массы газа зависит от температуры ($t$) и давления ($p$). Зависимость между этими тремя величинами даётся формулой: $v=\frac{c}{p}\left(1+\frac{t}{273}\right)$; но она же может быть изображена геометрически. Будем откладывать температуру по оси $x$, давление — по оси $y$ и объём газа — по оси $z$. Выбрать определённую температуру и давление значит дать определённые значения двум координатам $x$ и $y$, т. е. выбрать точку на плоскости ($xy$); выбранным значениям независимых переменных соответствует определённый объём газа; это значение функции откладываем на перпендикуляре, восставленном к плоскости ($xy$) в выбранной точке. Меняя температуру и давление, мы переходим на плоскости ($xy$) от одной точки к другой и над каждой из них получим в пространстве точку, апликата которой равна соответствующему объёму газа. Совокупность всех этих точек в пространстве даст некоторую поверхность, и по высоте её точек над плоскостью ($xy$) мы судим об изменении объёма газа с изменением температуры и давления. Если мы выберем постоянную температуру ($x=\text{const.}$) и будем менять только давление, то придётся ограничиться рассмотрением тех точек поверхности, которые лежат в плоскости, параллельной плоскости ($yz$), — линия пересечения этой плоскости с поверхностью даст нам график объёма газа в зависимости от давления. Так как зависимость между объёмом и давлением при постоянной температуре выражается формулой $v \cdot p=\text{const.}$, то линия, изображающая эту зависимость, — гипербола.



Черт. 64.

Давая давлению постоянное значение ($y=\text{const.}$) и меняя температуру, мы получим в плоскости, параллельной плоскости ($xz$), кривую, изображающую зависимость между объёмом газа и температурой при постоянном давлении. Зависимость эта выражается формулой $v=c_1+c_2t$ и соответствующая линия — прямая.

Итак, поверхность, изображающая зависимость объёма газа от температуры и от давления, пересекается плоскостями, параллельными плоскости ($xz$), по прямым, а плоскостями, параллельными плоскости ($yz$), по гиперболам. В плоскостях, параллельных плоскости ($xy$), мы получим линии (прямые), изображающие зависимость, которая должна существовать между температурой и давлением при сохранении постоянного объёма[1]).

Расстояние ($\rho$) точки ($M$) от начала координат называется **радиусом-вектором** этой точки, и мы имеем:

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2. \tag{1}$$

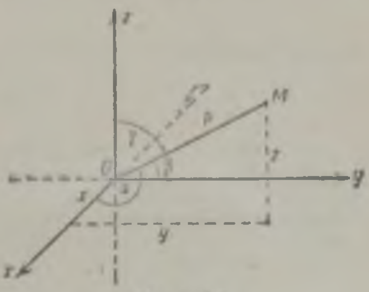
[1]) Вышеприведённая поверхность называется гиперболическим параболоидом и будет подробно изучена в дальнейшем.

Координаты точки суть проекции её радиуса-вектора на оси координат:

$$x = \rho\cos\alpha,\quad y = \rho\cos\beta,\quad z = \rho\cos\gamma, \tag{2}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ обозначают углы между радиусом-вектором и положительным направлением трёх осей координат (черт. 65); эти углы связаны соотношением:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3}$$



Черт. 65.

Соотношение (3) справедливо для углов, образованных любой прямой с тремя взаимно перпендикулярными осями.

Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{4}$$

Это расстояние рассматривается обыкновенно только по абсолютной величине.

Направление отрезка $AB$ характеризуется углами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, которые он образует с положительными направлениями осей координат:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},\\ \cos\beta &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если направление двух прямых дано углами ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) и ($\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$), то угол $\varphi$ между ними[1]) вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'. \tag{6}$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$\cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma' = 0. \tag{7}$$

[1]) Если две прямые не пересекаются, то углом между ними называется угол между двумя пересекающимися прямыми, которые соответственно параллельны данным прямым.

Если даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты всякой третьей точки $C$ прямой $AB$ определяются формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},\tag{8}$$

где $\lambda$ обозначает то отношение, в котором точка $C$ делит отрезок $AB$, т. е.

$$\lambda=\frac{AC}{CB}.$$

Площадь плоской фигуры можно вычислить, зная площадь её проекции, а именно: площадь проекции равна проектируемой площади, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции, или, иначе, квадрат площади всякой плоской фигуры равен сумме квадратов площадей её проекций на три взаимно перпендикулярные плоскости.

Если, не меняя направления осей, перенести начало координат в точку $O'(a, b, c)$, то координаты любой точки $(x, y, z)$ выразятся через новые координаты $(x', y', z')$ той же точки следующим образом:

$$x=x'+a,\quad y=y'+b,\quad z=z'+c.\tag{9}$$

Если, не меняя начала координат, изменить направление осей так, чтобы новые оси образовали со старой осью $x$ углы $\alpha$, $\alpha'$ и $\alpha''$, со старой осью $y$ углы $\beta$, $\beta'$ и $\beta''$ и со старой осью $z$ углы $\gamma$, $\gamma'$ и $\gamma''$, то

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha'+z'\cos\alpha'',\\ y&=x'\cos\beta+y'\cos\beta'+z'\cos\beta'',\\ z&=x'\cos\gamma+y'\cos\gamma'+z'\cos\gamma''. \end{aligned}\right\}\tag{10}$$

**695.** Построить точки:

$A(+3;\ +2;\ +1)$, $B(+4;\ -1;\ -2)$, $C(-5;\ +3;\ +4)$, $D(+1;\ +4;\ -3)$, $E(-3;\ +^1/_2;\ -1)$, $F(0;\ +5;\ -2)$, $G(-1;\ -3;\ 0)$, $H(+2;\ 0;\ -1)$, $K(0;\ 0;\ +5)$, $L(-2;\ -5;\ +3)$.

**696.** Куб стоит на плоскости $(xy)$, причём центр его основания совпадает с началом координат, боковые рёбра лежат в координатных плоскостях. Найти координаты вершин куба, зная, что ребро его равно $a$.

**697.** Даны точки: $P(+3;\ -1;\ +2)$ и $M(a, b, c)$. Вычислить координаты точек, симметричных с данными по отношению к плоскостям координат, к осям и к началу координат.

**698.** Как расположены в пространстве точки, для которых:

a) $x=y$; b) $x=y=z$?

**699.** Исследовать (рассмотреть сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям) поверхность, изображающую зависимость между площадью прямоугольника и длиной его сторон.

**700.** Определить расстояние точки $A(+12; -3; +4)$ от начала координат и от осей координат.

**701.** В третьем октанте найти точку, зная её расстояния от трёх осей координат:

$$d_x = 5; \quad d_y = 3\sqrt{5}; \quad d_z = 2\sqrt{13}.$$

**702.** Найти направление радиуса-вектора точки $P(+3; +2; +6)$ и точки $Q(a, a, a)$.

**703.** Определить величину и направление силы, составляющие которой по осям координат имеют следующие величины: $X = 10$, $Y = 5$, $Z = 10$.

**704.** Прямая образует с двумя осями координат углы в $60^\circ$. Под каким углом наклонена она к третьей оси?

**705.** Вычислить координаты точки $M$, зная, что её радиус-вектор равен 8 единицам и наклонён к оси $x$ под углом $45^\circ$, а к оси $z$ — под углом в $60^\circ$.

**706.** Найти углы, которые образованы радиусом-вектором точки $A(+6; +2; +9)$ с координатными плоскостями.

**707.** Какая зависимость существует между косинусами углов, образованных прямою с тремя координатными плоскостями?

**708.** Найти зависимость между: а) радиусом-вектором $\rho$ и его проекциями на три оси координат ($\rho_x$, $\rho_y$, $\rho_z$); b) радиусом-вектором $\rho$ и его проекциями на три координатные плоскости ($\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$).

**709.** Зная направление прямой ($\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$), найти направление её проекции на координатную плоскость ($xy$).

**710.** Доказать, что если плоскость отсекает на осях координат отрезки, соответственно равные $a$, $b$ и $c$, то длина перпендикуляра ($p$), опущенного на эту плоскость из начала координат, удовлетворяет соотношению:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}.$$

**711.** Найти расстояние между точками $A(-2; +1, +3)$ и $B(0; -1; +2)$ и направление прямой, их соединяющей.

**712.** В точке $A(+3; +2; +7)$ приложена сила $R=15$. Определить составляющие этой силы по осям и координаты конца вектора, изображающего силу, зная, что углы между этим вектором и осями координат удовлетворяют соотношению:

$$\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=3:4:5.$$

**713.** В точке $A(+2; -1; +5)$ приложена сила $R=11$. Зная две составляющие этой силы $X=7$ и $Y=6$, определить направление и конец вектора, её изображающего.

**714.** На оси $z$ найти точку, равноудалённую от точек:

$$A(-4; +1; +7) \text{ и } B(+3; +5; -2).$$

**715.** На координатной плоскости $(yz)$ найти точку, одинаково удалённую от трёх данных точек: $A(+3; +1; +2)$; $B(+4; -2; -2)$ и $C(0; +5; +1)$.

**716.** Шаровая поверхность проходит через начало координат и через точки: $A(+4; 0; 0)$, $B(+1; +3; 0)$ и $C(0; 0; -4)$. Найти центр и радиус шара.

**717.** На плоскостях координат найти точки, которые вместе с началом координат служили бы вершинами правильного тетраэдра с рёбрами, равными единице.

**718.** Найти угол между прямой, лежащей в плоскости $(xy)$ и наклонённой к оси $x$ под углом $\alpha$, и прямой, лежащей в плоскости $(xz)$ и образующей с осью $x$ угол $\alpha'$.

**719.** Найти угол между биссектрисами углов $xOy$ и $yOz$.

**720.** Найти угол, образованный вектором, компоненты которого $X=10$, $Y=11$, $Z=2$, и прямой, проходящей через точки $P(0; -8; -1)$ и $Q(+3; -2; +1)$.

**721.** Найти направление прямой, одновременно перпендикулярной к оси $z$ и к прямой, проходящей через две точки $A(+1; -1; +4)$ и $B(-3; +2; +4)$.

**722.** Проверить, что четырёхугольник, вершины которого находятся в точках $A(+5; +2; +6)$, $B(+6; +4; +4)$, $C(+4; +3; +2)$ и $D(+3; +1; +4)$, есть квадрат.

**723.** Какому условию должны удовлетворять направляющие косинусы трёх прямых, лежащих в одной и той же плоскости?

**724.** Вычислить площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, который является ортогональной проекцией круга радиуса $r=a$ на плоскость $(xy)$.

725. На осях координат отложены от начала координат отрезки, соответственно равные 1, 2 и 3; концы этих отрезков соединены прямыми. Определить площадь полученного таким образом треугольника.

726. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(-1;\ 0;\ -1)$, $B(0;\ +2;\ -3)$ и $C(+4;\ +4;\ +1)$.

727. Проверить, что прямые, соединяющие середины смежных сторон косого четырёхугольника, образуют параллелограмм.

728. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

729. Даны две вершины треугольника: $A(-4;\ -1;\ +2)$ и $B(+3;\ +5;\ -6)$. Найти третью вершину $C$, зная, что середина стороны $AC$ лежит на оси $y$, а середина стороны $BC$ — на плоскости $(xz)$.

730. Отрезок $AB$ разделён на пять равных частей: известна первая точка деления $C(+3;\ -5;\ +7)$ и последняя $F(-2;\ +4;\ -8)$. Определить координаты концов отрезка и остальных точек деления.

731. Найти центр тяжести тетраэдра, имеющего следующие вершины:

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad B(x_2,\ y_2,\ z_2),$$
$$C(x_3,\ y_3,\ z_3),\quad D(x_4,\ y_4,\ z_4).$$

732. Найти отношение, в котором каждая из плоскостей координат делит расстояние между точками $A(+2;\ -1;\ +7)$ и $B(+4;\ +5;\ -2)$.

732*. Проверить, что три точки $A(+1;\ -5;\ +3)$, $B(+5;\ -1;\ +7)$ и $C(+6;\ 0;\ +8)$ лежат на одной прямой.

733. Даны две прямые: одна из них проходит через точки $A(-3;\ +5;\ +15)$ и $B(0;\ 0;\ +7)$, а другая — через точки $C(+2;\ -1;\ +4)$ и $D(+4;\ -3;\ 0)$. Узнать, пересекаются ли эти прямые, и если пересекаются, то найти точку пересечения.

√ 734. Узнать, лежат ли в одной плоскости следующие четыре точки: $A(+3;\ -2;\ +3)$, $B(0;\ +4;\ +9)$, $C(+2;\ 0;\ +5)$ и $D(+2;\ -8;\ -1)$.

**735.** Вершины тетраэдра первоначально совпадали с точками $A(-7; +3; -2)$, $B(0; +2; +1)$, $C(+4; -1; 0)$ и $D(-1; 0; -3)$. В результате некоторого поступательного движения центр тяжести тетраэдра оказался в точке $M(+6; -2; +1)$. Каковы будут координаты вершин тетраэдра после этого перемещения?

**736.** Составить формулы преобразования координат, если первоначально оси совпадали с тремя рёбрами куба, пересекающимися в одной из его вершин, а потом — с тремя соответственно параллельными рёбрами того же куба, проходящими через противолежащую вершину; направление осей выбрано так, что начало координат каждой из этих систем имеет по отношению к другой системе положительные координаты.

**737.** Координаты некоторых точек удовлетворяют уравнению:

$$3x^2 + y^2 - 2xz + 2x - 6y + 4z - 5 = 0.$$

Какому уравнению будут удовлетворять новые координаты тех же точек, если перенести начало координат в точку $O'(+2; +3; +7)$?

**738.** Как преобразуется уравнение $z = xy$, если, не меняя оси $z$, принять биссектрисы угла $xOy$ за новые оси абсцисс и ординат?

**739.** Три ребра куба совпадали с положительным направлением осей координат; затем куб повернули на угол $\vartheta$ вокруг диагонали, проходящей через начало координат, и рёбра, совпадавшие с осями, приняли за соответствующие новые оси координат. Составить формулы перехода от старой системы координат к новой, если a) $\vartheta = 120°$ и b) $\vartheta = 60°$.

## ГЛАВА VIII

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Если мы имеем уравнение с тремя переменными и будем рассматривать эти переменные как координаты точки пространства, то совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, составит некоторую п о в е р х н о с т ь. Иначе: одно уравнение между тремя координатами изображает поверхность.

Если уравнение содержит только две переменные и мы продолжаем рассматривать их как две координаты точки пространства (например, $x$ и $y$), то уравнение представляет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси недостающей координаты ($z$). Если мы переменные этого же уравнения будем рассматривать как координаты точки соответствующей координатной плоскости (т. е. положим $z=0$), то уравнение даст нам направляющую этой цилиндрической поверхности.

Если уравнение содержит только одну координату точки пространства (например $x$), то оно изображает одну или несколько (в зависимости от степени уравнения) плоскостей, параллельных соответствующей координатной плоскости ($yz$).

Уравнение представляет совокупность нескольких поверхностей, если левая часть его, после перенесения в неё всех членов уравнения, разлагается на множители. Уравнения этих поверхностей получим, приравнивая нулю каждый сомножитель отдельно.

Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют двум уравнениям, составляет некоторую линию — линию пересечения соответствующих двух поверхностей. Итак, два уравнения между тремя координатами изображают линию.

Если мы имеем уравнения двух поверхностей:

$$F(x, y, z)=0 \text{ и } f(x, y, z)=0, \tag{1}$$

то уравнение

$$F(x, y, z)-k\cdot f(x, y, z)=0 \tag{2}$$

представляет поверхность, проходящую через линию пересечения данных двух поверхностей. Меняя значения параметра $k$, получим пучок поверхностей. Линия, изображаемая двумя уравнениями (1), может быть определена любыми двумя другими поверхностями пучка (2).

Три уравнения между тремя координатами определяют одну или несколько отдельных точек. — точек пересечения трёх поверхностей, если только уравнения независимы между собой, т. е. соответствующие поверхности не принадлежат одному и тому же пучку.

Поверхности и линии могут быть определены теми геометрическими свойствами, которые присущи их точкам, и тогда возникает задача о составлении их уравнений. Нет надобности рассматривать все точки, обладающие известным свойством; достаточно ввести образующую точку, которая своим движением описывает соответствующий геометрический образ. Если движение образующей точки ограничено одним условием, для аналитического выражения которого достаточно одного уравнения, — соответствующее геометрическое место точек есть поверхность. Если движение образующей точки ограничено двумя независимыми друг от друга условиями, могущими быть выраженными двумя уравнениями, — соответствующая совокупность точек есть линия.

**740.** Исследовать, какие геометрические образы даны уравнениями:

a) $x^2+y^2+z^2=1$; b) $x^2+y^2=1$; c) $x^2=1$; d) $x^2-y^2=0$; e) $x^2+y^2+z^2=0$; f) $x^2+y^2=0$; g) $x^2=0$; h) $xyz=0$;

i) $y-\sqrt{3}z=0$.

**741.** Исследовать, какие геометрические образы даны следующими системами уравнений:

a) $\begin{cases}(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=25,\\ y+1=0;\end{cases}$ c) $\begin{cases}z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2},\\ x-y=0;\end{cases}$

b) $\begin{cases}\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1,\\ x-2=0;\end{cases}$ d) $\begin{cases}3x^2-y^2+5xz=0;\\ z=0.\end{cases}$

**742.** Найти цилиндр, проектирующий на плоскость $(xy)$ кривую:

$$\begin{cases}-9y^2+6xy-2zx+24x-9y+3z-63=0,\\ 2x-3y+z=9.\end{cases}$$

**743.** Найти проекцию кривой

$$\begin{cases}x^2+z^2+3yz-2x+3z-3=0,\\ y-z+1=0\end{cases}$$

на плоскость $(xz)$.

**744.** Написать уравнение шаровой поверхности, имеющей центр в точке $C(+3;\ -1;\ +6)$ и радиус $R=7$.

**745.** Найти геометрическое место точек, находящихся на расстоянии четырёх единиц от плоскости $(yz)$ и на расстоянии трёх единиц от точки $A(+5;\ +2;\ -1)$.

**746.** Написать уравнение плоскости, зная, что точки

$$A(+4;\ 0;\ -3) \text{ и } B(+1;\ -5;\ +2)$$

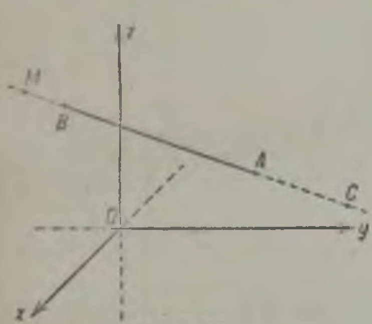
симметричны относительно этой плоскости.

**747.** Определить траекторию точки, движущейся в плоскости $(xz)$ так, что её радиус-вектор всё время равен расстоянию её от точки $A(+5;\ -3;\ +1)$.

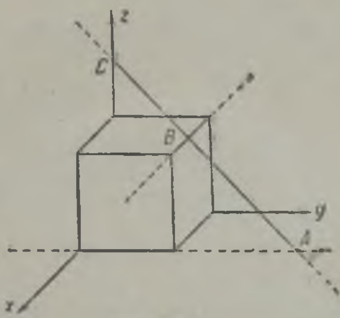
**748.** Найти геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки и данной плоскости.

**749.** Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек $P(c, 0; 0)$ и $Q(-c; 0; 0)$ есть величина постоянная, равная $2a$.

**750.** Стержень перемещается в пространстве так, что три его постоянные точки $A$, $B$ и $C$ (черт. 66) скользят по трём координатным плоскостям. Чем ограничено движение четвёртой точки $M$ произвольно выбранной на стержне?




Черт. 66.




Черт. 67.

**751.** Исследовать поверхность предыдущей задачи, рассмотрев её сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

**752.** Составить уравнение поверхности, описанной стержнем, скользящим по трём рёбрам куба, из которых никакие два не лежат на одной плоскости (черт. 67). Ребро куба равно $a$.

## ГЛАВА IX

# ПЛОСКОСТЬ

Всякое уравнение первой степени относительно координат точки пространства

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

изображает п л о с к о с т ь, и, обратно, всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени. Уравнение плоскости содержит три независимых параметра.

Если в уравнении (1) отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат. Если отсутствует член с одной из координат, то плоскость параллельна соответствующей оси координат; если одновременно отсутствует свободный член и член с одной из координат, то плоскость проходит через соответствующую ось. Если отсутствуют члены с двумя координатами, то плоскость параллельна той координатной плоскости, которая содержит соответствующие оси. Если отсутствуют члены с двумя координатами и свободный член, то плоскость совпадает с одной из координатных плоскостей. Если, наконец, отсутствуют все члены с координатами, а свободный член отличен от нуля, то уравнение смысла не имеет.

Если за параметры принять отрезки $a$, $b$ и $c$, отсекаемые плоскостью на осях координат, то уравнение плоскости примет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{2}$$

Если за параметры принять длину перпендикуляра $p$, опущенного на плоскость из начала координат, и направляющие косинусы этого перпендикуляра ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), то получим **нормальное уравнение плоскости**:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0. \tag{3}$$

Чтобы привести общее уравнение (1) плоскости к нормальному виду, его нужно помножить на **нормирующий множитель**:

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4}$$

Знак нормирующего множителя должен быть противоположен знаку свободного члена уравнения (1).

Расстояние плоскости (1) от начала координат и направляющие косинусы перпендикуляра к этой плоскости выражаются через коэффициенты её уравнения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} p&=\mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\beta&=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Расстояние любой точки $P(x', y', z')$ от плоскости (1) вычисляется по формуле

$$\delta=\pm\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{6}$$

или, если плоскость дана нормальным уравнением, по формуле

$$\delta=x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma-p, \tag{6'}$$

т. е. расстояние точки от плоскости равно левой части нормального уравнения плоскости, в которой текущие координаты заменены координатами данной точки.

Угол между двумя плоскостями

$$\left.\begin{array}{r} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

и

определяется следующим образом:

$$\cos\varphi=\pm\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}. \tag{8}$$

Условие параллельности плоскостей (7):

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}. \tag{9}$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$AA_1+BB_1+CC_1=0. \tag{10}$$

Если плоскость определена тремя точками $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$ и $(x_3, y_3, z_3)$, то уравнение её примет вид:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

Если четыре точки $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$ и $(x_4, y_4, z_4)$ лежат в одной плоскости, то между их координатами существует следующее соотношение:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

Если эти четыре точки не лежат в одной плоскости, то объём тетраэдра, вершинами которого они служат, вычисляется по формуле:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Уравнение

$$Ax+By+Cz+D+k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0, \tag{14}$$

где $k$ — переменный параметр, представляет пучок плоскостей, проходящих через линию пересечения двух основных плоскостей:

$$Ax+By+Cz+D=0 \text{ и } A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Уравнение

$$Ax+By+Cz+D+k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+$$
$$+l(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (15)$$

представляет, при переменных параметрах $k$ и $l$, связку плоскостей, т. е. совокупность всех плоскостей, проходящих через точку пересечения трёх основных плоскостей:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

и

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Связка плоскостей, проходящих через точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, может быть также представлена уравнением:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \quad (16)$$

где $A$, $B$ и $C$ могут принимать любые значения.

**753.** Проходит ли плоскость $4x-y+3z+1=0$ через одну из следующих точек:

$$A(-1;\ +6;\ +3),\ B(+3;\ -2;\ -5),\ C(0;\ +4;\ +1),$$
$$D(+2;\ 0;\ +5),\ E(+2;\ +7;\ 0),\ F(0;\ +1;\ 0)?$$

**754.** Подвижная точка, имевшая начальное положение $M_0(+5;\ -1;\ +2)$, перемещается параллельно оси $y$. Найти точку её встречи с плоскостью $x-2y-3z+7=0$.

**755.** Доказать, что всякое уравнение первой степени $Ax+By+Cz+D=0$ представляет плоскость, основываясь на том, что если координаты двух точек какой-нибудь прямой удовлетворяют этому уравнению, то и координаты любой другой точки этой же прямой удовлетворяют ему.

**756.** Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

a) $3x-5z+1=0$; d) $2x+3y-7z=0$;

b) $9y-2=0$; e) $8y-3z=0$

c) $x+y-5=0$;

относительно осей координат.

**757.** Написать уравнение плоскости:

a) параллельной плоскости $(xz)$ и проходящей через точку $(+2;\ -5;\ +3)$;

b) проходящей через ось $z$ и через точку $(-3;\ +1;\ -2)$;

c) параллельной оси $x$ и проходящей через две точки $(+4;0;\ -2)$ и $(+5;\ +1;\ +7)$.

**758.** Вычислить отрезки, отсекаемые на осях координат следующими плоскостями:

a) $2x - 3y - z + 12 = 0$; d) $x - 4z + 6 = 0$;
b) $5x + y - 3z - 15 = 0$; e) $5x - 2y + z = 0$;
c) $x - y + z - 1 = 0$; f) $x - 7 = 0$.

**759.** Построить линии пересечения координатных плоскостей с плоскостью $5x + 2y - 3z - 10 = 0$.

**760.** Плоскость $3x + y - 2z - 18 = 0$ вместе с координатными плоскостями образует некоторый тетраэдр. Вычислить ребро куба, который можно поместить внутри этого тетраэдра так, чтобы три грани его совпадали с координатными плоскостями, а вершина, противолежащая началу координат, лежала на данной плоскости.

**761.** Через точку $P(+7; -5; +1)$ провести плоскость, которая отсекала бы на осях координат положительные и равные между собою отрезки.

**762.** Три грани тетраэдра, расположенного во втором октанте, совпадают с координатными плоскостями. Написать уравнение четвёртой грани, зная длину рёбер, её ограничивающих:

$$AB = 6; \quad BC = \sqrt{29}; \quad CA = 5.$$

**763.** Привести к нормальному виду уравнения следующих плоскостей:

a) $2x - 9y + 6z - 22 = 0$;
b) $10x + 2y - 11z + 60 = 0$;
c) $6x - 6y - 7z + 33 = 0$.

**764.** Вычислить расстояние плоскости $15x - 10y + 6z - 190 = 0$ от начала координат.

**765.** Составить уравнение плоскости, проходящей от начала координат на расстоянии 6 единиц и отсекающей на осях координат отрезки, связанные соотношением: $a:b:c = 1:3:2$.

**766.** Определить направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к плоскости $2x - y + 2z + 9 = 0$.

**767.** Плоскость отсекает на осях координат следующие отрезки: $a = 11$, $b = 55$, $c = 10$. Вычислить направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к этой плоскости.

**768.** Найти угол между плоскостью $x-y+\sqrt{2}z-5=0$ и плоскостью $(yz)$.

**769.** Найти точку, симметричную с началом координат относительно плоскости $6x+2y-9z+121=0$.

**770.** Найти плоскость, зная, что точка $P(+3;\ -6;\ +2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

**771.** Вычислить расстояние

a) точки $(+3;\ +1;\ -1)$ от плоскости

$$22x+4y-20z-45=0,$$

b) точки $(+4;\ +3;\ -2)$ от плоскости

$$3x-y+5z+1=0,$$

c) точки $(+2;\ 0;\ -{}^1/_2)$ от плоскости

$$4x-4y+2z+17=0.$$

**772.** Вычислить высоту $(h_S)$ пирамиды: $S(0;\ +6;\ +4)$, $A(+3;\ +5;\ +3)$, $B(-2;\ +11;\ -5)$, $C(+1,\ -1;\ +4)$.

**773.** Даны две точки $A(+1;+3;-2)$ и $B(+7;-4;+4)$. Через точку $B$ провести плоскость, перпендикулярную к отрезку $AB$.

**774.** Положение зеркала определяется уравнением $2x-6y+3z-42=0$. С какой точкой должно совпадать зеркальное изображение точки $A(+3;\ -7;\ +5)$?

**775.** Вычислить углы между следующими плоскостями:

a) $4x-5y+3z-1=0$ и $x-4y-z+9=0$;

b) $3x-y+2z+15=0$ и $5x+9y-3z-1=0$;

c) $6x+2y-4z+17=0$ и $9x+3y-6z-4=0$.

**776.** Через точку $M(-5;\ +16;\ +12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось $x$, другая — ось $y$. Вычислить угол между этими двумя плоскостями.

**777.** Составить уравнение плоскости:

a) проходящей через точку $(-2;\ +7;\ +3)$ параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$;

b) проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям:

$$2x-y+5z+3=0 \text{ и } x+3y-z-7=0;$$

c) проходящей через точки $L(0;\ 0;\ +1)$ и $N(+3;\ 0;\ 0)$ и образующей угол в $60^\circ$ с плоскостью $(xy)$.

**778.** Через ось $z$ провести плоскость, образующую с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол $\frac{\pi}{3}$.

**779.** Проверить, что три плоскости $2x-2y+z-3=0$, $3x-6z+1=0$ и $4x+5y+2z=0$ попарно перпендикулярны, и составить формулы преобразования координат, которыми будем пользоваться, если первую плоскость принять за новую плоскость $(xy)$, вторую — за плоскость $(yz)$ и третью — за плоскость $(zx)$. Направление же осей выбрано так, чтобы старое начало относительно новой системы имело положительную абсциссу и отрицательную аппликату.

**780.** Составить уравнение плоскости, зная её расстояние от трёх точек $A(+6;\ +1;\ -1)$, $B(0;\ +5;\ +4)$ и $C(+5;\ +2;\ 0)$, а именно: $d_1=-1$; $d_2=+3$; $d_3=0$.

**781.** Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x-y+7z-4=0$ и $5x+3y-5z+2=0$.

**782.** На оси $z$ найти точку, равноудалённую от двух плоскостей:

$$x+4y-3z-2=0$$

и

$$5x+z+8=0.$$

**783.** Найти центр сферы, вписанной в тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $2x+3y-6z-4=0$.

**784.** Вычислить расстояние между плоскостями:

$$11x-2y-10z+15=0$$

и

$$11x-2y-10z-45=0.$$

**785.** На расстоянии трёх единиц от плоскости $3x-6y-2z+14=0$ провести параллельную ей плоскость.

**786.** Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через две точки $A(+3;\ -2;\ +1)$ и $B(+1;\ +4;\ 0)$.

**787.** Известны координаты вершин тетраэдра: $A(0; 0; +2)$, $B(+3; 0; +5)$, $C(+1; +1; 0)$ и $D(+4; +1; +2)$. Составить уравнения его граней.

**788.** Вычислить объём тетраэдра, данного в предыдущей задаче.

**789.** Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четыре точки:

a) $(+3; +1; 0)$, $(0; +7; +2)$, $(-1; 0; -5)$ и $(+4; +1; +5)$;

b) $(+1; -1; +1)$, $(0; +2; +4)$, $(+1; +3; +3)$ и $(+4; 0; -3)$.

**790.** Найти точку пересечения следующих трёх плоскостей:

a) $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;

b) $x-4y-2z+3=0$, $3x+y+z-5=0$, $-3x+12y+6z-7=0$;

c) $2x-y+5z-4=0$, $5x+2y-13z+23=0$, $3x-z+5=0$.

**791.** Проверить, имеют ли общую точку следующие четыре плоскости:

a) $5x-z+3=0$, $2x-y-4z+5=0$, $3y+2z-1=0$, $3x+4y+5z-3=0$;

b) $5x+2y-6=0$, $x+y-3z=0$, $2x-3y+z+8=0$, $3x+2z-1=0$.

**792.** Через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-1=0$ и $x+5y-z+2=0$ провести плоскость:

a) проходящую через начало координат;

b) проходящую через точку $(+1; +1; +1)$;

c) параллельную оси $y$;

d) перпендикулярную к плоскости $2x-y+5z-3=0$.

**793.** В пучке, определяемом плоскостями $3x+y-2z-6=0$ и $x-2y+5z-1=0$, найти плоскости, перпендикулярные к этим основным плоскостям.

**794.** В пучке, определяемом плоскостями $2x+y-3z+2=0$ и $5x+5y-4z+3=0$, найти две перпендикулярные друг к другу плоскости, из которых одна проходит через точку $(+4; -3; +1)$.

**795.** Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $5x-y+3z-2=0$ и пересекающей её по прямой, лежащей в плоскости $(xy)$.

**796.** Через линию пересечения плоскостей

$$x+28y-2z+17=0$$

и

$$5x+8y-z+1=0$$

провести плоскости, касающиеся сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

**797.** В пучке $x+3y-5+k(x-y-2z+4)=0$ найти плоскость, отсекающую равные отрезки на осях $x$ и $y$.

**797*.** Определить, которая из координатных плоскостей принадлежит пучку:

$$4x-y+2z-6+k(6x+5y+3z-9)=0?$$

**798.** Через линию пересечения плоскостей: $x+5y+z=0$ и $x-z+4=0$ провести плоскость, образующую угол $\frac{\pi}{4}$ с плоскостью $x-4y-8z+12=0$.

**799.** При каких значениях параметров $A$ и $D$ плоскости

$$2x+y-z+3=0,\ x-3y+5=0 \text{ и } Ax+y-2z+D=0$$

принадлежат одному и тому же пучку?

**799*.** Проверить, что плоскости $3x-4y+5=0$, $x-2z+1=0$ и $2y-3z-1=0$ принадлежат одному и тому же пучку плоскостей.

**800.** В связке, определяемой плоскостями $x+y-z+2=0$, $4x-3y+z-1=0$ и $2x+y-5=0$, найти плоскость:

a) проходящую через ось абсцисс;

b) параллельную плоскости $(xz)$;

c) проходящую через начало координат и через точку $P(+1; +3; +2)$.

# ГЛАВА X

# ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

## 1. Уравнения прямой. Угол между двумя прямыми. Условие пересечения двух прямых в пространстве

Прямая линия может быть определена как пересечение двух плоскостей; поэтому она изображается совокупностью двух уравнений первой степени:

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D=0,\\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эта же прямая может быть изображена уравнениями любых двух плоскостей пучка, определяемого плоскостями (1). Особенно удобно выбрать среди этих плоскостей те, которые проектируют данную прямую на две координатные плоскости; такие плоскости соответственно параллельны двум осям координат, и уравнение каждой из них содержит только две координаты. Таким образом, система уравнений прямой (1) может быть приведена к виду:

$$\left.\begin{aligned} x=mz+a,\\ y=nz+b. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Прямая может быть определена двумя своими точками. Если даны координаты двух точек $(x_1, y_1, z_1)$ и $(x_2, y_2, z_2)$, то прямая, через них проходящая, изобразится уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3}$$

Введя обозначения: $x_2-x_1=m$; $y_2-y_1=n$; $z_2-z_1=p$, мы получим каноническую форму уравнений прямой:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}, \tag{4}$$

причём знаменатели $m$, $n$ и $p$ пропорциональны направляющим косинусам прямой

$$m:n:p=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma, \tag{5}$$

и мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Знак в формулах (6) может быть выбран по нашему произволу, но во всех трёх формулах должен быть один и тот же. Перемена знака соответствует изменению положительного направления на прямой.

Угол между двумя прямыми

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}\text{[1]} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1} \tag{7}$$

вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi=\pm\frac{mm_1+nn_1+pp_1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}. \tag{8}$$

Условие параллельности этих прямых:

$$\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}=\frac{p}{p_1}. \tag{9}$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$mm_1+nn_1+pp_1=0. \tag{10}$$

Большинство задач решается проще, если уравнения прямых имеют каноническую форму (4), и очень важно уметь приводить систему общих уравнений (1) к этому виду. Это может быть достигнуто следующим образом: исключая из системы (1) один раз одну координату, другой раз другую, мы переходим к системе (2), потом находим значения $z$ из обоих уравнений (2) и приравниваем их между собой:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z}{1};$$

здесь $c=0$ и $p=1$.

Можем достигнуть цели и иначе: непосредственно из уравнений (1) вычисляем координаты $a$, $b$ и $c$ какой-нибудь точки прямой[2], а затем вместо угловых коэффициентов $m$, $n$ и $p$ берём пропорциональные им величины, вычисленные из пропорции

$$m:n:p=\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Если один из знаменателей $m$, $n$ или $p$ окажется равным нулю, то числитель соответствующей дроби надо положить равным нулю, т. е. система

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

---

[1]) $a$, $b$, $c$ обозначают известные координаты какой-нибудь точки прямой и написаны здесь вместо $x_1$, $y_1$, $z_1$ уравнений (4).

[2]) Одной из координат даём произвольное значение и вычисляем две другие из данных двух уравнений.

равносильна системе $x-a=0$ и $\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$; такая прямая перпендикулярна к оси $x$. Система $\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-c}{p}$ равносильна системе $x-a=0$ и $y-b=0$; прямая параллельна оси $z$.

Если прямая дана одной точкой $(a, b, c)$ и направляющими косинусами $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то можно написать **нормальную систему** уравнений этой прямой:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}. \tag{12}$$

Эти уравнения получаются из (4) умножением всех знаменателей на нормирующий множитель $\pm\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

В нормальной системе (12) каждое из трёх отношений равно расстоянию образующей точки $(x, y, z)$ от постоянной точки $(a, b, c)$. В канонической системе (4) соответствующие отношения лишь пропорциональны этому расстоянию.

Условие, необходимое и достаточное для пересечения двух прямых (7) в пространстве выражается равенством

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

**801.** Указать особенности в расположении следующих прямых:

a) $\begin{cases} Ax+By+Cz=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} Ax+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ B_1y+D_1=0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} By+Cz+D=0, \\ B_1y+C_1z+D_1=0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} Ax+Cz=0, \\ A_1x+C_1z=0; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3y+2z=0, \\ 5x-1=0; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x+y-3z-7=0, \\ 2x+y-3z-7=0. \end{cases}$

**802.** При каком значении свободного члена $D$ прямая

$$\begin{cases} 3x-y+2z-6=0, \\ x+4y-z+D=0 \end{cases}$$

пересекает ось $z$?

**803.** При каких значениях коэффициентов $B$ и $D$ прямая

$$\begin{cases} x-2y+z-9=0, \\ 3x+By+z+D=0 \end{cases}$$

лежит в плоскости $(xy)$?

**804.** Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{cases}$$

для того, чтобы прямая

a) была параллельна оси $x$;
b) пересекла ось $y$;
c) совпала с осью $z$;
d) была параллельна плоскости $(yz)$;
e) лежала в плоскости $(xz)$;
f) проходила через начало координат?

**805.** Написать уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\begin{cases} 5x+8y-3z+9=0, \\ 2x-4y+z-1=0 \end{cases}$$

на три координатные плоскости.

**806.** Какими уравнениями изобразятся проекции прямой

$$\begin{cases} 3x+2y-z+5=0, \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$$

на координатные плоскости?

**807.** Определить следы[1]) прямой

$$\begin{cases} 6x+2y-z-9=0, \\ 3x+2y+2z-12=0 \end{cases}$$

и построить эту прямую.

---

[1]) Следами называются точки пересечения прямой с координатными плоскостями.

**808.** Составить уравнения проекции прямой

$$\begin{cases} x-4y+2z-5=0, \\ 3x+y-z+2=0 \end{cases}$$

на плоскость $2x+3y+z-6=0$.

**809.** Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и через точку $(a, b, c)$.

**810.** Написать уравнения рёбер тетраэдра, вершины которого даны своими координатами: $A(0; 0; +2)$, $B(+4; 0; +5)$, $C(+5; +3; 0)$, $D(-1; +4; -2)$.

**811.** Проверить, лежат ли на одной прямой следующие три точки: $(+3; 0; +1)$, $(0; +2; +4)$, $(+1; +{}^4/_3; +3)$.

**812.** Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями $(x_1; y_1; 0)$ и $(x_2; 0; z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью.

**813.** Определить направляющие косинусы прямых

$$\text{a)}\ \frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12};$$

$$\text{b)}\ \frac{x}{12}=\frac{y-7}{9}=\frac{z+3}{20}.$$

**814.** Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $A(+1; -5; +3)$ и образует с осями координат углы, соответственно равные $60°$, $45°$ и $120°$.

**815.** Определить угол, образованный прямыми:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2} \text{ и } \frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}.$$

**816.** Вычислить углы, образованные противоположными рёбрами тетраэдра с вершинами: $A(+3; -1; 0)$, $B(0; -7; +3)$, $C(-2; +1; -1)$, $D(+3; +2; +6)$.

**817.** Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0. \end{cases}$$

**818.** Вычислить направляющие косинусы прямой

$$\left\{\begin{aligned} 5x-6y+2z+21&=0,\\ x-z+3&=0.\end{aligned}\right.$$

**819.** Определить угол между двумя прямыми

$$\left\{\begin{aligned} 3x-4y-2z&=0,\\ 2x+y-2z&=0\end{aligned}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{aligned} 4x+y-6z-2&=0,\\ y-3z+2&=0.\end{aligned}\right.$$

**820.** Через точку $(+2; -5; +3)$ провести прямую

a) параллельную оси $z$;

b) параллельную прямой $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-6}=\dfrac{z+3}{9}$;

c) параллельную прямой $\left\{\begin{aligned} 2x-y+3z-1&=0,\\ 5x+4y-z-7&=0.\end{aligned}\right.$

**821.** В плоскости $(xz)$ найти прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную к прямой

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}.$$

**822.** Проверить, пересекаются ли следующие прямые:

a) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ и $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$;

b) $\left\{\begin{aligned} 4x+z-1&=0,\\ x-2y+3&=0\end{aligned}\right.$ и $\left\{\begin{aligned} 3x+y-z+4&=0,\\ y+2z-8&=0.\end{aligned}\right.$

**823.** Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(+2; +3; +1)$ на прямую $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

**824.** Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}.$$

**825.** Через точку $A(+4; 0; -1)$ провести прямую так, чтобы она пересекала две данные прямые:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}.$$

**826.** Из всех прямых, пересекающих две прямые:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1},$$

найти ту, которая была бы параллельна прямой

$$\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}.$$

**827.** Составить уравнения общего перпендикуляра двух прямых:

$$\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

## 2. Прямая и плоскость

Чтобы найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{14}$$

и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{15}$$

надо решить совместно эти три уравнения. Решение получится изящнее, если ввести параметр $\rho$, равный трём отношениям (14). Тогда $x=m\rho+a$, $y=n\rho+b$, $z=p\rho+c$; вставляя эти значения координат в уравнение плоскости (15), получим значение $\rho$ и затем уже определим искомые координаты.

Угол между прямой (14) и плоскостью (15) вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{16}$$

Условие параллельности прямой (14) и плоскости (15):

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{17}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{18}$$

Условие того, что прямая (14) целиком лежит в плоскости (15), выражается двумя равенствами:

$$\left.\begin{aligned} Aa+Bb+Cc+D=0,\\ Am+Bn+Cp=0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

**828.** Найти точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x+5y-z-2=0$.

**829.** Найти точку пересечения:

a) прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ и плоскости $3x-3y+2z-5=0$;

b) прямой $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ и плоскости $x+2y-4z+1=0$;

c) прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-5=0$.

**830.** Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x+y-3z+1=0$ с прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$ и $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-6}$.

**831.** При каком значении коэффициента $A$ плоскость $Ax+3y-5z+1=0$ будет параллельна прямой

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}?$$

**832.** При каких значениях коэффициентов $A$ и $B$ плоскость $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$?

**833.** Из точки $(+3;\ -2;\ +4)$ опустить перпендикуляр на плоскость $5x+3y-7z+1=0$.

**834.** Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-2}$.

**835.** Найти проекцию точки $A(+4;\ -3;\ +1)$ на плоскость $x+2y-z-3=0$.

**836.** Проверить, лежит ли прямая:

a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ на плоскости $4x+3y-z+3=0$;

b) $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{3}$ на плоскости $5x-8y-2z-1=0$;

c) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{1}$ на плоскости $3x-2y-z+15=0$.

**837.** Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $(+3;\ +1;\ -2)$ и через прямую

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}.$$

**838.** Через прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x+4y-3z+7=0$.

**839.** Найти проекцию прямой $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x-y+3z+8=0$.

**840.** Проверить, что прямые

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-2}$$

пересекаются, и написать уравнение плоскости, через них проходящей.

**841.** Провести плоскость через перпендикуляры, опущенные из точки $(-3;\ +2;\ +5)$ на плоскости

$$4x+y-3z+13=0 \quad \text{и} \quad x-2y+z-11=0.$$

**842.** Написать уравнение плоскости, проходящей через следующие две параллельные прямые:

$$\frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}.$$

**843.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(+4;\ -3;\ +1)$ и параллельной прямым:

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}.$$

**844.** Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ и параллельной прямой

$$\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}.$$

**845.** Через прямую $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$ провести плоскость, параллельную плоскости $x+y-z+15=0$.

**846.** Можно ли через прямую $\frac{x-7}{4}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-1}{6}$ провести плоскость параллельно плоскости $2x+y-7z+1=0$?

**847.** Через точку $P(+1; 0; +7)$ параллельно плоскости $3x-y+2z-15=0$ провести прямую так, чтобы она пересекала прямую

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}.$$

**848.** Найти расстояние точки $P(+7; +9; +7)$ от прямой

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}.$$

**849.** На прямой $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$ найти точку, ближайшую к точке $(+3; +2; +6)$.

**850.** На прямой $\left\{\begin{array}{r} x+2y+z-1=0 \\ 3x-y+4z-29=0 \end{array}\right\}$ найти точку, одинаково удалённую от двух данных точек $A(+3; +11; +4)$ и $B(-5; -13; -2)$.

**851.** Найти точку, симметричную с точкой $P(+4; +3; +10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

**852.** Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}.$$

**853.** Найти кратчайшее расстояние между двумя не пересекающимися прямыми:

$$\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}.$$

**854.** Вычислить расстояние между прямыми:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}.$$

**855.** Даны вершины треугольника $A(+4; +1; -2)$, $B(2; 0; 0)$, $C(-2; +3; -5)$. Составить уравнения его высоты, опущенной из вершины $B$ на противолежащую сторону.

**856.** Составить уравнения биссектрис угла $A$ треугольника, данного в задаче 855.

**857.** Через сторону $AB$ треугольника задачи 855 провести плоскость, перпендикулярную к плоскости треугольника.

**858.** Дан куб, ребро которого равно единице. Вычислить расстояние между вершиной куба и его диагональю, не проходящей через эту вершину.

**859.** Проверить, что плоскость, перпендикулярная к диагонали куба и проходящая через её середину, пересекает куб по *правильному шестиугольнику*.

# ГЛАВА XI

# СФЕРА

Мы получим уравнение сферической поверхности, выразив аналитически тот факт, что образующая точка $(x, y, z)$ находится от постоянной точки — центра сферы $(a, b, c)$ — на постоянном расстоянии, равном радиусу $R$ сферы:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \tag{1}$$

или в раскрытом виде:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0. \tag{2}$$

Уравнение сферы содержит четыре независимых параметра: координаты центра и радиус. Уравнение это второй степени, поэтому сфера — поверхность второго порядка. Уравнение сферы (2) обладает той особенностью, что коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а члены с произведениями координат отсутствуют. Обратно, если уравнение второй степени удовлетворяет этим двум условиям, то оно изображает сферу, и его можно привести к виду (1), дополняя до полных квадратов группы членов, содержащие одни и те же координаты. При этом для $R^2$ может получиться положительное, нулевое или отрицательное значение; в зависимости от этого сфера будет вещественная, нулевого радиуса (только одна действительная точка) или мнимая.

Если перенести начало координат в центр сферы, то уравнение её примет более простой вид:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{3}$$

Со всякой прямой линией сфера имеет две общие точки (действительные или мнимые); если обе точки пересечения сливаются, то прямая касается сферы, и тогда расстояние её от центра сферы равно радиусу.

Со всякой плоскостью сферическая поверхность пересекается по окружности (действительной или мнимой). Если плоскость находится от центра на расстоянии, равном радиусу, то линия пересечения обращается в круг нулевого радиуса (одна действительная точка); плоскость касается сферы, в ней лежат все прямые, касающиеся сферы в данной точке.

Плоскость, касающаяся сферы (1) в точке $(x_1, y_1, z_1)$, имеет уравнение:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) + (z_1 - c)(z - c) = R^2. \qquad (4)$$

Если сфера отнесена к центру, то касательная плоскость изображается уравнением:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = R^2. \qquad (5)$$

Если перенести все члены уравнения сферы (1) в левую часть, то эта левая часть

$$S = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2$$

представит степень точки $(x, y, z)$ относительно сферы; иначе, она равна квадрату длины касательной, проведённой из точки $(x, y, z)$ к сфере.

**860.** Написать уравнение шаровой поверхности, имеющей центр в точке:

a) $(+2;\ -1;\ +3)$ и радиус $R = 6$;

b) $(0;\ 0;\ 0)$ и проходящей через точку $(+6;\ -2;\ +3)$;

c) $(+1;\ +4;\ -7)$ и касающейся плоскости $6x + 6y - 7z + 42 = 0$;

d) $(+6;\ -8;\ +3)$ и касающейся оси $z$.

**861.** Составить уравнение сферы, описанной около тетраэдра, одна из вершин которого совпадает с началом координат, а три другие находятся в точках: $A(+2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ +5;\ 0)$ и $C(0;\ 0;\ +3)$.

**862.** Найти центр и радиус окружности:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36, \\ 3x + y - z - 9 = 0. \end{cases}$$

**863.** Составить уравнение шаровой поверхности, зная, что она проходит через точку $(0;\ -3;\ +1)$ и пересекает плоскость $(xy)$ по окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z = 0. \end{cases}$$

**864.** Найти проекцию окружности

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=25, \\ 2x-y-2z-10=0 \end{cases}$$

на плоскость $(xz)$.

**865.** Определить координаты центра и величину радиуса для каждой из следующих сфер:

a) $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0$;

b) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$;

c) $x^2+y^2+z^2-6x+10=0$;

d) $x^2+y^2+z^2-4x+12y-2z+41=0$;

e) $36x^2+36y^2+36z^2-36x+24y-72z-95=0$.

**866.** Составить уравнение сферической поверхности, зная, что она проходит через окружность

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2+z^2=36, \\ 4x+y-z-9=0 \end{cases}$$

и через точку $(+7;\ -3;\ +1)$.

**867.** Какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ для того, чтобы эта плоскость касалась сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$?

**868.** В точках пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ и сферы $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=6$ провести касательные плоскости к этой сфере.

**869.** Через ось $x$ провести касательные плоскости к сфере

$$(x+5)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=16.$$

**870.** К сфере $(x-4)^2+y^2+(z-2)^2=225$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $10x-11y-2z+3=0$.

**871.** Написать уравнение сферы, которая касается прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-6}{4}$ в точке $(+1;\ -4;\ +6)$ и прямой $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-6}$ в точке $(+4;\ -3;\ +2)$.

**872.** Написать уравнение сферической поверхности, имеющей центр в точке $C(+4;\ +5;\ -2)$, зная, что шар $x^3+y^2+z^2-4x-12y+36=0$ касается её с внутренней стороны.

**873.** Найти геометрическое место точек, имеющих одинаковую степень относительно двух сфер:

$$(x-5)^2+(y-3)^3+(z+1)^2=9;$$
$$(x-7)^2+y^2+(z-2)^2=16.$$

**874.** Найти геометрическое место точек, имеющих одинаковую степень относительно трёх шаровых поверхностей:

$$x^2+y^2+z^2+10x-2y+21=0;$$
$$x^2+y^2+z^2+4y-6z+7=0;$$
$$x^2+y^2+z^2+2x-8z+8=0.$$

**875.** Найти уравнение шаровой поверхности, ортогональной к четырём следующим поверхностям:

$$x^2+y^2+z^2=9;$$
$$(x+5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=53;$$
$$(x+1)^2+y^3+(z+3)^2=39;$$
$$x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=10.$$

## ГЛАВА XII

## КОНУС И ЦИЛИНДР

**Конической поверхностью** называется поверхность, описываемая подвижной прямой (*образующей*), проходящей через постоянную точку (вершину конуса) и пересекающей некоторую кривую (*направляющую*).

Если даны координаты вершины конуса $(a,\ b,\ c)$ и уравнения направляющей линии:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,\ y,\ z)=0, \\ f_2(x,\ y,\ z)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

то можно составить уравнение конической поверхности следующим образом.

В любой момент своего движения образующая проходит через постоянную точку $(a, b, c)$; её можно изобразить системой уравнений:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{1}\text{[1]}, \tag{2}$$

где $m$ и $n$ — переменные параметры, значения которых ограничены тем, что образующая должна пересекать направляющую (1), т. е. по отношению к координатам $(x, y, z)$ четыре уравнения (1) и (2) должны быть совместны. Исключив из этих четырёх уравнений $x$, $y$ и $z$, получим одно уравнение, связывающее параметры $m$ и $n$:

$$\varphi(m, n)=0. \tag{3}$$

Исключая $m$ и $n$ из уравнений (2) и (3), получим одно уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки подвижной образующей, т. е. искомое уравнение конической поверхности. Проще всего это можно осуществить, вставляя в (3) вместо $m$ и $n$ их значения из (2), и тогда уравнение конуса мы получим в следующем виде:

$$\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0. \tag{4}$$

Если начало координат перенесено в вершину, то уравнение конуса будет:

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0, \tag{4'}$$

т. е. конус с вершиной в начале координат изображается однородным уравнением. Обратно, всякое однородное уравнение представляет конус, вершина которого совпадает с началом координат.

Иногда приходится составлять уравнение конической поверхности, описанной около некоторой данной поверхности, т. е. состоящей из касательных к этой поверхности, проходящих через одну и ту же точку; тогда соотношение (3), связывающее угловые коэффициенты образующей, выводится из условия соприкосновения, а именно: при совместном решении уравнения поверхности и уравнений образующей должны получиться равные корни.

*Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, описанная прямой (*образующей*), не меняющей при движении своего направления и всё время пересекающей определённую кривую (*направляющую*).

Если даны уравнения направляющей линии:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

[1]) Так как направление прямой зависит только от отношений трёх угловых коэффициентов $m$, $n$, $p$, то один из них (не равный нулю) можно считать равным единице.

и направление образующей $(m:n:1)$, то можно составить уравнение цилиндрической поверхности.

Уравнения образующей мы представим в виде:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z}{1}, \tag{6}$$

где $m$ и $n$ — данные угловые коэффициенты, а переменными параметрами являются координаты $a$ и $b$ точки пересечения образующей с плоскостью $(xy)$[1]).

Значения этих параметров ограничены условием пересечения прямой (6) с кривой (5), условием совместности соответствующих уравнений; аналитическое выражение этого ограничения мы получим, исключив из четырех уравнений (5) и (6) координаты $x$, $y$, $z$. Тогда будем иметь:

$$\varphi(a, b)=0. \tag{7}$$

Координаты любой точки подвижной образующей, т. е. координаты любой точки цилиндрической поверхности, должны удовлетворять уравнениям (6) при соблюдении условия (7); исключив из этих трёх уравнений параметры $a$ и $b$, мы получим искомое уравнение цилиндра:

$$\varphi(x-mz, y-nz)=0. \tag{8}$$

Если направляющая дана в одной из координатных плоскостей, то этим самым уже дано нужное нам уравнение (7).

Если требуется составить уравнение цилиндра, описанного около некоторой поверхности, то соотношение, связывающее переменные параметры образующей, находится из условия соприкосновения образующей и данной поверхности.

**876.** Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая дана уравнениями:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-5)^2=9, \\ z=4. \end{cases}$$

**877.** В плоскости $(xy)$ лежит парабола; вершина её совпадает с началом координат, ось — с положительным направлением оси $x$, и параметр $p=2$. Составить уравнение конуса, приняв эту параболу за направляющую и выбрав вершину в точке $(0; 0; +8)$.

---

[1]) Если образующая параллельна этой плоскости, то можно воспользоваться точкой её пересечения с другой координатной плоскостью.

**878.** Найти уравнение конуса, проектирующего эллипс:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

из точки $(+4;\ 0;\ -3)$.

**879.** Прямая, всё время проходящая через точку $(0;\ b;\ 0)$, скользит по гиперболе:

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0. \end{cases}$$

Написать уравнение конической поверхности, описанной этой прямой.

**880.** Направляющая конуса дана уравнениями:

$$\begin{cases} 3x^2+6y^2-z=0, \\ x+y+z=1, \end{cases}$$

а вершина его находится в точке $(-3;\ 0;\ 0)$. Составить уравнение конуса.

**881.** Найти геометрическое место касательных, проведённых из начала координат к сфере $(x-5)^2+(y+1)^2+z^2=16$.

**882.** Составить уравнение круглого конуса, проходящего через все три координатные оси.

**883.** Прямая $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{6}$ вращается около оси $x$. Найти уравнение описанной ею поверхности.

**884.** Найти геометрическое место прямых, проходящих через точку $(+3;\ 0;\ +5)$ и образующих с плоскостью $(xy)$ угол $\dfrac{\pi}{4}$.

**885.** Составить уравнение цилиндра, направляющей которого служит окружность $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=0 \end{cases}$ и направление образующей дано отношениями $m:n:p=5:3:2$.

886. Найти уравнение цилиндра, зная, что он проходит через кривую $\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25, \\ x+y-z+2=0, \end{cases}$ а образующая его: a) параллельна оси $x$; b) параллельна прямой $x=y$, $z=c$.

887. Направляющая цилиндра дана уравнениями: $\begin{cases} x=y^2+z^3, \\ x=2z, \end{cases}$ а образующая его перпендикулярна к плоскости направляющей. Составить уравнение цилиндра.

888. Написать уравнение цилиндра, описанного около сферы $x^2+y^2+z^2=1$, зная, что образующая его составляет равные углы с тремя осями координат.

889. Даны три параллельные прямые: $x=y=z$; $x+1=$ $=y=z-1$; $x-1=y+1=z-2$. Найти проходящий через них круглый цилиндр.

## ГЛАВА XIII

# ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДАННЫЕ ПРОСТЕЙШИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Среди поверхностей второго порядка существуют такие, которые имеют центр симметрии и три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, через него проходящие. Если выбрать эти плоскости за координатные плоскости, то в уравнение поверхности не могут войти члены с первыми степенями координат и члены с их парными произведениями, так как перемена знака у одной из координат, у двух из них или у всех трёх не должна отразиться на уравнении. Таким образом, всякая центральная поверхность, при соответствующем выборе системы координат, изображается уравнением:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}=0, \tag{1}$$

и, в зависимости от знаков коэффициентов, это уравнение изображает различные типы поверхностей, а именно:

1) Мнимый эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ [1]), (2)

когда все четыре коэффициента уравнения (1) имеют одинаковые знаки.

---

[1]) Здесь введены следующие обозначения: $\left|\frac{a_{44}}{a_{11}}\right|=a^2$; $\left|\frac{a_{44}}{a_{22}}\right|=b^2$; $\left|\frac{a_{44}}{a_{33}}\right|=c^2$.

2) Действительный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, (3)

когда знак свободного члена противоположен знаку остальных.

3) Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, (4)

когда знак свободного члена противоположен знаку только двух других коэффициентов.

4) Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, (5)

когда знак свободного члена противоположен знаку только одного из остальных коэффициентов.

Рассмотрим ещё случаи, когда некоторые из коэффициентов обращаются в нуль:

1) Мнимый конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (6)

и действительный конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, (6′)

когда свободный член равен нулю. Вершина конуса служит его центром.

2) Мнимый цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$, (7)

эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (7′)

и гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, (7″)

когда коэффициент при одной из координат равен нулю. Цилиндр имеет линию центров, так называемую ось цилиндра.

3) Пара мнимых плоскостей $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, (8)

пара мнимых плоскостей $\frac{x^2}{a^2}=-1$. (8′)

пара действительных плоскостей $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (8″)

и пара действительных плоскостей $\frac{x^2}{a^2}=1$, (8‴)

когда два коэффициента обращаются в нуль. Если поверхность распадается на пару пересекающихся плоскостей, то она имеет линию центров; если поверхность распадается на пару параллельных (или сливающихся) плоскостей, то она имеет целую плоскость центров.

Остальные поверхности второго порядка не имеют ни центра, ни трёх плоскостей симметрии, и их уравнения не могут быть приведены к виду (1). Но они имеют две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, и соответствующим выбором системы координат можно добиться, чтобы их уравнение содержало только три члена: квадраты двух координат и первую степень третьей координаты, а именно:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z=0. \tag{9}$$

Здесь придётся различать три случая:

1) Эллиптический параболоид $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ [1], (10)

когда коэффициенты при квадратах координат имеют одинаковые знаки.

2) Гиперболический параболоид $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$, (11)

когда коэффициенты при квадратах координат имеют разные знаки.

3) Параболический цилиндр $z=\frac{x^2}{2p}$ или $z=\frac{y^2}{2q}$, (12)

когда один из коэффициентов при квадратах координат равен нулю.

Предположение $a_{34}=0$ приведёт к разобранному случаю распадающейся поверхности.

Поверхности второго порядка пересекаются с прямой, вообще говоря, в двух точках (действительных или мнимых); если эти точки пересечения сливаются, прямая касается поверхности. Прямые, не имеющие ни одной общей точки (действительной или мнимой) с поверхностью в конечной части пространства, называются её асимптотами; все прямые, им параллельные, пересекают поверхность не более чем в одной точке.

Если прямая имеет с поверхностью более двух общих точек, то она целиком лежит на поверхности и называется прямолинейной образующей этой поверхности.

Из нераспадающихся поверхностей второго порядка, кроме цилиндра и конуса, только однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид имеют действительные прямолинейные образующие.

Гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ имеет две серии прямолинейных образующих, которые определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ k\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\ \text{и}\ \left.\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=l\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ l\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $k$ и $l$ — произвольные параметры.

---

[1] Здесь введены обозначения: $p=\left|\frac{a_{34}}{a_{11}}\right|$ и $q=\left|\frac{a_{34}}{a_{22}}\right|$.

Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$ содержит тоже две серии прямых:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}&=k,\\ k\left(\frac{x}{\sqrt{2p}}-\frac{y}{\sqrt{2q}}\right)&=z\end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned}l\left(\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}\right)&=z,\\ \frac{x}{\sqrt{2p}}-\frac{y}{\sqrt{2q}}&=l.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Поверхность второго порядка пересекается всякой плоскостью по кривой второго порядка (действительной или мнимой). Сечения поверхности её плоскостями симметрии называются **главными сечениями**; вершины и оси главных сечений называются **вершинами и осями поверхности**. Сечения параллельными плоскостями дают подобные кривые. Плоскость, проходящая через центр, называется её **диаметральной плоскостью**.

Касательная плоскость поверхности в данной точке есть геометрическое место прямых, касающихся поверхности в этой точке. Касательная плоскость имеет с поверхностью или одну действительную общую точку, как, например, у сферы, или пересекает поверхность по распавшейся кривой второго порядка; у конуса и цилиндра эта кривая состоит из двух слившихся прямых, у однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида — из двух различных прямолинейных образующих.

Плоскость, касающаяся поверхности в точке $(x_1, y_1, z_1)$, определяется следующим образом:

| Уравнение поверхности | Уравнение касательной плоскости |
|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$ | $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}\pm\frac{zz_1}{c^2}=\pm 1,$ |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=0,$ | $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}\pm\frac{zz_1}{c^2}=0,$ |
| $z=\frac{x^2}{2p}\pm\frac{y^2}{2q},$ | $z+z_1=\frac{xx_1}{p}\pm\frac{yy_1}{q},$ |

причём комбинация знаков в уравнении касательной плоскости должна быть та же, что и в уравнении соответствующей поверхности.

Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку прикосновения, называется **нормалью** к поверхности в данной точке.

Все поверхности второго порядка, кроме гиперболического параболоида, гиперболических и параболических цилиндров, имеют среди своих плоских сечений сечения **круговые**. Поверхность, если она не является поверхностью вращения, содержит две серии кругов, расположенных в параллельных плоскостях. Точки поверхности, в которых касательные плоскости параллельны круговым сечениям, называются **точками округления**.

Пучки параллельных плоскостей, дающих в сечении с поверхностью круги, определяются следующими уравнениями:

| Поверхность | Плоскости круговых сечений | Примечания |
|---|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$ | $\left\{\begin{array}{l} 1)\ \frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=k_1, \\ 2)\ \frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=k_2 \end{array}\right\}$ | $a>b>c$; $k_1$ и $k_2$ — параметры пучков |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$ | $\left\{\begin{array}{l} 1)\ \frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=k_1, \\ 2)\ \frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=k_2. \end{array}\right\}$ | $a>b$ |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ | $\left\{\begin{array}{l} 1)\ \frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}+z=k_1, \\ 2)\ \frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}-z=k_2. \end{array}\right\}$ | $a>b$ |
| $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q},$ | $\left\{\begin{array}{l} 1)\ y\sqrt{\frac{p-q}{q}}+z=k_1, \\ 2)\ y\sqrt{\frac{p-q}{q}}-z=k_2. \end{array}\right\}$ | $p>q$ |

**890.** Найти главные сечения эллипсоида $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, определить его вершины и длину осей.

**891.** Исследовать сечения эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

**892.** Найти отношение осей двух параллельных сечений эллипсоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, а именно: сечения плоскостью $(xz)$ и плоскостью, отстоящей от неё на расстоянии двух единиц.

**893.** По неизменному эллипсу $\left\{\begin{array}{l}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0\end{array}\right.$ скользят две вершины другого эллипса, который перемещается так, что плоскость его остаётся всё время перпендикулярной к оси $y$, а сам он деформируется, сохраняя постоянное отношение осей $c:a$[1]). Найти поверхность, описанную этим вторым эллипсом.

**894.** Найти проекцию на плоскость $(xy)$ линии пересечения эллипсоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ и плоскости $x+4z-4=0$.

**895.** Найти центр линии пересечения эллипсоида и плоскости, заданных в предыдущей задаче.

**896.** Дан однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$. Найти линии его пересечения с координатными плоскостями и с плоскостями, им параллельными и проходящими по обе стороны от них на расстоянии 1, 2, 3, 4 и 5 единиц. Начертить проекции всех этих сечений на соответствующие координатные плоскости.

**897.** Исследовать линию пересечения гиперболоида

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$$

с плоскостью $4x-3y-12z-6=0$, пользуясь её проекциями на координатные плоскости.

**898.** Найти плоскости, параллельные координатным плоскостям и пересекающие двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{4}=-1$ по кривым, оси которых вдвое больше осей соответствующих главных сечений гиперболоида.

**899.** Какие поверхности изображаются уравнениями:

$$\text{a)}\ \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0,\qquad \text{b)}\ \frac{x^2}{4}-y^2+\frac{z^2}{4}=0;$$

$$\text{c)}\ -\frac{x^2}{9}+\frac{y^2+z^2}{16}=0$$

и какое геометрическое значение имеют параметры $a$ и $b$ в уравнении а)?

**900.** Найти угол между образующей и осью (вращения) конуса:

$$x^2+y^2-\frac{z^2}{3}=0.$$

---

[1]) При вычислении отношения осей за первую ось взята та, которая лежит в плоскости неподвижного эллипса.

**901.** Вычертить главные сечения эллиптического параболоида

$$z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$$

и проекции параллельных им сечений на соответствующие координатные плоскости.

**902.** Решить предшествующую задачу по отношению к гиперболическому параболоиду $z=\frac{x^2}{4}-y^2$.

**903.** В плоскости $(yz)$ дана неподвижная парабола $y^2=2qz$, и по ней скользит вершина другой неизменной параболы, параметр которой равен $p$ и которая перемещается так, что плоскость её остаётся всё время перпендикулярной к оси $y$, а ось её параллельна оси $z$. Найти поверхность, описанную подвижной параболой.

**904.** Найти точки пересечения поверхности:

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ с прямой $\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$;

b) $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1$ с прямой $x-3=y-1=\frac{z-6}{3}$;

c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$ с прямой $\frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{1}$;

d) $4z=x^2-4y^2$ с прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-2}$.

**905.** Вычислить длину диаметра поверхности $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{9}=1$, проходящего через точку $(+4;\ -{}^8/_9;\ +{}^8/_3)$.

**906.** Через точку $(+2;+1;-1)$ провести такую хорду поверхности $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, которая делилась бы в этой точке пополам.

**907.** Через точку $(+5;\ +1;\ +2)$ провести прямую так, чтобы она пересекла поверхность $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ лишь в одной точке.

**908.** Найти геометрическое место прямых, проходящих через центр поверхности второго порядка и не имеющих с ней общих точек (ни действительных, ни мнимых).

**909.** Найти геометрическое место прямых, проведённых через вершину параболоида $\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = z$ так, чтобы, не будучи касательными к поверхности, они не имели с ней второй точки пересечения.

**910.** Найти геометрическое место касательных к поверхности

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

проведённых из точки $(+5; +1; 0)$.

**911.** Найти геометрическое место касательных прямых к поверхности $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 1$, образующих равные углы с осями координат.

**912.** Найти прямые, проходящие через точку $(+6; +2; +8)$ и лежащие целиком на поверхности $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$.

**913.** На параболоиде $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ найти прямолинейные образующие, параллельные плоскости $3x + 2y - 4z = 0$.

**914.** Доказать, что прямолинейные образующие однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ проектируются на координатные плоскости в касательные к соответствующим главным сечениям.

**915.** Исследовать, как расположены (в координатных плоскостях) по отношению к главным сечениям проекции прямолинейных образующих гиперболического параболоида $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$.

**916.** Доказать, что однополостный гиперболоид вращения может быть описан прямой, вращающейся около оси, не лежащей с ней в одной плоскости.

**917.** Определить поверхность, которую описывает прямая, скользящая по трём прямым:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}; \qquad \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1},$$

из которых никакие две не лежат в одной плоскости.

**918.** По двум прямым $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-1}=$ $=\frac{z+1}{2}$ перемещаются две точки с одинаковой и постоянной скоростью; они одновременно пересекают плоскость $(xy)$, но в то время как одна поднимается над этой плоскостью, другая, наоборот, опускается вниз. Найти поверхность, которую опишет прямая, соединяющая обе подвижные точки.

**919.** Составить уравнение поверхности, образованной прямой, которая скользит по прямым $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ и $\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$, оставаясь всё время параллельной плоскости $2x+3y-5=0$.

**920.** Написать уравнение плоскости, касающейся поверхности $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=-1$ в точке $(-6;\ +2;\ +6)$.

**921.** В точке $(-2;\ +1;\ -{}^1/_2)$ провести нормаль к эллипсоиду $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$.

**922.** Найти касательные плоскости эллипсоида $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{6}+$ $+\frac{z^2}{4}=1$, которые были бы параллельны плоскости $2x+2y-$ $-3z=0$.

**923.** Найти касательные плоскости параболоида $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=z$, которые были бы параллельны плоскости $x-y-2z=0$.

**924.** Найти плоскость, касающуюся конуса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-z^2=0$ в точке $(+4;\ -6;\ +4)$.

**925.** Доказать, что нормаль, проведённая в любой точке круглого конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, пересекает ось этого конуса.

**926.** Какому условию должны удовлетворять параметры эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, если он обладает тем свойством, что все его нормали проходят через начало координат?

**927.** На эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ найти точки, нормали в которых пересекают ось $z$.

**928.** Найти касательную плоскость цилиндра $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$, зная отношение $a:b=5:4$ отрезков, отсекаемых ею на осях $x$ и $y$.

**929.** Доказать, что все нормали цилиндра $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ параллельны одной и той же плоскости.

**930.** Доказать, что касательные плоскости, проведённые к поверхности второго порядка в концах одного и того же диаметра, параллельны между собой, и, обратно, если две касательные плоскости одной и той же поверхности параллельны между собой, то точки прикосновения лежат на одном диаметре.

**931.** Какому условию должны удовлетворять коэффициенты плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ для того, чтобы она касалась: a) центральной поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$; b) параболоида $\frac{x^2}{2p}\pm\frac{y^2}{2q}=z$.

**932.** К однополостному гиперболоиду $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ провести касательные плоскости через каждую из следующих прямых:

a) $\frac{x}{3}=\frac{y+9}{3}=\frac{z}{1}$; b) $\frac{x-9}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$; c) $\frac{x}{6}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$

и исследовать, как эти прямые расположены относительно гиперболоида.

**933.** Через прямую $y=0$; $z=1$ провести касательные плоскости к двуполостному гиперболоиду $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=-1$ и определить точки их прикосновения.

**934.** Как должна быть расположена прямая относительно поверхности второго порядка типа $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$ или $\frac{x^2}{2p}\pm\frac{y^2}{2q}=z$ для того, чтобы через неё можно было провести две действительные и различные касательные плоскости к этой поверхности?

**935.** Дан гиперболический параболоид $x^2-\frac{y^2}{4}=z$ и одна из его касательных плоскостей: $10x-2y-z-21=0$.

Найти уравнения каждой из тех двух прямых, по которым они пересекаются.

**936.** Найти диаметральные плоскости эллипсоида $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$, пересекающие его по кругам.

**937.** Определить радиус кругов, лежащих на однополостном гиперболоиде $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ и касающихся горлового эллипса.

**938.** Найти точки округления эллиптического параболоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=z$.

## ГЛАВА XIV

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### 1. Общее уравнение поверхности второго порядка и его преобразование при переносе начала координат. Центр поверхности. Условие, при котором уравнение изображает конус или пару плоскостей

Общее уравнение поверхности второго порядка, т. е. уравнение второй степени относительно декартовых координат $x$, $y$ и $z$, содержит десять членов: шесть членов второй степени (с квадратами каждой из координат и с парными произведениями координат), три члена первой степени и свободный член. Все коэффициенты этого уравнения обозначаются буквой $a$ с двумя нижними указателями, зависящими от того, какие переменные множители входят в состав члена: указатель 1 соответствует множителю $x$, указатель 2 — множителю $y$, указатель 3 — множителю $z$; в членах низшей степени места недостающих множителей отмечаются указателем 4. Коэффициенты с неодинаковыми указателями имеют ещё числовой множитель 2. Таким образом, общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{14}x+2a_{24}y+\\+2a_{34}z+a_{44}=0. \quad (1)$$

Если, не меняя направления осей координат, перенести начало координат в любую точку $O'(x'; y'; z')$, то уравнение поверхности

(1) преобразуется в следующее:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}XY + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + \\ + 2F_{x'}X + 2F_{y'}Y + 2F_{z'}Z + 2F' = 0, \quad (2)$$

где

$$\left.\begin{aligned} 2F' &= a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + \\ &\quad + 2a_{14}x' + 2a_{24}y' + 2a_{34}z' + a_{44}; \\ 2F_{x'} &= 2(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}); \\ 2F_{y'} &= 2(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}); \\ 2F_{z'} &= 2(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34}), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

т. е. коэффициенты старших членов не изменятся, коэффициенты при первых степенях координат будут равны частным производным от левой части первоначального уравнения (1) по соответствующим координатам с заменой текущих координат координатами нового начала, а свободный член равен всей левой части первоначального уравнения, в которой произведена та же замена.

Если поверхность второго порядка (1) имеет центр симметрии $(x_0; y_0; z_0)$ и начало координат будет перенесено в этот центр поверхности, то преобразованное уравнение не будет содержать членов первой степени, а потому примет вид:

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}XY + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2F^0 = 0. \quad (4)$$

Таким образом, координаты центра $(x_0; y_0; z_0)$ обращают в нуль коэффициенты $F_{x_0}$, $F_{y_0}$, $F_{z_0}$ и, следовательно, их можно определить из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0; \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0; \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Решая уравнения (5), получим:

$$x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad z_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (6)$$

Если дискриминант старших членов не равен нулю, т. е.

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

система уравнений (5) окажется определённой, и поверхность в этом случае будет иметь единственный центр; мы называем такую поверхность второго порядка **центральной**.

Если уравнения (5) несовместны ($\delta=0$), поверхность не имеет центра в конечной части пространства и называется **параболоидом**.

Если система уравнений (5) неопределённая, поверхность имеет бесчисленное множество центров: линию центров или плоскость центров в зависимости от того, будет ли система (5) содержать два независимых уравнения или только одно.

Вставляя координаты центра в левую часть первоначального уравнения (1) поверхности, мы сможем выразить свободный член преобразованного уравнения (4) через коэффициенты первоначального уравнения:

$$2F^0=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}=\frac{\Delta}{\delta}.$$

Определитель четвёртого порядка $\Delta$ называется дискриминантом уравнения поверхности. Таким образом, поверхность (1), отнесённая к своему центру, изобразится уравнением:

$$a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{12}XY+2a_{23}YZ+2a_{31}ZX+\frac{\Delta}{\delta}=0. \quad (7)$$

Необходимое условие для того чтобы уравнение (1) изображало конус, заключается в равенстве нулю дискриминанта уравнения:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=0. \quad (8)$$

Если условие (8) выполнено, то координаты вершины конуса могут быть определены из любых трёх уравнений следующей системы:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}=0;\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0;\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}=0;\\ a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}=0.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Если уравнения (9) не дают конечных значений для координат вершины, то мы имеем частный вид конуса — **цилиндр**.

Если система (9) неопределённая и содержит два независимых уравнения, то вершина конуса становится неопределённой; за вершину можно принять любую точку некоторой прямой — конус распадается на **пару плоскостей**, пересекающихся по этой прямой; если эти два независимых уравнения окажутся несовместными, то поверхность состоит из пары параллельных плоскостей.

Если, наконец, система (9) содержит только одно независимое уравнение, конус вырождается в пару слившихся плоскостей.

Если уравнение (1) изображает конус, то вершина его служит центром поверхности (сравнить уравнения (5) и (9)).

Эллиптический и гиперболический цилиндры имеют линию центров; параболический цилиндр не имеет ни одного центра в конечной части пространства. Пара пересекающихся плоскостей имеет линию центров, а пара параллельных или слившихся плоскостей имеет плоскость центров.

**939.** Какой вид примет уравнение поверхности

$$x^2+2y^2+z^2-4xy+6yz-2zx+10x-5=0,$$

если перенести начало координат в точку $O'(-1;\ +1;\ +2)$?

**940.** Найти преобразованное уравнение поверхности

$$x^2+5y^2+4z^2+4xy-2yz-4zx-2x-10y+4z=0,$$

после того как начало координат будет перенесено в точку

$$(+3;\ 0;\ +1).$$

**941.** Найти центр и определить вид каждой из следующих поверхностей:

1) $4x^2+2y^2+12z^2-4xy+8yz+12zx+14x-10y+7=0;$

2) $5x^2+9y^2+9z^2-12xy-6zx+12x-36z=0;$

3) $5x^2+2y^2+2z^2-2xy-4yz+2zx-4y-4z+4=0;$

4) $x^2-2y^2+z^2+6yz-4zx-8x+10y=0;$

5) $4x^2+y^2+9z^2-4xy-6yz+12zx+8x-4y+12z-5=0;$

6) $x^2+4y^2+5z^2+4xy-12x+6y-9=0;$

7) $3x^2+2y^2+4yz-2zx-4x-8z-8=0;$

8) $x^2+25y^2+9z^2-10xy-30yz+6zx-2x-2y=0.$

**942.** Как преобразуется уравнение поверхности

$$x^2-14y^2+10z^2-4xy-24yz+6zx+2x+20y+8z-9=0,$$

если перенести начало координат в центр этой поверхности?

**943.** Пользуясь перенесением начала координат, упростить уравнения следующих центральных поверхностей:

1) $x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z=0$;
2) $y^2+3xy+2yz+zx+3x+2y=0$;
3) $x^2+2y^2-z^2+2x-4y+2z+1=0$.

**944.** Проверить, что уравнение

$$2x^2+4y^2-z^2-8xy+8x-8y+4=0$$

изображает действительный конус, и найти его вершину.

**945.** При каком значении параметра $a$ уравнение

$$x^2+3y^2+2ayz+2zx-2x-8y-2z-3=0$$

изображает конус?

**946.** Исследовать, которые из нижеследующих уравнений изображают конус, цилиндр или пару плоскостей:

1) $9x^2-4y^2-91z^2-40yz+18zx-36=0$;
2) $x^2+2y^2+3z^2-6z+3=0$;
3) $2x^2-3z^2+4xy+2yz-5zx-8x-12y+17z+$
$+6=0$;
4) $x^2-5z^2+3xy+2yz-7x-6y-2z+10=0$;
5) $x^2+2y^2+4z^2-2xy-4yz+2x-2y-4=0$;
6) $x^2+3y^2+8z^2+2xy+8yz-4x+8z+6=0$.

**947.** Определить вид поверхностей, заданных следующими однородными уравнениями второй степени:

1) $6x^2+9y^2+z^2+6xy-4zx=0$;
2) $4x^2-2y^2-12z^2+4xy+12yz=0$;
3) $x^2-3y^2+4zx-2yz=0$;
4) $x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2zx=0$;
5) $4x^2+2y^2+10z^2-4xy-8yz+12zx=0$.

### 2. Пересечение поверхности с прямой и с плоскостью. Асимптотические направления. Касательная плоскость

Координаты точек пересечения поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{14}x+2a_{24}y+ \\ +2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (1)$$

и прямой $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ (*) определяются из системы трёх уравнений (1) и (*), которые, вообще говоря, имеют две тройки общих решений, а потому поверхность второго порядка пересекается с прямой в двух точках (действительных или мнимых). Если прямая (*) имеет с поверхностью (1) более двух общих точек, то она целиком лежит на поверхности и называется её *прямолинейной образующей*. Если при совместном решении уравнений (1) и (*), после исключения двух координат мы получим для определения третьей координаты уравнение первой степени (коэффициент при квадрате определяемой координаты обращается в нуль), то прямая имеет с поверхностью лишь одну общую точку в конечной части пространства; в этом особом случае мы говорим, что прямая имеет *асимптотическое направление* по отношению к поверхности. Поверхность второго порядка имеет бесчисленное множество асимптотических направлений (действительных или мнимых). Если из начала координат провести все прямые асимптотического направления по отношению к поверхности (1), то их геометрическое место окажется конической поверхностью, уравнение которой получим, приравняв нулю старшие члены уравнения (1):

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=0.$$

О том, будет ли полученное уравнение представлять действительный или мнимый конус, или пару плоскостей, можно судить, исследовав сечение этой поверхности с любой плоскостью, не проходящей через начало координат.

Если провести прямые асимптотического направления через центр поверхности (1), то их уравнения окажутся несовместными с уравнением поверхности, т. е. эти прямые не будут иметь ни одной общей точки с поверхностью в конечной части пространства. Такие прямые называются *асимптотами* поверхности. Совокупность всех асимптот поверхности составляет *асимптотический конус*.

Прямая, пересекающая поверхность в двух сливающихся точках, называется *касательной* прямой к поверхности, и общая их точка называется *точкой прикосновения*. Геометрическое место прямых, касающихся поверхности в одной и той же точке, есть плоскость — *касательная плоскость* к поверхности в рассматриваемой точке.

Касательная плоскость к поверхности (1) в точке $(x'; y'; z')$ имеет следующее уравнение:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14})\,x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24})\,y + \\ +(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34})\,z + (a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}) = 0. \quad (10)$$

Касательная плоскость пересекает поверхность по распавшейся кривой второго порядка[1]). Всякая другая плоскость пересекает поверхность по нераспавшейся кривой второго порядка (действительной или мнимой).

Чтобы исследовать линию пересечения поверхности с плоскостью, удобно воспользоваться цилиндром, проектирующим эту линию на одну из координатных плоскостей: в зависимости от того, будет ли этот цилиндр эллиптическим, гиперболическим, параболическим, распавшимся на пару плоскостей или мнимым (о чём мы судим по направляющей цилиндра, лежащей в соответствующей координатной плоскости), — изучаемая кривая будет эллипсом, гиперболой, параболой, парой прямых или мнимой кривой второго порядка.

**948.** Найти точки пересечения поверхности

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 - 3yz + 5zx - 10x + 12z + 4 = 0$$

с осями координат.

**949.** Какому условию должны удовлетворять коэффициенты общего уравнения поверхности второго порядка для того, чтобы:

a) ось абсцисс касалась поверхности;

b) ось абсцисс имела одно из асимптотических направлений относительно поверхности;

c) ось абсцисс являлась одной из асимптот поверхности;

d) ось абсцисс целиком лежала на поверхности;

e) ось абсцисс не имела действительных точек пересечения с поверхностью?

**950.** Какой вид имеет уравнение поверхности второго порядка, если эта поверхность

a) проходит через все три оси координат;

b) имеет все три оси координат своими асимптотами?

---

[1]) Линия пересечения поверхности с касательной плоскостью может распасться на пару действительных пересекающихся прямых или на пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке; в обоих случаях точка пересечения прямых является точкой прикосновения касательной плоскости к поверхности. Если же линия пересечения распадается на пару слившихся прямых, то точка прикосновения остаётся неопределённой, и плоскость касается поверхности по всей прямой (конус и цилиндр).

**951.** Найти точки пересечения поверхности

$$z^2+xy-yz-5x=0$$

с прямой $\frac{x}{-1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-10}{7}$.

**952.** Найти точки пересечения поверхности

a) $5x^2+9y^2+9z^2-12xy-6zx+12x-36z=0$

с прямой $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{1}$;

b) $x^2-2y^2+z^2-2xy-yz+4zx+3x-5z=0$

с прямой $\frac{x+3}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}$.

**953.** Найти прямые, проходящие через начало координат и целиком лежащие на поверхности:

$$y^2+3xy+2yz-zx+3x+2y=0.$$

**954.** Найти те прямолинейные образующие поверхности:

$$x^2+y^2+5z^2-6xy+2yz-2zx-12=0,$$

которые параллельны прямой:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}.$$

**955.** Какому условию должны удовлетворять угловые коэффициенты прямых, имеющих асимптотическое направление относительно поверхности:

a) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+$
$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$;

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$;

c) $\frac{x^2}{2p_1}-\frac{y^2}{2q_1}=z$?

**956.** Которые из следующих прямых:

1) $\frac{x-4}{6}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{2}$;

2) $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+3}{1}$;

3) $\frac{x}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-1}{-4}$;

4) $\frac{x+1}{6}=\frac{y}{-6}=\frac{z-4}{5}$;

5) $\frac{x-0,5}{14}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{42}$,

имеют асимптотическое направление относительно поверхности

$$x^2-4xy+6yz+2x-5=0?$$

**957.** Существуют ли прямые, имеющие асимптотическое направление относительно поверхности

$$x^2+4y^2-3z^2-4xy-\frac{5}{4}zx+5y+3=0$$

и вместе с тем перпендикулярные к оси $z$? Существуют ли на этой поверхности прямолинейные образующие, перпендикулярные к оси $z$?

**958.** Составить уравнение поверхности второго порядка, зная уравнения трёх её прямолинейных образующих:

$$\begin{cases} y=0, \\ z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=y, \\ z=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ z=2. \end{cases}$$

**959.** Найти и исследовать геометрическое место прямых, проходящих через начало координат и имеющих асимптотическое направление относительно поверхности

$$2xy+yz-zx-2x+2y-3z-2=0.$$

**960.** Найти прямые, проходящие через начало координат и встречающие поверхность

$$x^2+2y^2+4z^2+4yz-2xy+5x-z+3=0$$

лишь в одной точке.

**961.** Найти прямые, проходящие через точку $(+1; -1; +3)$ и имеющие асимптотическое направление относительно поверхности:

$$2x^2+y^2+2xy-3x+z-1=0.$$

**962.** Найти геометрическое место прямых, проходящих через начало координат и имеющих асимптотическое направление относительно поверхности:

$$2x^2-y^2-3z^2-xy+4yz-zx+5x-3y+7=0.$$

**963.** Исследовать конус асимптотических направлений поверхности:

$$x^2+2y^2-3z^2+2zx-2yz+4x=0.$$

**964.** Составить уравнение асимптотического конуса для каждой из следующих поверхностей:

1) $x^2+y^2+z^2+2xy-2yz+6zx+2x-6y-2z=0$;

2) $9x^2+36y^2+4z^2-72x+24z-144=0$;

3) $2x^2+6y^2+2z^2+8zx-4x-8y+3=0$.

**965.** Найти линию пересечения поверхности:

a) $3x^2+4y^2-5z^2+2xy-3yz+5x-8=0$

с плоскостью $(xy)$;

b) $x^2+3z^2+2xy+4zx+2yz+5x-z-1=0$

с плоскостью $(yz)$;

c) $x^2+y^2-2xy+5yz+zx-x+3y-z=0$

с плоскостью $(zx)$.

**965*.** Составить уравнение поверхности, зная одну из её точек $M(+2;\ 0;\ -1)$, центр $C(0;\ 0;\ -1)$ и линию её пересечения с плоскостью $(xy)$:

$$\left\{\begin{aligned} x^2-4xy-1&=0,\\ z&=0.\end{aligned}\right.$$

**966.** Какому условию должны удовлетворять коэффициенты общего уравнения поверхности второго порядка для того, чтобы поверхность касалась координатной плоскости $(xy)$?

**967.** Исследовать линию пересечения поверхности

$$3y^2+4z^2+24x+12y-72z+360=0$$

с плоскостью $x-y+z=1$.

**968.** Определить вид кривой, по которой плоскость $2x-y+z=0$ пересекает поверхность:

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0.$$

**969.** Исследовать линию пересечения поверхности

a) $x^2-3y^2+z^2-6xy+2yz-3y+z-1=0$

с плоскостью $2x-3y-z+2=0$;

b) $x^2+y^2+z^2-6x-2y+9=0$

с плоскостью $x+y-2z-1=0$.

200-

**970.** Линия пересечения поверхности

$$x^2-2y^2+z^2-4yz-8zx+4xy-2x+8y-4z-2=0$$

с некоторой плоскостью имеет центр в начале координат. Найти уравнение секущей плоскости.

**971.** Составить уравнение плоскости, касающейся поверхности

$$5x^2-y^2+z^2+4xy+6zx+2x+4y+6z-8=0$$

в точке $(0;\ -4;\ +4)$ и уравнения нормали в этой же точке.

**972.** Составить уравнение касательной плоскости к поверхности

$$4x^2+5y^2+9z^2-8x+18z+12=0$$

в точке $\left(+1;\ 0;\ -\frac{2}{3}\right)$ и исследовать линию пересечения найденной плоскости с данной поверхностью.

**973.** Найти те касательные плоскости к поверхности

$$4x^2+6y^2+4z^2+4zx-8y-4z+3=0,$$

которые параллельны плоскости $x+2y+7=0$.

**974.** На поверхности

$$x^2+5y^2-z^2-4zx+6x-20y-2z-1=0$$

найти точки, в которых нормали параллельны оси ординат.

**975.** Через прямую $\left\{\begin{matrix} 4x-5y=0, \\ z-1=0 \end{matrix}\right\}$ провести касательную плоскость к поверхности

$$2x^2+5y^2+2z^2-2xy+6yz-4x-y-2z=0.$$

**976.** Через ось ординат провести касательную плоскость к поверхности:

$$5x^2-8y^2+5z^2+6zx+4x-2z=0.$$

**977.** Найти геометрическое место касательных, проведённых из начала координат к поверхности

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0.$$

**978.** Найти линию, по которой конус, найденный в предшествующей задаче, касается данной поверхности.

**979.** Найти геометрическое место прямых, параллельных оси $z$ и касающихся поверхности

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0.$$

## 3. Диаметральная плоскость. Главные направления. Исследование общего уравнения поверхности второго порядка и приведение его к простейшему виду

Если мы рассмотрим все хорды поверхности

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{14}x+2a_{24}y+\\+2a_{34}z+a_{44}=0, \tag{1}$$

имеющие одно и то же направление $(m, n, p)$, то геометрическое место середин этих хорд есть плоскость — **диаметральная плоскость**, сопряжённая данным хордам. Плоскость эта изображается уравнением:

$$m(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14})+n(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24})+\\+p(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34})=0,$$

или, пользуясь сокращёнными обозначениями:

$$mF_x+nF_y+pF_z=0. \tag{11}$$

Меняя направление хорд $(m, n, p)$, мы будем получать различные диаметральные плоскости; все они образуют связку и проходят через центр поверхности.

**Сопряжёнными диаметрами** называются такие два диаметра, из которых каждый лежит в диаметральной плоскости, сопряжённой другому.

**Главными направлениями** относительно данной поверхности называются направления хорд, перпендикулярных к сопряжённым им диаметральным плоскостям; эти последние называются тогда **главными диаметральными плоскостями**. **Главными осями** поверхности называются диаметры, имеющие главные направления.

Главные направления $(m, n, p)$ определяются из нижеследующих уравнений:

$$\frac{a_{11}m+a_{12}n+a_{13}p}{m}=\frac{a_{21}m+a_{22}n+a_{23}p}{n}=\frac{a_{31}m+a_{32}n+a_{33}p}{p}, \tag{12}$$

или, обозначая через $S$ величину этих трёх отношений, можно переписать уравнения (12) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-S)\,m+a_{12}n+a_{13}p&=0,\\ a_{21}m+(a_{22}-S)\,n+a_{23}p&=0,\\ a_{31}m+a_{32}n+(a_{33}-S)\,p&=0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Прежде чем вычислять главные направления, приходится определять величину $S$ из следующего так называемого **решающего** или **характеристического** уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-S & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-S & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-S \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Это уравнение третьей степени относительно $S$ и имеет всегда три действительных корня[1]; каждому из них соответствует одно главное направление поверхности, определяемое из уравнений (13).

Если изменить направление осей координат так, чтобы они стали параллельными главным осям поверхности второго порядка, то в уравнение этой поверхности не войдут члены с произведениями координат, и из старших членов войдут только члены с квадратами координат.

Таким образом, если уравнение (1) изображает центральную поверхность (дискриминант старших членов $\delta \neq 0$), мы можем упростить это уравнение следующими преобразованиями:

1. Переносим начало координат в центр поверхности; тогда получим:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \qquad (7)$$

2. Принимаем главные оси поверхности за новые оси координат, после чего получим:

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \qquad (15)$$

причём

$$a'_{11} = S_1, \quad a'_{22} = S_2, \quad a'_{33} = S_3, \qquad (16)$$

т. е. в уравнении центральной поверхности, отнесённой к главным осям, коэффициентами при квадратах координат служат корни решающего уравнения (14), а свободным членом — отношение дискриминанта уравнения к дискриминанту старших членов.

Отсюда вытекает способ исследования центральных поверхностей, указанный в таблице, помещённой на стр. 204.

Если уравнение (1) изображает параболоид ($\delta = 0$), то один из корней решающего уравнения равен нулю ($S_3 = 0$); кроме того, переносом начала координат мы не можем избавиться от всех членов первой степени; поэтому упрощение уравнения параболоида производится следующим образом: не меняя начала координат, выбираем оси, параллельные главным направлениям, тогда уравнение параболоида примет вид:

$$2\Phi = S_1x^2 + S_2y^2 + 2a'_{14}x + 2a'_{24}y + 2a'_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (17)$$

---

[1] Равные корни получаются только в случае поверхностей вращения.

| | | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $\frac{\Delta}{\delta}$ | Тип поверхности |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | Все корни решающего уравнения и отношение дискриминантов имеют одинаковые знаки | + | + | + | + | Мнимый эллипсоид |
| | | − | − | − | − | |
| II | Все корни решающего уравнения имеют один знак, отношение дискриминантов — противоположный знак | + | + | + | − | Действительный эллипсоид |
| | | − | − | − | + | |
| III | Знак отношения дискриминантов совпадает со знаком только одного корня решающего уравнения | + | + | − | − | Однополостный гиперболоид |
| | | − | − | + | + | |
| IV | Знак отношения дискриминантов совпадает со знаком двух корней решающего уравнения | + | + | − | + | Двухполостный гиперболоид |
| | | − | − | + | − | |
| V | Корни решающего уравнения имеют одинаковые знаки, дискриминант уравнения равен нулю | + | + | + | 0 | Мнимый конус |
| | | − | − | − | 0 | |
| VI | Корни решающего уравнения имеют разные знаки, дискриминант уравнения равен нулю | + | + | − | 0 | Действительный конус |
| | | − | − | + | 0 | |

Оставшимся произволом в выборе начала координат воспользуемся так, чтобы после переноса начала исчезал свободный член ($a'_{44} = 2\Phi' = 0$) и члены с первыми степенями абсциссы и ординаты ($a'_{14} = \Phi_{x'} = 0$ и $a'_{24} = \Phi_{y'} = 0$).

Тогда уравнение параболоида будет приведено к простейшему виду:

$$S_1x^2 + S_2y^2 + 2\Phi_{z'}z = 0 \ ^{1)}. \tag{18}$$

В зависимости от того, имеют ли корни решающего уравнения $S_1$ и $S_2$ одинаковые или разные знаки, параболоид будет эллиптическим или гиперболическим.

**980.** Найти диаметральную плоскость поверхности $2x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 12yz + 6zx + 2xy + 8x + 14y + 18z = 0$, сопряжённую хордам, параллельным

a) прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-5}$; b) оси $x$; c) оси $y$; d) оси $z$.

**981.** Найти тот диаметр поверхности

$$x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy - 6zx + 2yz + 8x - 16y + 1 = 0,$$

который проходит через начало координат, и составить уравнение сопряжённой ему диаметральной плоскости.

**982.** Через начало координат и через точку $(+3; +6; +2)$ проведена диаметральная плоскость поверхности

$$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4zx - 8y - 4z + 3 = 0.$$

Составить уравнение этой плоскости и найти угловые коэффициенты сопряжённых ей хорд.

**983.** Дана поверхность

$$6x^2 + 9y^2 + z^2 - 4zx + 6xy - 2y - 3 = 0.$$

Найти диаметральную плоскость, параллельную плоскости

$$x + 3y - z + 5 = 0,$$

и составить уравнение сопряжённого ей диаметра.

**984.** Найти ту диаметральную плоскость поверхности

$$x^2 + 3z^2 - 6xy + 8x + 5 = 0,$$

которая проходит через прямую $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{3}$.

---

[1]) $2\Phi_{z'} = 2a'_{34}$, т. е. при соответствующем переносе начала старшие члены и член с первой степенью $z$ останутся без изменения, остальные члены исчезнут. Для вычисления этого коэффициента можно пользоваться формулой:

$$a'_{34} = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S_1S_2}}.$$

**985.** Найти угол между той диаметральной плоскостью поверхности

$$3x^2-5y^2+4xy-6yz+4x+2y=0,$$

которая проходит через ось $y$, и хордами, ей сопряжёнными.

**986.** Найти общую диаметральную плоскость трёх поверхностей.

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-11=0;$$
$$3y^2+4xy-8zx+6z+5=0;$$
$$8x^2-3y^2+7z^2+4xy-9zx-15=0.$$

**987.** Дана поверхность второго порядка

$$x^2-2y^2+3z^2+4zx-6yz+8x-2z+3=0$$

и одна из её диаметральных плоскостей $y-2z+9=0$. Найти диаметральную плоскость, которая сопряжена с данной плоскостью и к ней перпендикулярна.

**988.** Дана поверхность $y^2+3z^2-6zx+12x+5=0$. Найти систему трёх сопряжённых диаметральных плоскостей, из которых одна проходит через прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{4}$, а другая — через начало координат.

**989.** Найти главные направления поверхности

$$2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0.$$

**990.** Найти главные оси поверхности

$$x^2+y^2+5z^2-6xy-2zx+2yz-6x+6y-6z+9=0.$$

**991.** Найти главные диаметральные плоскости поверхности

$$x^2+y^2-3z^2-6yz-6zx-2xy+2x+2y+4z=0.$$

**992.** Какое уравнение будет иметь поверхность

$$7x^2+6y^2+5z^2-4yz-4xy-6x-24y+18z+30=0,$$

если отнести её к главным осям? Дать формулы соответствующего преобразования координат.

**993.** Упростить уравнения следующих поверхностей:

1) $6x^2-2y^2+6z^2+4zx+8x-4y-8z+1=0$;
2) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8zx-4yz-14x-4y+14z+$ $+16=0$;
3) $x^2+y^2+5z^2-6xy+2zx-2yz-4x+8y-12z+$ $+14=0$;
4) $4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x+6y+4z-27=0$;
5) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4zx+2yz+2x-10y-2z-$ $-1=0$.

**994.** Привести к простейшему виду уравнение поверхности

$$5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8zx+4zy-27=0$$

и дать соответствующие формулы преобразования координат.

**995.** Привести к простейшему виду уравнение параболоида

$$2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0.$$

**996.** Упростить уравнение поверхности

$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2zx+2yz-4x+6y-2z+3=0.$$

**997.** Определить вид поверхности

$$x^2-2y^2-4xy-8zx+6y-5=0.$$

**998.** Определить тип следующих поверхностей:

1) $3x^2+y^2-z^2+6zx-4y=0$;
2) $2x^2+y^2+3z^2-4yz+2x-6z+1=0$;
3) $x^2+2y^2+3z^2+2x-4y-12z+8=0$;
4) $4x^2-9z^2+2zx-8x-4y+36z-32=0$;
5) $4x^2+2y^2+z^2-4xy-2yz-2y+2z-4=0$.

**999.** Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от двух пересекающихся прямых:

$$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2};\quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}.$$

Исследовать полученное уравнение.

**1000.** Найти и исследовать геометрическое место точек, одинаково удалённых от оси $z$ и от прямой $\left\{\begin{matrix} y=z, \\ x=1, \end{matrix}\right\}$ не лежащей с осью $z$ в одной плоскости.

ЧАСТЬ ЧЕТВЁРТАЯ

# ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ

## ГЛАВА XV

## ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

### 1. Векторы. Равенство векторов. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Разложение векторов

Величины, для задания которых достаточно указания их числовых значений, называются скалярными величинами или просто скалярами[1]). Примерами скалярных величин могут служить: длина отрезка, угол, площадь, объём, время, температура, масса, плотность, работа и т. д. Простейшим скаляром является отвлечённое число. Скаляры обозначаются малыми или большими буквами латинского или греческого алфавита обыкновенного шрифта: $a, b, m, p, x, y, A, S, T, \alpha, \beta, \ldots$

Наряду со скалярами существуют и другие величины, для полной характеристики которых недостаточно задания одних только числовых значений. Например, для характеристики перемещения точки нужно знать не только длину, но и направление перемещения. Для характеристики действия силы мало знать её величину, надо ещё знать направление, в котором она действует. Такие величины, как перемещение, сила, скорость, ускорение, напряжённость электрического поля и т. д., требующие для своего задания не только указания числового значения, но и направления в пространстве, называются векторными величинами или векторами.

Для наглядного изображения векторов служат геометрические векторы, т. е. прямолинейные отрезки, имеющие не только определённую длину, но и определённое направление. В дальнейшем под словом «вектор» мы и будем подразумевать простейший тип векторных величин — геометрический вектор.

Векторы обозначаются или жирными буквами $\mathbf{A}, \mathbf{M}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ или буквами обыкновенного шрифта, но с чёрточкой сверху: $\overline{A}, \overline{M}, \overline{a}, \overline{b}, \ldots$ Иногда, так как вектор есть направленный отрезок, его обозначают

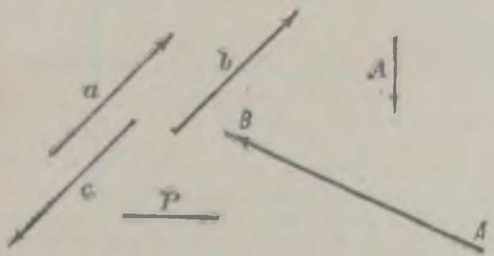
---

[1]) Название это объясняется тем, что, выбрав единицу измерения, можно изобразить все значения скалярной величины на одной шкале (скале).

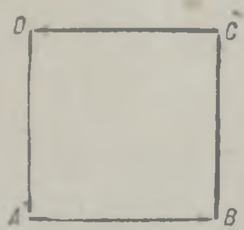
двумя буквами (на первом месте стоит название начала отрезка, на втором — название конца), но тоже с чёрточкой сверху: $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, $\overline{PO}$ и т. д.

На чертеже векторы изображаются отрезками, снабжёнными стрелками, указывающими их направление (черт. 68).

Длина вектора, которая иначе называется м о д у л е м, или а б с о л ю т н о й в е л и ч и н о й, или ещё с к а л я р о м вектора, обозначается той же буквой, что и вектор, но не жирного шрифта и без черты сверху; иногда для обозначения модуля вектора берётся обозначение самого вектора, помещённое в прямые скобки: длина вектора **a** обозначается $a$ или $|\mathbf{a}|$; длина вектора $\overline{AB}$ обозначается $AB = |\overline{AB}|$ и т. д.




Черт. 68.




Черт. 69.

Если прямые, на которых расположены векторы[1]), параллельны (или совпадают), то векторы называются к о л л и н е а р н ы м и. Коллинеарные векторы могут иметь или одинаковое направление, как, например, **a** и **b**, или противоположные направления, например, **a** и **c** (черт. 68).

Два вектора считаются р а в н ы м и, если они удовлетворяют следующим условиям:

1) векторы имеют одинаковую длину;
2) они коллинеарны и
3) они имеют одинаковое направление.

Таким образом, среди четырёх векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$, совпадающих со сторонами квадрата $ABCD$ (черт. 69), нет двух равных векторов.

Из определения равенства векторов следует, что положение начальной точки вектора (точки приложения) не играет роли[2]). Параллельное перемещение не меняет вектора. Этим свойством можно воспользоваться, чтобы отнести данные векторы к общему началу, т. е. переместить их, не меняя направления, так, чтобы совпали начала всех рассматриваемых векторов.

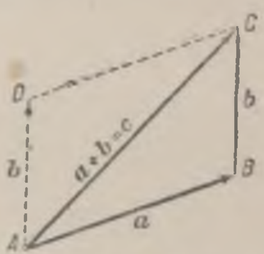
---

[1]) Прямая, на которой лежит вектор, называется его носителем.

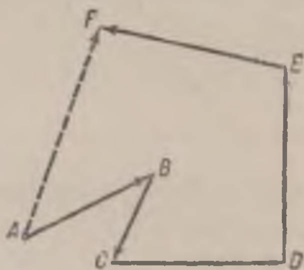
[2]) Такие векторы называются «свободными». В дальнейшем, если не будет сделано оговорки, мы будем иметь дело только со свободными векторами.

При определении сложения векторов полезно помнить конкретные задачи, связанные с этим действием. Необходимость сложить два вектора может, например, возникнуть в связи с отысканием такого одного перемещения точки, которым можно было бы заменить два данных последовательных перемещения, или же при отыскании равнодействующей двух данных сил, действующих на данную точку, и т. д.

Отсюда вытекает для сложения двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ «правило треугольника»: при любой точке $A$ строим вектор $\overline{AB}=\mathbf{a}$ (черт. 70); в конце этого вектора строим вектор $\overline{BC}=\mathbf{b}$. Тогда век-




Черт. 70.




Черт. 71.

тор $\mathbf{c}=\overline{AC}$, соединяющий начало первого слагаемого с концом второго, и будет вектором-суммой [1]), что можно записать так:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC} \tag{1}$$

или

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}. \tag{1'}$$

Если дополнить треугольник $ABC$ (черт. 70) до параллелограмма $ABCD$, то легко получить известное «правило параллелограмма»: чтобы сложить два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, приводим их к общему началу, строим на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм, — тогда диагональ этого параллелограмма, выходящая из той же вершины, является суммой двух данных векторов.

В случае бо́льшего числа слагаемых, обобщая правило треугольника, получаем правило многоугольника: чтобы построить сумму любого числа векторов, надо из любой точки построить вектор, равный первому слагаемому, из конца первого слагаемого построить второе слагаемое, из конца второго — третье и т. д. Вектор, соединяющий начало первого слагаемого с концом последнего, и будет суммой всех данных векторов, т. е. суммой служит замыкающий вектор той ломаной линии, звеньями которой служат данные слагаемые векторы (черт. 71). Если оказалось бы, что конец последнего

---

[1]) Это правило является естественным обобщением сложения направленных отрезков, расположенных на одной прямой (**коллинеарных векторов**).

слагаемого совпадает с началом первого, то это значит, что вектор-сумма имеет длину, равную нулю. Такой вектор называется н у л ь-в е к т о р о м.

В частности, нулю равна сумма двух векторов, имеющих одинаковую длину, но противоположные направления:

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0 \tag{2}$$

или

$$\overline{AB}=-\overline{BA}; \tag{2'}$$

такие векторы называются р а в н о - п р о т и в о п о л о ж н ы м и.

Сложение векторов подчиняется основным законам сложения чисел:

1) закону переместительности:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}; \tag{3}$$

2) закону сочетательности:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}. \tag{4}$$

В ы ч и т а н и е в е к т о р о в вводится как действие, обратное сложению, т. е. при вычитании требуется по данной сумме двух векторов и одному из них найти другой слагаемый вектор.

Из черт. 70 непосредственно вытекает правило вычитания: чтобы вычесть из вектора $\mathbf{c}\,(=\overline{AC})$ вектор $\mathbf{a}\,(=\overline{AB})$, надо отнести их к общему началу; тогда вектор $\mathbf{b}\,(=\overline{BC})$, соединяющий конец вектора-вычитаемого ($\mathbf{a}$) с концом вектора-уменьшаемого ($\mathbf{c}$), и будет вектором-разностью:

$$\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}, \tag{5}$$

или

$$\mathbf{c}-\mathbf{a}=\mathbf{b}; \tag{5'}$$

или, пользуясь понятием равно-противоположных векторов, имеем:

$$\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{AC}+(-\overline{AB}), \tag{6}$$

$$\mathbf{c}-\mathbf{a}=\mathbf{c}+(-\mathbf{a}), \tag{6'}$$

т. е. чтобы вычесть вектор, достаточно прибавить равно-противоположный ему вектор.

Рассмотрим ещё у м н о ж е н и е в е к т о р а н а с к а л я р.

Произведение $\alpha\mathbf{a}$, где $\alpha$ — любое число, представляет вектор, коллинеарный с $\mathbf{a}$ и имеющий длину, в $\alpha$ раз бо́льшую, чем вектор $\mathbf{a}$. Этот новый вектор имеет направление или совпадающее с направлением $\mathbf{a}$, или направление, ему противоположное, в зависимости от того, будет ли $\alpha$ положительным или отрицательным числом.

Отдельно рассматривать деление вектора на число не стоит, потому что это действие сводится к умножению вектора на обратное число, например, вместо того чтобы разделить вектор на 3, достаточно умножить его на $^1/_3$.

Умножение вектора на скаляр подчиняется законам умножения чисел:

1) закону переместительности:

$$\alpha \mathbf{a} = \mathbf{a}\alpha; \tag{7}$$

2) закону сочетательности:

$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}; \tag{8}$$

3) закону распределительности:

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, \tag{9}$$

и

$$(\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}. \tag{9'}$$

Если произведение равно нулю:

$$\alpha\mathbf{a} = 0,$$

то

$$\text{или } \alpha = 0, \text{ или } \mathbf{a} = 0.$$

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$—два коллинеарных вектора, то всегда можно найти такой скаляр $\lambda$, который, будучи помножен на $\mathbf{a}$, даёт вектор, равный $\mathbf{b}$, т. е.

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}. \tag{10}$$

Иначе, это число $\lambda$ можно назвать *отношением векторов* $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$:

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \lambda \text{ или } \mathbf{b}:\mathbf{a} = \lambda.$$

Говорить об отношении неколлинеарных векторов не имеет смысла.

Условие, необходимое и достаточное для коллинеарности двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, выражается равенством (10) или более общей линейной зависимостью, их связывающей:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 0. \tag{11}$$

Вектор, который при выбранном масштабе имеет длину, равную единице, называется *единичным вектором* или *ортом*. Если дан какой-нибудь вектор $\mathbf{a}$, то единичный вектор $\mathbf{a}^0$ того же направления мы получим, разделив $\mathbf{a}$ на его модуль:

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},$$

откуда

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^0.$$

*Компланарными векторами* называются векторы, расположенные в одной и той же плоскости или параллельные одной и той же плоскости.

Условием, необходимым и достаточным для компланарности трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, является существование между ними линейной зависимости, т. е. соотношения

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0, \qquad (12)$$

где коэффициенты $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ не равны нулю одновременно.

Иначе говоря, если мы имеем два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то всякий третий компланарный им вектор $\mathbf{c}$ может быть единственным способом «разложен по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$», т. е. представлен как сумма двух векторов, соответственно им коллинеарных:

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}. \qquad (13)$$

Если мы имеем три некомпланарных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, то всякий четвёртый вектор $\mathbf{d}$ может быть однозначно разложен по векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, т. е. представлен как сумма трёх векторов, соответственно им коллинеарных:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}. \qquad (14)$$

Между любыми четырьмя векторами существует линейная зависимость:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = 0,$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ не равны нулю одновременно.

**1001.** В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overline{AB} = \mathbf{a}$ и $\overline{AD} = \mathbf{b}$. Выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ и $\overline{MD}$, где $M$ есть точка пересечения диагоналей параллелограмма.

**1002.** Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, проверить на чертеже справедливость тождеств:

1) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 2\mathbf{a}$;
2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 2\mathbf{b}$;
3) $\mathbf{a} + (\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{b}$;
4) $\dfrac{\mathbf{a}}{2} + \dfrac{\mathbf{b}}{2} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$;
5) $\dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2} + \mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$;
6) $\left(\mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b}}{2}\right) - \left(\mathbf{b} + \dfrac{\mathbf{a}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$;
7) $\left(\mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b}}{2}\right) + \left(\mathbf{b} + \dfrac{\mathbf{a}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

**1003.** Какой особенностью должны обладать векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, чтобы имело место соотношение:

a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$;
b) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$;
c) $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$;
d) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;
e) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$;
f) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?

**1004.** Каким условием должны быть связаны векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, чтобы вектор $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ делил угол между ними пополам? Предполагается, что все три вектора отнесены к общему началу.

**1005.** Какие ограничения должны быть наложены на коэффициенты $\alpha$ и $\beta$, чтобы имело место соотношение:

$$\alpha\cdot\frac{\mathbf{a}}{a}+\beta\cdot\frac{\mathbf{b}}{b}=0,$$

где

$$a\neq 0 \text{ и } b\neq 0.$$

**1006.** Три вектора $\overline{AB}=\mathbf{c}$, $\overline{BC}=\mathbf{a}$ и $\overline{CA}=\mathbf{b}$ служат сторонами треугольника. С помощью $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выразить векторы, совпадающие с медианами треугольника: $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ и $\overline{CP}$.

**1007.** В треугольнике предшествующей задачи выразить все медианы только через два вектора: $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

**1008.** Сторона $BC$ треугольника $ABC$ разделена на пять равных частей и все точки деления $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$ соединены с противолежащей вершиной $A$. Обозначив стороны $\overline{AB}=\mathbf{c}$ и $\overline{BC}=\mathbf{a}$, найти выражения для векторов $\overline{D_1A}$, $\overline{D_2A}$, $\overline{D_3A}$, $\overline{D_4A}$.

**1009.** Проверить, что векторы, совпадающие с медианами любого треугольника, в свою очередь могут служить сторонами другого треугольника.

**1010.** Зная векторы, служащие сторонами треугольника $\overline{AB}=\mathbf{c}$, $\overline{BC}=\mathbf{a}$ и $\overline{CA}=\mathbf{b}$, найти векторы, соответственно коллинеарные биссектрисам углов этого треугольника.

**1011.** Изменится ли сумма компланарных векторов, если все слагаемые векторы будут повёрнуты в одном и том же направлении на один и тот же угол?

**1012.** Доказать, что сумма парных произведений — длины каждой стороны треугольника на единичный вектор, перпендикулярный к этой стороне,— равна нулю.

Примечание. Предполагается, что упомянутые единичные векторы направлены от соответствующих сторон треугольника или все три во внутреннюю область треугольника, или все три — во внешние области.

**1013.** Доказать, что сумма векторов, соединяющих центр правильного треугольника с его вершинами, равна нулю.

**1014.** Останется ли справедливым утверждение предшествующей задачи, если треугольник заменить правильным $n$-угольником?

**1015.** В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ известны $\overline{AB}=\mathbf{p}$ и $\overline{BC}=\mathbf{q}$.

a) Выразить через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ векторы: $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AE}$.

b) Найти отношение векторов:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}};\quad \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}};\quad \frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} \text{ и } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

**1016.** В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ даны: $\overline{AB}=\mathbf{m}$ и $\overline{AE}=\mathbf{n}$. Разложить по этим двум векторам $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ и $\overline{EF}$.

**1017.** В ромбе $ABCD$ даны диагонали $\overline{AC}=\mathbf{a}$ и $\overline{BD}=\mathbf{b}$. Разложить по этим двум векторам все векторы, совпадающие со сторонами ромба: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.

**1018.** В равнобочной трапеции $ABCD$ известно нижнее основание $\overline{AB}=\mathbf{a}$, боковая сторона $\overline{AD}=\mathbf{b}$ и угол между ними $\angle A=\frac{\pi}{3}$. Разложить по $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали трапеции.

**1019.** В треугольнике $ABC$ сторона $BC$ разделена точкой $D$ в отношении $m:n$, т. е.

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{m}{n}.$$

Разложить вектор $\overline{AD}$ по векторам $\overline{AB}=\mathbf{c}$ и $\overline{AC}=\mathbf{b}$.

**1020.** Дать геометрическое построение разложения вектора $\mathbf{a}$ на два компланарных с ним слагаемых, если известны:

a) длина и направление одного слагаемого;

b) направления обоих слагаемых;

c) направление одного и длина другого слагаемого;

d) длина обоих слагаемых.

Исследовать, когда разложение возможно и сколько имеет решений, если ни одно из слагаемых не параллельно $\mathbf{a}$.

**1021.** На трёх некомпланарных векторах

$$\overline{AB}=\mathbf{p},\quad \overline{AD}=\mathbf{q}\quad \text{и}\quad \overline{AA'}=\mathbf{r}$$

построен параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Выразить через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ векторы, совпадающие со всеми остальными рёбрами, диагоналями и диагоналями граней этого параллелепипеда.

**1022.** В тетраэдре $ABCD$ даны рёбра, выходящие из вершины $A$:

$$\overline{AB}=\mathbf{b},\quad \overline{AC}=\mathbf{c}\quad \text{и}\quad \overline{AD}=\mathbf{d}.$$

Выразить через эти векторы остальные рёбра тетраэдра, медиану $\overline{DM}$ грани $BCD$ и вектор $\overline{AQ}$, где $Q$ — центр тяжести грани $BCD$.

**1023.** Зная разложения векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ по трём некомпланарным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, проверить, будут ли $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ компланарны, и в случае утвердительного ответа дать линейную зависимость, их связывающую:

a) $\mathbf{l}=2\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{m}=2\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\mathbf{n}=2\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

b) $\mathbf{l}=\mathbf{c}$, $\mathbf{m}=\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{n}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$;

c) $\mathbf{l}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{m}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{n}=-\mathbf{a}+\mathbf{c}$.

**1024.** Известны разложения двух векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ по трём некомпланарным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{p}=\alpha_1\mathbf{a}+\beta_1\mathbf{b}+\gamma_1\mathbf{c},$$
$$\mathbf{q}=\alpha_2\mathbf{a}+\beta_2\mathbf{b}+\gamma_2\mathbf{c}.$$

Какая зависимость должна существовать между коэффициентами этих разложений, если

a) $\mathbf{p}=\mathbf{q}$; b) $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ коллинеарны; c) $|\mathbf{p}|=|\mathbf{q}|$.

**1025.** Найти линейную зависимость между данными четырьмя некомпланарными векторами:

$$\mathbf{m}=\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c};\qquad \mathbf{p}=\mathbf{a}+\mathbf{b};$$
$$\mathbf{n}=\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2};\qquad \mathbf{q}=\mathbf{b}-\mathbf{c}.$$

**1026.** Разложить вектор $\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ по трём некомпланарным векторам: $\mathbf{m}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{n}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{p}=2\mathbf{b}+3\mathbf{c}$.

**1027.** Чтó можно сказать о взаимном расположении четырёх векторов в пространстве, если они связаны линейной зависимостью $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}+\delta\mathbf{d}=0$, причём

a) $\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0,\quad \gamma\neq 0,\quad \delta\neq 0;$
b) $\alpha=0,\quad \beta\neq 0,\quad \gamma\neq 0,\quad \delta\neq 0;$
c) $\alpha=\beta=0,\quad \gamma\neq 0,\quad \delta\neq 0;$
d) $\alpha=\beta=\gamma=0,\quad \delta\neq 0$?

**1028.** В разложении вектора $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ по двум неколлинеарным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ могут ли оба коэффициента разложения $\lambda$ и $\mu$ или один из них равняться нулю?

## 2. Проекции векторов[1]). Скалярное умножение векторов

Осью называется прямая, на которой выбрано положительное направление и единица длины. Ось вполне определяется единичным вектором (ортом).

Проекцией точки $M$ на данную ось называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки $M$ на данную ось[2]).

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось называется длина вектора $\overline{A'B'}$, заключённого между проекциями начала и конца вектора $\overline{AB}$, причём длина эта берётся с положительным знаком, когда вектор $\overline{A'B'}$ имеет направление орта оси, и с отрицательным знаком, когда $\overline{A'B'}$ и орт оси имеют противоположные направления.

Проекция вектора на ось есть скаляр.

Проекция вектора на ось равна произведению длины этого вектора на косинус угла ($\varphi$) между вектором и осью:

$$\text{пр. } \overline{AB}=|\overline{AB}|\cdot\cos\varphi. \tag{15}$$

Проекция суммы векторов равна алгебраической сумме, проекций слагаемых векторов:

$$\text{пр. }(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\text{пр. }\mathbf{a}+\text{пр. }\mathbf{b}+\text{пр. }\mathbf{c}. \tag{16}$$

Проекция произведения вектора на скаляр равна произведению этого же скаляра на проекцию вектора:

$$\text{пр. }(\alpha\mathbf{a})=\alpha\cdot\text{пр. }\mathbf{a}. \tag{17}$$

---

[1]) В настоящей главе рассматриваются лишь ортогональные проекции.

[2]) При проектировании пространственных фигур на ось удобнее определять проекцию точки как точку пересечения оси с плоскостью, проходящей через данную точку перпендикулярно к оси.

**Скалярным** (внутренним) **произведением** двух векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними[1]).

Чтобы показать, что два вектора перемножаются скалярно, их заключают в круглые скобки или просто пишут рядом:

$$(\mathbf{ab}) = \mathbf{ab} = ab \cos (\widehat{\mathbf{ab}}). \tag{18}$$

Если перемножаемые векторы коллинеарны, то

$$\mathbf{ab} = \pm ab,$$

т. е. скалярное произведение коллинеарных векторов равняется произведению их скаляров, взятому со знаком плюс или минус, в зависимости от того, имеют ли оба вектора одинаковые или противоположные направления.

Если один из сомножителей является единичным вектором, то скалярное произведение равно проекции другого сомножителя на направление первого:

$$\mathbf{ab}^0 = a \cdot 1 \cdot \cos (\widehat{\mathbf{ab}^0}) = \text{пр.}_{\mathbf{b}^0}\, \mathbf{a}, \tag{19}$$

т. е. умножение вектора на единичный вектор равносильно проектированию этого вектора на ось единичного вектора.

Если оба сомножителя являются единичными векторами, то их скалярное произведение равно косинусу угла между ними:

$$\mathbf{a}^0\mathbf{b}^0 = \cos (\widehat{\mathbf{a}^0\mathbf{b}^0}).$$

Угол между двумя векторами **a** и **b** можно вычислить по формуле:

$$\cos (\widehat{\mathbf{ab}}) = \frac{\mathbf{ab}}{ab}. \tag{20}$$

Скалярное произведение двух равных векторов (так называемый **скалярный квадрат** вектора) равно квадрату модуля этого вектора:

$$\mathbf{aa} = (\mathbf{a})^2 = a^2. \tag{21}$$

Этим можно воспользоваться для вычисления **длины вектора**:

$$a = \sqrt{\mathbf{a}^2}. \tag{22}$$

Квадрат единичного вектора равен единице:

$$\mathbf{a}^0\mathbf{a}^0 = (\mathbf{a}^0)^2 = 1. \tag{21'}$$

---

[1]) Такое составление скаляра по двум данным векторам встречается очень часто в прикладных науках, например, когда, зная перемещение точки и действующую на неё силу, вычисляют работу этой силы.

Скалярное произведение двух векторов может равняться нулю, когда ни один из сомножителей не равен нулю, а именно, когда перемножаемые векторы перпендикулярны. Итак,

$$\mathbf{ab} = 0 \text{ равносильно } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}. \tag{23}$$

Скалярное произведение двух векторов может быть положительным или отрицательным числом, в зависимости от того, образуют ли они острый или тупой угол между собой.

Скалярное умножение подчиняется законам умножения чисел:

1) закону переместительности:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}; \tag{24}$$

2) закону распределительности:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}; \tag{25}$$

3) закону сочетательности по отношению к числовому множителю:

$$(\alpha\mathbf{a})\,\mathbf{b} = \alpha\,(\mathbf{ab}). \tag{26}$$

Но, вообще говоря,

$$(\mathbf{ab})\,\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\,(\mathbf{bc}), \tag{27}$$

потому что в левой части неравенства (27) стоит вектор, коллинеарный с $\mathbf{c}$, а в правой части — вектор, коллинеарный с $\mathbf{a}$.

**1029.** Зная проекции нескольких векторов на одну и ту же ось:

$$\text{пр. } \mathbf{a} = 5, \ \text{пр. } \mathbf{b} = -3, \ \text{пр. } \mathbf{c} = -8 \ \text{ и } \ \text{пр. } \mathbf{d} = 6,$$

можно ли заключить, что эти векторы образуют замкнутую ломаную линию?

**1030.** Проверить, справедливы ли следующие равенства:

1) $\mathbf{a}a = a^2$;  5) $\mathbf{a}\,(\mathbf{bb}) = \mathbf{a}b^2$;
2) $\mathbf{a}^2 a = a^3$;  6) $(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 \pm 2\mathbf{ab}$;
3) $a^2\mathbf{a} = a^3$;  7) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 - b^2$;
4) $\mathbf{a}\,(\mathbf{ab}) = a^2\mathbf{b}$;  8) $(\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$?

**1031.** Проверить справедливость тождества

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2\,(a^2 + b^2)$$

и дать его геометрическое толкование.

**1032.** Можно ли говорить о скалярном произведении трёх векторов? о скалярном кубе вектора? о кубе скаляра вектора?

**1033.** Разобрать, почему тождество, справедливое для скаляров

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

не имеет места для векторов.

**1034.** Вычислить скалярное произведение $\mathbf{ab}$, если $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

**1035.** Найти числовое значение скаляра $3m - 2(\mathbf{mn}) + 4n^2$, если

$$|\mathbf{m}| = {}^1/_3, \quad |\mathbf{n}| = 6 \quad \text{и} \quad (\widehat{\mathbf{mn}}) = \frac{\pi}{3}.$$

**1036.** Упростить выражение

$$a^2 + 3(\mathbf{ab}) - 2(\mathbf{bc}) + 1,$$

если $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, где $m^2 = 4$, $n^2 = 1$ и $(\widehat{\mathbf{mn}}) = \frac{\pi}{2}$.

**1037.** Чему равна сумма $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$, если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — три орта, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0?$$

**1038.** Вычислить скалярное произведение двух векторов $\mathbf{pq}$, зная их разложение по трём единичным взаимно перпендикулярным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{p} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{a} - 4\mathbf{b} - 5\mathbf{c}.$$

**1039.** Доказать, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если к одному из них прибавить вектор, перпендикулярный к другому сомножителю.

**1040.** Найти длину вектора $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$, зная, что $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ — взаимно перпендикулярные орты.

**1041.** Вычислить длину вектора $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$, если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — данные взаимно перпендикулярные векторы.

**1042.** Зная, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ образуют треугольник, т. е. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, вычислить длину стороны $\mathbf{c}$, считая $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ известными.

**1043.** Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{A} = 5\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}$, если известно, что $|\mathbf{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{q}| = 3$ и $(\widehat{\mathbf{pq}}) = \frac{\pi}{4}$.

**1044.** К одной и той же точке приложены две силы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, действующие под углом $120°$, причём $|\mathbf{P}| = 7$ и $|\mathbf{Q}| = 4$. Найти величину равнодействующей силы $\mathbf{R}$.

**1045.** Найти равнодействующую пяти компланарных сил, равных по величине и приложенных к одной и той же точке, зная, что углы между каждыми двумя последовательными силами равны $72°$.

**1046.** Вычислить угол между векторами $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 5\mathbf{q}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

**1047.** В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.

**1048.** Зная векторы, образующие треугольник: $\overline{AB} = 2\mathbf{a} - 6\mathbf{b}$, $\overline{BC} = \mathbf{a} + 7\mathbf{b}$ и $\overline{CA} = -3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — взаимно перпендикулярные орты, определить углы этого треугольника.

**1049.** Зная разложение вектора $\mathbf{Q} = 6\mathbf{m} - 2\mathbf{n} + 3\mathbf{p}$ по трём перпендикулярным ортам, вычислить длину вектора $\mathbf{Q}$ и углы, которые он образует с каждым из ортов $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{p}$.

**1050.** Обозначив через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ стороны ромба, выходящие из общей вершины, доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

**1051.** Проверить, что векторы $\mathbf{p} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) - \mathbf{b}(\mathbf{ac})$ и $\mathbf{c}$ перпендикулярны друг к другу.

**1052.** Зная, что $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ и $(\widehat{\mathbf{ab}}) = \frac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении коэффициента $\alpha$ векторы $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ и $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ окажутся перпендикулярными.

**1053.** Какой угол образуют единичные векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$, если известно, что векторы $\mathbf{p} = \mathbf{s} + 2\mathbf{t}$ и $\mathbf{q} = 5\mathbf{s} - 4\mathbf{t}$ взаимно перпендикулярны.

**1054.** Найти проекцию вектора $\mathbf{A} = 10\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ на ось, имеющую направление вектора $\mathbf{B} = 5\mathbf{m} - 12\mathbf{n}$, где $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ —

взаимно перпендикулярные орты. Вычислить углы между осью проекций и единичными векторами **m** и **n**.

**1055.** Зная скалярное произведение $(P)$ двух векторов и один из этих векторов (**a**), можно ли найти другой вектор (**x**)?

**1056.** Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overline{AB}=5\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\overline{BC}=2\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ и $\overline{CA}=-7\mathbf{a}+2\mathbf{b}$. Вычислить длину медианы $\overline{AM}$ и высоты $\overline{AD}$ треугольника $ABC$.

**1057.** Зная векторы **a** и **b**, на которых построен параллелограмм, выразить через них вектор, совпадающий с высотой параллелограмма, перпендикулярной к стороне **a**.

## 3. Векторное умножение. Смешанное произведение трёх векторов. Двойное векторное произведение

Наряду с умножением двух векторов, приводящим к скаляру, рассмотрим ещё один тип умножения векторов, в результате которого получается вектор. Такое умножение называется векторным или внешним[1]).

*Векторным произведением* двух векторов **a** и **b** называется вектор **c**, обладающий следующими свойствами:

1. Длина вектора **c** равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, т. е.

$$c=a\cdot b\cdot\sin(\widehat{\mathbf{ab}}). \tag{28}$$

2. Вектор **c** перпендикулярен к плоскости этого параллелограмма, т. е. перпендикулярен и вектору **a** и вектору **b**:

$$\mathbf{ac}=0 \quad \text{и} \quad \mathbf{bc}=0. \tag{29}$$

3. Векторы **a**, **b** и **c**, взятые в указанном порядке, составляют правую тройку векторов[2]).

Это последнее условие значит, что наблюдатель, стоящий на плоскости векторов **a** и **b** так, что направление от его ног к голове совпадает с направлением вектора **c**, видит кратчайшее вращение от направления **a** к направлению **b** совершающимся справа налево, т. е. против часовой стрелки.

---

[1]) Целесообразность введения такого умножения подтверждается при решении целого ряда геометрических и механических проблем (вычисление момента силы, выражение площадей с помощью векторов и пр.).

[2]) Можно было бы дать определение векторного произведения, заменив это условие условием, ему противоположным, т. е. потребовать, чтобы векторы **a**, **b** и **c** составляли левую тройку. Но раз выбор сделан, надо строго придерживаться соответствующего условия.

Для векторного произведения **c** вектора **a** на вектор **b** вводится обозначение:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{ab}] \tag{30}$$

или

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \tag{30'}$$

Если перемножаемые векторы взаимно перпендикулярны, то модуль векторного произведения равен произведению модулей сомножителей:

$$|[\mathbf{ab}]| = ab, \text{ если } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}. \tag{31}$$

Если перемножаемые векторы коллинеарны, $\sin(\widehat{\mathbf{ab}}) = 0$ и векторное произведение их равно нулю, т. е.

$$[\mathbf{ab}] = 0, \tag{32}$$

это равносильно $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ [1]; в частности,

$$[\mathbf{aa}] = 0. \tag{32'}$$

Свойство переместительности для векторного умножения не сохраняется, так как перемена мест сомножителей приводит к перемене знака произведения или, точнее, вектор-произведение меняет направление на противоположное:

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}]. \tag{33}$$

Свойство сочетательности по отношению к скалярному множителю сохраняется:

$$\alpha[\mathbf{ab}] = [(\alpha\mathbf{a})\,\mathbf{b}] = [\mathbf{a}\,(\alpha\mathbf{b})]. \tag{34}$$

Свойство распределительности для векторного произведения сохраняется:

$$[\mathbf{a}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c})] = [\mathbf{ab}] + [\mathbf{ac}]. \tag{35}$$

Если векторное произведение двух векторов $[\mathbf{ab}]$ умножается скалярно на третий вектор **c**, то такое произведение трёх векторов называется с м е ш а н н ы м (векторно-скалярным) и обозначается так:

$$[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c} = \mathbf{c}\,[\mathbf{ab}]. \tag{36}$$

Смешанное произведение имеет простое геометрическое толкование — это скаляр, по абсолютной величине равный объёму параллелепипеда, построенного на данных трёх векторах. Если векторы **a**, **b** и **c** составляют правую тройку, их смешанное произведение есть число положительное, равное указанному объёму; если же тройка **a**, **b** и **c** — левая, смешанное произведение — число отрицательное, и для получения положительного объёма придётся переменить знак на обратный.

Смешанное произведение трёх векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны, т. е. условие

---

[1] Мы не выделяем случая, когда один из сомножителей равен нулю, так как нуль-вектору можно приписать любое направление.

компланарности трёх векторов имеет вид:

$$[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}=0. \tag{37}$$

Смешанное произведение обладает тем свойством, что оно не меняется при круговой перестановке сомножителей и меняет знак при всякой перестановке, меняющей последовательность сомножителей:

$$[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}=[\mathbf{bc}]\,\mathbf{a}=[\mathbf{ca}]\,\mathbf{b}=-[\mathbf{ba}]\,\mathbf{c}=-[\mathbf{ac}]\,\mathbf{b}=-[\mathbf{cb}]\,\mathbf{a}. \tag{38}$$

Поэтому смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ иногда обозначают проще, написав их рядом в той последовательности, в которой производятся действия:

$$[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}=\mathbf{abc}. \tag{39}$$

Если векторное произведение двух векторов $[\mathbf{ab}]$ умножается векторно на третий вектор $\mathbf{c}$, то такое произведение называется **двойным векторным произведением** и обозначается так:

$$[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}]. \tag{40}$$

Двойное векторное произведение не обладает ни свойством переместительности, ни свойством сочетательности:

$$[[\mathbf{ab}]\mathbf{c}]\neq[\mathbf{c}\,[\mathbf{ab}]], \tag{41}$$

$$[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}]\neq[\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]]. \tag{42}$$

Вектор $[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}]$ компланарен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; поэтому он может быть разложен по этим векторам. Соответствующая формула разложения двойного векторного произведения такая:

$$[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}]=\mathbf{b}\,(\mathbf{ac})-\mathbf{a}\,(\mathbf{bc}). \tag{43}$$

**1058.** Образуют ли первые три пальца левой руки левую или правую тройку, если большой и указательный пальцы вытянуты в плоскости ладони, а средний палец согнут в сторону ладони? Тот же вопрос решить относительно тех же пальцев правой руки.

**1059.** Проверить, что при круговой перестановке векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ характер тройки (левой или правой) не меняется.

**1060.** Проверить, что при перестановке двух векторов из трёх данных левая тройка переходит в правую, и обратно.

**1061.** Проверить, что непрерывным вращением векторов левая тройка может преобразоваться в правую, лишь перейдя через положение компланарности.

**1062.** Упростить произведения $[\mathbf{ab}]$, $[\mathbf{bc}]$ и $[\mathbf{ca}]$, зная, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — взаимно перпендикулярные орты, образующие правую тройку.

**1063.** Решить задачу 1062 в предположении, что орты **a**, **b** и **c** образуют левую тройку.

**1064.** При каком значении коэффициента $\alpha$ векторы

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 5\mathbf{b} \text{ и } \mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$$

окажутся коллинеарными, если **a** и **b** не коллинеарны?

**1065.** Доказать, что векторное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю.

**1066.** Показать, что векторное умножение вектора **a** на перпендикулярный к нему орт **n** равносильно повороту вектора **a** на прямой угол по часовой стрелке в плоскости, перпендикулярной к орту **n**.

**1067.** Разобрать, какое изменение надо сделать в утверждении предшествующей задачи, если вектор **a** является множителем, а орт **n** — множимым.

**1068.** Проверить, что векторное умножение данного вектора **a** на вектор **b** может быть заменено тремя следующими операциями:

1) проектированием вектора **a** на плоскость, перпендикулярную к **b**;

2) поворотом полученного при проектировании вектора на прямой угол по часовой стрелке в указанной плоскости;

3) умножением повёрнутого вектора на модуль множителя **b**.

**1069.** Если **A** и **B** даны, можно ли подобрать **X** так, чтобы $\mathbf{A} = [\mathbf{BX}]$? Всегда ли задача возможна и сколько она имеет решений?

**1070.** Проверить, что $[\mathbf{ab}] = [\mathbf{bc}] = [\mathbf{ca}]$, если **a**, **b** и **c** — любые три вектора, удовлетворяющих условию $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$.

**1070*.** Доказать компланарность векторов: $[\mathbf{ap}]$, $[\mathbf{aq}]$ и $[\mathbf{ar}]$.

**1071.** Проверить, имеют ли место в векторной алгебре тождества:

1) $[\mathbf{a} + \mathbf{b},\ \mathbf{a} - \mathbf{b}] = [\mathbf{a}^2] - [\mathbf{b}^2]$ [1];

2) $[(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2] = [\mathbf{a}^2] \pm 2[\mathbf{ab}] + [\mathbf{b}^2]$;

3) $[\mathbf{ab}]^2 = \mathbf{a}^2\,\mathbf{b}^2$.

---

[1] Символ $[\mathbf{a}^2]$ заменяет $[\mathbf{aa}]$.

**1072.** Векторное произведение $[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\ (\mathbf{a}-\mathbf{b})]$ преобразовать в предположении, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, и дать геометрическое толкование полученному результату.

**1073.** Вычислить скаляр $\alpha=[\mathbf{ab}]^2+(\mathbf{ab})^2$.

**1074.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{P}=2\mathbf{A}+3\mathbf{B}$ и $\mathbf{Q}=\mathbf{A}-4\mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

**1075.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}=\mathbf{m}+2\mathbf{n}$ и $\overline{AD}=\mathbf{m}-3\mathbf{n}$, где $m=5$, $n=3$ и $(\widehat{\mathbf{mn}})=\frac{\pi}{6}$.

**1076.** Зная две стороны треугольника $\overline{AB}=3\mathbf{p}-4\mathbf{q}$ и $\overline{BC}=\mathbf{p}+5\mathbf{q}$, вычислить длину его высоты $\overline{CD}$ при условии, что $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — перпендикулярные друг к другу орты.

**1077.** Разложить вектор $\mathbf{P}=[(3\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c})\ (\mathbf{a}-\mathbf{b}+5\mathbf{c})]$ по взаимно перпендикулярным ортам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, образующим правую тройку.

**1078.** Дан вектор $\mathbf{Q}=[(3\mathbf{m}+4\mathbf{n}+5\mathbf{p})\ (\mathbf{m}+6\mathbf{n}+4\mathbf{p})]$, где $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ — взаимно перпендикулярные орты, образующие левую тройку. Вычислить его длину.

**1079.** Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах $\mathbf{a}=2\mathbf{m}+\mathbf{n}-\mathbf{p}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{m}-3\mathbf{n}+\mathbf{p}$, где $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{p}$ — взаимно перпендикулярные орты.

**1080.** Вычислить проекцию вектора $\mathbf{A}=3\mathbf{p}-12\mathbf{q}+4\mathbf{r}$ на ось, имеющую направление вектора $\mathbf{B}=[(\mathbf{p}-2\mathbf{r})\ (\mathbf{p}+3\mathbf{q}-4\mathbf{r})]$, если $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ — взаимно перпендикулярные орты.

**1081.** Доказать, что смешанное произведение трёх векторов, из которых два коллинеарны, равно нулю.

**1082.** Дать алгебраическое доказательство того, что смешанное произведение трёх компланарных векторов равно нулю.

**1083.** Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{P}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}=\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}=\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{C}$.

**1084.** Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах:

1) $\mathbf{a}=\mathbf{p}-3\mathbf{q}+\mathbf{r}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{p}+\mathbf{q}-3\mathbf{r}$ и $\mathbf{c}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}+\mathbf{r}$, где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ — взаимно перпендикулярные орты;

2) $\mathbf{a}=3\mathbf{m}+5\mathbf{n}$, $\mathbf{b}=\mathbf{m}-2\mathbf{n}$, $\mathbf{c}=2\mathbf{m}+7\mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}|=1/2$, $|\mathbf{n}|=3$, $(\widehat{\mathbf{mn}})=135°$.

**1085.** Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на трёх векторах: $\mathbf{A}=3\mathbf{P}+2\mathbf{Q}-5\mathbf{R}$, $\mathbf{B}=\mathbf{P}-\mathbf{Q}+4\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}=\mathbf{P}-3\mathbf{Q}+\mathbf{R}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Кроме того, известно, что $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ — взаимно перпендикулярные орты.

**1086.** Проверить, компланарны ли данные векторы:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \mathbf{p}=\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c};\ \mathbf{q}=3\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c};\\
\quad \mathbf{r}=7\mathbf{a}+14\mathbf{b}-13\mathbf{c};\\
2)\ \mathbf{p}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}-3\mathbf{c};\ \mathbf{q}=\mathbf{a}-4\mathbf{b}+\mathbf{c};\\
\quad \mathbf{r}=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+2\mathbf{c};\\
3)\ \mathbf{p}=[\mathbf{am}];\ \mathbf{q}=[\mathbf{bm}];\ \mathbf{r}=[\mathbf{cm}].
\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\text{ — взаимно}\\ \text{перпендикулярные}\\ \text{орты}\end{array}$$

**1087.** Проверить справедливость равенства

$$[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}]+[[\mathbf{bc}]\,\mathbf{a}]+[[\mathbf{ca}]\,\mathbf{b}]=0.$$

**1088.** Показать, что если $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}\perp\mathbf{C}$, то

$$[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]]=0.$$

**1089.** Будут ли равносильны следующие два равенства:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)}\ \mathbf{A}=\mathbf{B} & \text{и} & \alpha\mathbf{A}=\alpha\mathbf{B};\\
\text{b)}\ \mathbf{A}=\mathbf{B} & \text{и} & (\mathbf{AC})=(\mathbf{BC});\\
\text{c)}\ \mathbf{A}=\mathbf{B} & \text{и} & [\mathbf{AC}]=[\mathbf{BC}];\\
\text{d)}\ \mathbf{A}=\mathbf{B} & \text{и} & \mathbf{A}+\mathbf{C}=\mathbf{B}+\mathbf{C}?
\end{array}$$

**1090.** Доказать компланарность векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, зная, что

$$[\mathbf{ab}]+[\mathbf{bc}]+[\mathbf{ca}]=0.$$

**1091.** Зная, что $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$, найти соотношение между векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, не содержащее коэффициентов $\lambda$ и $\mu$.

**1092.** Можно ли найти вектор $\mathbf{x}$, одновременно удовлетворяющий двум уравнениям: $\mathbf{xa}=\alpha$ и $[\mathbf{xb}]=\mathbf{c}$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — данные векторы и $\alpha$ — данный скаляр?

**1093.** Найти вектор $\mathbf{x}$, одновременно удовлетворяющий трём уравнениям: $\mathbf{xa}=\alpha$, $\mathbf{xb}=\beta$ и $\mathbf{xc}=\gamma$.

**1093*.** Проверить, что $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2+\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1=0$, если существует вектор $\mathbf{x}$, одновременно удовлетворяющий двум уравнениям: $[\mathbf{a}_1\mathbf{x}]=\mathbf{b}_1$ и $[\mathbf{a}_2\mathbf{x}]=\mathbf{b}_2$.

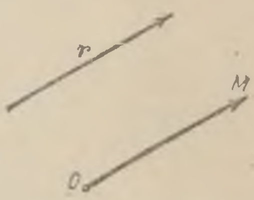
# ГЛАВА XVI

# ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

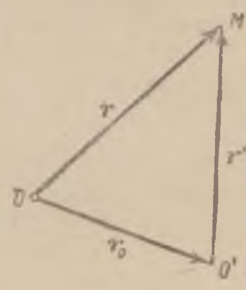
## 1. Определение положения точки при помощи радиуса-вектора. Координаты вектора. Действия над векторами, заданными своими координатами. Основные формулы

Положение точки в пространстве может быть определено одним вектором, который называется радиусом-вектором[1] этой точки.

Чтобы осуществить такое определение, необходимо выбрать в пространстве произвольную точку $O$, называемую полюсом. Как только полюс $O$ выбран, каждой точке $M$ соответствует единственный вектор $OM$, связывающий полюс с этой точкой, и, наоборот, каждому вектору $\mathbf{r}$ соответствует единственная точка — конец вектора $\mathbf{r}$, отнесённого к полюсу (черт. 72). То, что точке $M$ соответствует радиус-вектор $\mathbf{r}$, записывают так: $M(\mathbf{r})$.




Черт. 72.




Черт. 73.

Если мы изменим полюс, например за полюс выберем новую точку $O'(\mathbf{r}_0)$, то точке $M$ будет соответствовать другой радиус-вектор $\mathbf{r}'$, который связан с прежним радиусом-вектором этой точки $\mathbf{r}$ и с радиусом-вектором нового полюса $\mathbf{r}_0$ следующим образом (черт. 73):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \quad \text{или} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0. \tag{1}$$

Если даны[2] две точки $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$, то вектор, их соединяющий, равен разности радиусов-векторов этих точек:

$$\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \tag{2}$$

---

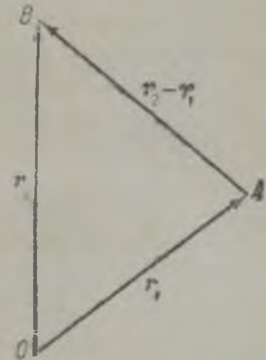
[1] В настоящей главе под словом «радиус-вектор» мы подразумеваем именно вектор, т. е. отрезок определённой длины и определённого направления, в противоположность сказанному в гл. II, V и VII, где под радиусом-вектором подразумевалась лишь длина отрезка.

[2] Дать точку — значит дать её радиус-вектор.

причём из радиуса-вектора конца вектора надо вычесть радиус-вектор начала (черт. 74).

Если даны две точки $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$, то радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки $C$, делящей вектор $\overline{AB}$ в отношении $\lambda$ (черт. 75), т. е. $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\lambda$, определяется по формуле:

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{r}_2}{1+\lambda}\ [1]. \tag{3}$$



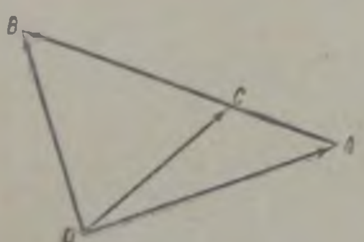

Черт. 74.

В частности, радиус-вектор середины ($\lambda=1$) вектора $\overline{AB}$ равен полусумме радиусов-векторов его концов:

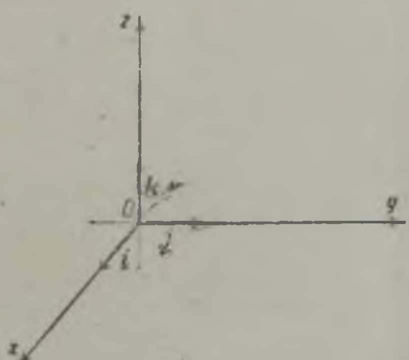
$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}. \tag{4}$$

Чтобы связать векторный метод решения задач с методом координатным и чтобы включить векторы в число тех геометрических объектов, операции над которыми могут быть заменены алгебраическими вычислениями, рассмотрим их в связи с системой координат.

Пространственная система координат [2]), состоящая из трёх взаимно перпендикулярных осей координат, вполне устанавливается выбором начала координат и ортов всех трёх осей. Условимся раз навсегда обозначать орт оси $x$ через $\mathbf{i}$, орт оси $y$ — через $\mathbf{j}$ и орт




Черт. 75.




Черт. 76.

оси $z$ — через $\mathbf{k}$. Таким образом, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ являются взаимно перпендикулярными единичными векторами (черт. 76), составляющими

---

[1]) Сопоставляя полученный результат с формулой (8) гл. VII, видим, что одно векторное равенство заменяет три координатных.

[2]) Мы ограничиваемся прямоугольными системами координат.

правую связку, т. е. они удовлетворяют следующим условиям:

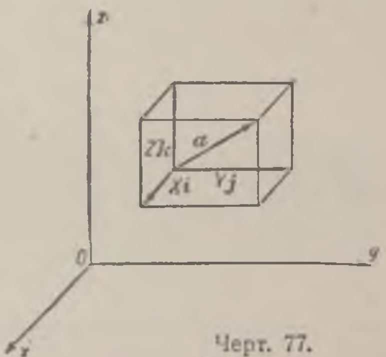
$$\mathbf{i}^2 = 1, \quad \mathbf{j}^2 = 1, \quad \mathbf{k}^2 = 1, \tag{5}$$

$$(\mathbf{ij}) = 0, \quad (\mathbf{jk}) = 0, \quad (\mathbf{ki}) = 0, \tag{6}$$

$$[\mathbf{ij}] = \mathbf{k}, \quad [\mathbf{jk}] = \mathbf{i}, \quad [\mathbf{ki}] = \mathbf{j}. \tag{7}$$

Любой вектор **a** может быть разложен по трём некомпланарным векторам **i**, **j** и **k**. Обозначив коэффициенты этого разложения $X$, $Y$ и $Z$, получим:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}. \tag{8}$$



Черт. 77.

Векторы $X\mathbf{i}$, $Y\mathbf{j}$ и $Z\mathbf{k}$ называются **компонентами** вектора **a** по осям координат; это — векторы, коллинеарные соответствующим осям; они же служат рёбрами того параллелепипеда, для которого **a** является диагональю (черт. 77).

Что же касается коэффициентов разложения $X$, $Y$, $Z$, то они равны модулям компонентов, взятым с соответствующим знаком; другими словами, они являются проекциями вектора **a** на соответствующие оси координат:

$$\begin{aligned} X &= \text{пр.}_{\mathbf{i}}\ \mathbf{a}, \\ Y &= \text{пр.}_{\mathbf{j}}\ \mathbf{a}, \\ Z &= \text{пр.}_{\mathbf{k}}\ \mathbf{a}. \end{aligned} \tag{9}$$

Иначе их можно рассматривать как скалярные произведения вектора **a** на орты соответствующих осей:

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{ai}, \\ Y &= \mathbf{aj}, \\ Z &= \mathbf{ak}. \end{aligned} \tag{10}$$

Проекции ($X$, $Y$, $Z$) вектора **a** на три оси координат называются **координатами вектора**.

Каждому вектору соответствует единственная тройка координат благодаря однозначности разложения вектора по трём некомпланарным ортам **i**, **j**, **k**, и, обратно, каждая тройка координат $X$, $Y$, $Z$ определяет единственный вектор **a**, так как из (8) имеем:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \tag{11}$$

т. е. длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат, а из соотношений (10) и (11) получаем возможность определить направление вектора:

$$\left.\begin{array}{c}\cos\alpha=\dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};\qquad \cos\beta=\dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};\\ \cos\gamma=\dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\end{array}\right\}\qquad(12)$$

где

$$\alpha=(\widehat{\mathbf{ai}}),\quad \beta=(\widehat{\mathbf{aj}})\quad \text{и}\quad \gamma=(\widehat{\mathbf{ak}}).$$

То, что вектор **a** имеет координаты $X$, $Y$, $Z$, обозначается так:

$$\mathbf{a}\{X,\ Y,\ Z\}.$$

Если дано несколько векторов своими координатами:

$$\mathbf{a}_1\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\},\ \ \mathbf{a}_2\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\},\ \ldots,\ \mathbf{a}_n\{X_n,\ Y_n,\ Z_n\},$$

то координаты суммы этих векторов

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n$$

равны алгебраическим суммам одноимённых координат слагаемых векторов, т. е.

$$\mathbf{c}\{X_1+X_2+\ldots+X_n,\ Y_1+Y_2+\ldots+Y_n,\ Z_1+Z_2+\ldots+Z_n\}.\qquad(13)$$

Координаты разности двух векторов равны разностям одноимённых координат этих векторов, т. е. если

$$\mathbf{a}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\},\quad \mathbf{b}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$$

и

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b},$$

то

$$\mathbf{c}\{X_1-X_2,\ Y_1-Y_2,\ Z_1-Z_2\}.\qquad(14)$$

Координаты произведения вектора $\mathbf{a}\{X,\ Y,\ Z\}$ на скаляр $\alpha$ равны произведениям координат вектора на тот же скаляр:

$$\alpha\mathbf{a}\{\alpha X,\ \alpha Y,\ \alpha Z\}.\qquad(15)$$

Если даны координаты двух векторов $\mathbf{a}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$ и $\mathbf{b}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их одноимённых координат:

$$\mathbf{ab}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.\qquad(16)$$

Угол между этими двумя векторами вычисляется по формуле:

$$\cos(\widehat{\mathbf{ab}})=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.\qquad(17)$$

Условие перпендикулярности двух векторов:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0.\qquad(18)$$

Условие коллинеарности двух векторов:

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}. \qquad (19)$$

Если даны координаты двух векторов $\mathbf{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\mathbf{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$, то координаты их векторного произведения $[\mathbf{ab}]$ вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} X &= Y_1Z_2 - Y_2Z_1, \\ Y &= Z_1X_2 - Z_2X_1, \\ Z &= X_1Y_2 - X_2Y_1, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

или, проще, эти координаты являются определителями матрицы

$$\begin{Vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{Vmatrix}, \qquad (21)$$

составленной из координат данных двух векторов [1]).

Можно векторное произведение тех же двух векторов представить с помощью определителей третьего порядка:

$$[\mathbf{ab}]=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \qquad (22)$$

Скаляр $\mathbf{abc}$, представляющий смешанное произведение трёх данных векторов $\mathbf{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$ и $\mathbf{c}\{X_3, Y_3, Z_3\}$, равняется определителю третьего порядка, составленному из координат этих трёх векторов:

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}; \qquad (23)$$

отсюда вытекает условие компланарности трёх векторов:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (24)$$

Чтобы связать координаты вектора с координатами точки, надо иметь в виду, что координаты точки $M(x, y, z)$ равны координатам её радиуса-вектора $\overline{OM}\{X, Y, Z\}$, если полюс совпадает с началом координат, т. е.

$$X=x, \quad Y=y, \quad Z=z. \qquad (25)$$

---

[1]) Для получения из этой матрицы координат векторного произведения надо в ней поочерёдно вычеркнуть первый, второй и третий столбцы, переменив у среднего определителя знак на противоположный.

Если вектор $\overline{AB}$ задан своими конечными точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этого вектора $\{X, Y, Z\}$ равны разностям одноимённых координат конца и начала вектора:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1. \tag{26}$$

Чтобы перейти от векторной формулы, например от формулы

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{r}_2}{1 + \lambda}, \tag{3}$$

к соответствующим координатным формулам, можно воспользоваться разложениями радиусов-векторов по основным ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

Вставив эти выражения в данную формулу (3), получим:

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \frac{(x_1 + \lambda x_2)\,\mathbf{i} + (y_1 + \lambda y_2)\,\mathbf{j} + (z_1 + \lambda z_2)\,\mathbf{k}}{1 + \lambda}. \tag{3'}$$

Принимая во внимание однозначность разложения вектора, можно приравнять коэффициенты при одинаковых ортах в левой и правой частях равенства (3′):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{3''}$$

Можно было бы при решении этой же задачи применить другой способ, а именно, спроектировать вектор $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{r}_2}{1 + \lambda}$ последовательно на каждую из осей координат, т. е. скалярно помножить обе части равенства (3) последовательно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$.

При умножении на $\mathbf{i}$ получим:

$$(\mathbf{r}\mathbf{i}) = \frac{(\mathbf{r}_1\mathbf{i}) + \lambda\,(\mathbf{r}_2\mathbf{i})}{1 + \lambda}$$

или, принимая во внимание, что

$$(\mathbf{r}\mathbf{i}) = x, \quad (\mathbf{r}_1\mathbf{i}) = x_1, \quad (\mathbf{r}_2\mathbf{i}) = x_2,$$

получим:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

и т. д.

Примечание. В настоящей главе мы ввели сразу пространственную систему координат и разложение любого вектора по трём основным ортам; если все рассматриваемые векторы лежат в одной и той же плоскости $(xy)$, то их можно было бы разложить по двум компланарным им ортам:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}.$$

Каждый такой вектор имел бы только две координаты, и все приведённые формулы соответственно упростились бы.

**1094.** Зная три вершины параллелограмма $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$, найти четвёртую его вершину $D$, противолежащую $B$.

**1095.** Где выбрать полюс, чтобы сумма радиусов-векторов всех вершин параллелограмма равнялась нулю? Сколько решений имеет эта задача?

**1096.** Доказать, что отрезки, соединяющие середины противолежащих рёбер тетраэдра, проходят через одну и ту же точку и делятся в ней пополам.

**1097.** Проверить, что сумма радиусов-векторов вершин треугольника равна нулю, если полюс совпадает с центром тяжести треугольника.

**1098.** Проверить, что сумма векторов, направленных из центра тяжести $n$ материальных точек во все эти точки, равна нулю, если во всех $n$ точках сосредоточены равные массы.

**1099.** Как записать условие коллинеарности [1]) трёх точек $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$?

**1099*.** Проверить, что точки $A(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $B(3\mathbf{i}+7\mathbf{j}+5\mathbf{k})$ и $C(4\mathbf{i}+10\mathbf{j}+9\mathbf{k})$ лежат на одной прямой.

**1100.** Что можно утверждать относительно расположения трёх точек $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$, если их радиусы-векторы связаны соотношением:

$$\alpha\mathbf{r}_1+\beta\mathbf{r}_2+\gamma\mathbf{r}_3=0,$$

причём

$$\alpha+\beta+\gamma=0?$$

**1101.** Как выразить условие компланарности четырёх точек $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$, $C(\mathbf{r}_3)$ и $D(\mathbf{r}_4)$?

**1102.** Как выразить площадь треугольника через радиусы-векторы его вершин?

**1102*.** Проверить, что точки $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$ лежат на одной прямой, если

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]+[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]+[\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1]=0.$$

**1103.** Даны вершины треугольника: $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(5;\ -3;\ 4)$ и $C(2;\ 1;\ 6)$. Разложить векторы, совпадающие с его сторонами, по основным ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

---

[1]) Точки называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой.

**1104.** Можно ли решить задачу, обратную задаче 1103, т. е., зная разложения сторон треугольника по основным ортам, найти его вершины?

**1105.** Зная одну из вершин треугольника $A(2; -5; 3)$ и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB}\{4; 1; 2\}$ и $\overline{BC}\{3; -2; 5\}$, найти остальные вершины и сторону $\overline{CA}$.

**1106.** Доказать, что четырёхугольник, все вершины которого определены своими радиусами-векторами $\mathbf{r}_1 = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_4 = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, есть параллелограмм.

**1106*.** Найти радиусы-векторы вершин четырёхугольника задачи 1106 после того, как полюс будет перенесён в вершину $C(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$.

**1107.** Найти проекцию вектора $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 3\mathbf{n} - \mathbf{p}$ на ось абсцисс и компоненту этого же вектора по оси ординат, если $\mathbf{m} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ и $\mathbf{p} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

**1108.** Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, где $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

**1108*.** Проверить, что треугольник с вершинами $A(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$, $B(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, $C(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$ — прямоугольный.

**1109.** Найти длину и направление вектора $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 5\mathbf{n} + \mathbf{p}$, зная, что $\mathbf{m} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ и $\mathbf{p} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

**1110.** Найти вектор $\mathbf{P}$, зная две его координаты $X = 3$, $Y = -9$ и модуль $P = 12$.

**1111.** Найти единичный вектор $\mathbf{a}$, параллельный вектору $\mathbf{A}\{6; 7; -6\}$.

**1112.** Найти единичный вектор $\mathbf{p}$, одновременно перпендикулярный к вектору $\mathbf{a}\{3; 6; 8\}$ и к оси абсцисс.

**1113.** Даны компоненты трёх сил: $\mathbf{a}_x = 5\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_y = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_z = -7\mathbf{k}$; $\mathbf{b}_x = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{b}_y = 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b}_z = 4\mathbf{k}$; $\mathbf{c}_x = 12\mathbf{i}$, $\mathbf{c}_y = \mathbf{j}$ и $\mathbf{c}_z = 15\mathbf{k}$. Найти величину и направление равнодействующей силы $\mathbf{R}$.

**1114.** Зная, что векторы $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ коллинеарны, вычислить коэффициенты $\alpha$ и $\gamma$.

**1115.** В плоскости $(xy)$ найти вектор $\mathbf{P}$, перпендикулярный к вектору $\mathbf{Q}\{5; -3; 4\}$ и имеющий одинаковую с ним длину.

**1116.** Зная векторы, совпадающие с двумя сторонами треугольника $\overline{AB}\{2;\ 1;\ -2\}$ и $\overline{BC}\{3;\ 2;\ 6\}$, вычислить углы этого треугольника.

**1116*.** Вычислить площадь треугольника задачи 1116.

**1117.** Вычислить объём параллелепипеда, построенного на трёх данных векторах $\mathbf{P}\{3;\ 1;\ -2\}$, $\mathbf{Q}\{-4;\ 0;\ 3\}$ и $\mathbf{R}\{1;\ 5;\ -1\}$, и исследовать, образуют ли векторы левую или правую тройку.

**1118.** Проверить, будут ли компланарны данные три вектора:

a) $\mathbf{A}\{2;\ -1;\ 3\}$, $\mathbf{B}\{1;\ 4;\ 2\}$, $\mathbf{C}\{3;\ 1;\ -1\}$;

b) $\mathbf{L}\{1;\ 6;\ 5\}$, $\mathbf{M}\{3;\ -2;\ 4\}$, $\mathbf{N}\{7;\ -18;\ 2\}$.

**1119.** Исходя из условия компланарности трёх векторов $\overline{AB}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$, $\overline{AC}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$ и $\overline{AD}\{X_3,\ Y_3,\ Z_3\}$, дать условие компланарности четырёх точек $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$ и $D(x_4,\ y_4,\ z_4)$.

**1120.** Проверить, что радиус-вектор любой точки прямой, делящей пополам угол между $\mathbf{r}_1\{x_1,\ y_1\}$ и $\mathbf{r}_2\{x_2,\ y_2\}$, может быть представлен формулой:

$$\mathbf{r}=\lambda\left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}+\frac{\mathbf{r}_2}{r_2}\right).$$

Найти уравнение, связывающее координаты любой точки этой прямой.

## 2. Геометрическое значение векторных уравнений

В аналитической геометрии положение точки в пространстве определяется тремя координатами; поэтому, чтобы задать точку, надо или непосредственно дать все три её координаты, или дать три уравнения, из которых можно было бы их определить. Если дано лишь одно или два уравнения, связывающих пространственные координаты точки, то они не могут определить одну единственную точку; им удовлетворяют координаты бесчисленного множества точек, которые заполняют или некоторую поверхность (случай одного уравнения), или линию (случай двух уравнений). В таком случае мы говорим, что данное уравнение определяет п о в е р х н о с т ь, или что система двух уравнений определяет в пространстве некоторую л и н и ю.

Если же воспользоваться векторным определением положения точки, то для определения точки достаточно знания одного вектора — радиуса-вектора этой точки, который может быть дан непосредственно или может быть получен из уравнения. Вопрос о том, определяет ли данное уравнение одну точку или целую поверхность, или линию, не разрешается в общем виде, как при координатном методе, а в каждом отдельном случае решается в зависимости от характера уравнения.

Например, если дано уравнение

$$\frac{(\mathbf{ab})\,\mathbf{r} + 3\mathbf{a}}{c^2} = \frac{2\,[\mathbf{bc}] - \mathbf{r}\,(\mathbf{ac})}{a^2}, \tag{27}$$

его можно решить относительно $\mathbf{r}$ и получить новое уравнение, равносильное[1]) данному:

$$\mathbf{r} = \frac{2c^2\,[\mathbf{bc}] - 3a^2\mathbf{a}}{a^2\,(\mathbf{ab}) + c^2\,(\mathbf{ac})}.$$

В правой части этого уравнения указан ряд однозначных действий над известными векторами; выполнив их, мы получим определённый единственный вектор, которому по условию должен равняться радиус-вектор искомой точки, т. е. уравнение (27) определяет единственную точку.

Возьмём другой пример:

$$a\mathbf{r} + \mathbf{ab} = 0. \tag{28}$$

Если решить это уравнение относительно $\mathbf{r}$, то окажется, что вектор должен равняться скаляру, чего, конечно, быть не может. Поэтому такое уравнение не определяет ни одной точки, оно никакого смысла не имеет. Исключение составляет лишь случай, когда данные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны, т. е. $(\mathbf{ab}) = 0$; тогда уравнению (28) удовлетворяет радиус-вектор одной единственной точки — полюса, если $a \neq 0$.

Если данное уравнение содержит не самый радиус-вектор искомой точки, а его длину, как, например, уравнение

$$r^2 = a^2, \tag{29}$$

то и определена может быть лишь одна длина радиуса-вектора, и совершенно произвольным остаётся его направление. Такому уравнению удовлетворяют радиусы-векторы бесчисленного множества точек, в частности, уравнению (29) удовлетворяют все точки сферической поверхности, имеющей центр в полюсе и радиус, равный $a$.

Наиболее типичными уравнениями, определяющими не одну, а бесчисленное множество точек, являются уравнения, в которых

[1]) Что вновь полученное уравнение равносильно данному, следует из того, что при решении мы пользуемся только двумя операциями: умножением обеих частей уравнения на один и тот же скаляр и прибавлением к обеим частям уравнения одного и того же вектора (см. задачу 1089).

искомый радиус-вектор входит в качестве сомножителя в скалярном или в векторном произведении (см. задачи 1055 и 1069).

Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{ra} = 0. \tag{30}$$

Это уравнение накладывает на радиус-вектор требование, чтобы он был перпендикулярен к данному вектору $\mathbf{a}$. Но таких радиусов-векторов существует бесчисленное множество, все они расположены в плоскости, проходящей через полюс перпендикулярно к $\mathbf{a}$. Обратно, если в этой плоскости взять любую точку, то её радиус-вектор удовлетворяет поставленному условию. Таким образом, уравнение (30) определяет плоскость, проходящую через полюс перпендикулярно к вектору $\mathbf{a}$.

Точно так же нетрудно видеть, что геометрическое место точек, радиусы-векторы которых удовлетворяют уравнению

$$[\mathbf{ra}] = 0, \tag{31}$$

есть прямая, проходящая через полюс параллельно вектору $\mathbf{a}$.

Таким образом, геометрическое значение векторного уравнения всецело зависит от характера этого уравнения.

Важно уметь не только находить геометрический образ, соответствующий данному уравнению, но и решать обратную задачу — составлять уравнение данного геометрического места точек.

Составим, например, векторное уравнение геометрического места точек, равноудалённых от данных двух точек $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$. Пусть $M(\mathbf{r})$ обозначает подвижную точку, описывающую данное геометрическое место. Нужно связать уравнением переменный (текущий) радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки $M$ с постоянными данными векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. По условию задачи векторы $\overline{AM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ и $\overline{BM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_2$ должны иметь одинаковую длину, что можно записать так:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$$

или

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)^2.$$

Искомое уравнение составлено, но его можно ещё преобразовать:

$$r^2 - 2(\mathbf{r}\mathbf{r}_1) + r_1^2 = r^2 - 2(\mathbf{r}\mathbf{r}_2) + r_2^2, \quad 2\{(\mathbf{r}\mathbf{r}_2) - (\mathbf{r}\mathbf{r}_1)\} = r_2^2 - r_1^2,$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = 0, \qquad \mathbf{r}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\left(\frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1}{2}\right) = 0,$$

или окончательно:

$$\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0. \tag{32}$$

Уравнение (32) имеет простое геометрическое толкование: векторы $\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$ и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ должны быть перпендикулярны друг к другу. Но $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \overline{AB}$ (черт. 78) есть вектор, соединяющий данные две точки, а $\mathbf{r}-\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}=\overline{CM}$ есть вектор, соединяющий подвижную точку $M$ с серединой отрезка $AB$. Таким образом, все точки, удовлетворяющие уравнению (32), лежат на перпендикулярах, восставленных к отрезку $AB$ и проходящих через его середину, т. е. они заполняют плоскость, перпендикулярную к отрезку $AB$ и делящую его пополам.

Составим ещё уравнение сферической поверхности, имеющей центр в точке $C(\mathbf{r}_1)$ и радиус, длина которого равна $a$. Любая точка $M(\mathbf{r})$ сферической поверхности должна обладать тем свойством, что её расстояние от центра $C$ равно $a$, т. е.

$$|\overline{CM}|=a,$$

но, так как $\overline{CM}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, уравнение примет вид:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|=a$$

или

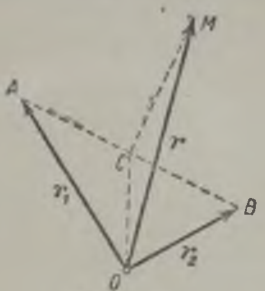
$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2=a^2. \tag{33}$$

Это уравнение можно ещё преобразовать:

$$\mathbf{r}^2-2(\mathbf{r}\mathbf{r}_1)+r_1^2=a^2$$

или

$$r^2-2(\mathbf{r}\mathbf{r}_1)=a^2-r_1^2. \tag{33'}$$



Черт. 78.

Иногда геометрическое место точек изображается векторным уравнением, содержащим переменный скалярный параметр.

Например, в задаче 1120 было дано в параметрической форме уравнение биссектрисы угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, отнесёнными к полюсу:

$$\mathbf{r}=\lambda\left(\frac{\mathbf{a}}{a}+\frac{\mathbf{b}}{b}\right). \tag{34}$$

Прямую, проходящую через полюс параллельно $\mathbf{a}$, можно представить не только уравнением (31), но и уравнением

$$\mathbf{r}=\lambda\mathbf{a}. \tag{31'}$$

Переход от векторных уравнений к координатным, и обратно, может быть осуществлён благодаря зависимости, существующей между координатами $(x, y, z)$ точки и её радиусом-вектором $\mathbf{r}$:

$$x=(\mathbf{r}\mathbf{i}),\quad y=(\mathbf{r}\mathbf{j}),\quad z=(\mathbf{r}\mathbf{k}), \tag{35}$$

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}. \tag{36}$$

**1121.** Составить векторные уравнения координатных плоскостей и координатных осей[1]).

---

[1]) Как в этой задаче, так и всюду в дальнейшем, если не будет оговорок, предполагается, что полюс совпадает с началом координат.

**1122.** Составить уравнение геометрического места точек, равноотстоящих от точек $A(\mathbf{i}+5\mathbf{j}-2\mathbf{k})$ и $B(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

**1123.** Зная уравнение геометрического места предшествующей задачи $\mathbf{r}(\mathbf{i}-8\mathbf{j}+3\mathbf{k})=-8$, проверить, принадлежат ли ему точки, радиусы-векторы которых $\mathbf{r}_1=15\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_2=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

**1124.** Составить уравнение сферической поверхности, проходящей через полюс и имеющей центр в точке $C(\mathbf{r}_1)$.

**1125.** Найти центр и радиус сферы:

$$r^2-2\mathbf{r}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})=35.$$

**1126.** Зная две точки $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$, найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок $\overline{AB}$ виден под прямым углом.

**1127.** Проверить, что уравнение

$$r^2-\mathbf{r}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)+(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)=0$$

изображает сферическую поверхность. Найти её центр и радиус.

**1128.** Какому уравнению удовлетворяют радиусы-векторы всех точек окружности, лежащей в плоскости $(xy)$, имеющей центр в точке $C(3\mathbf{i})$ и радиус длиной в 5 единиц?

**1129.** Найти геометрическое значение уравнений:

а) $r^2+8(\mathbf{rk})+12=0$;

б) $r^2-12(\mathbf{rj})-16(\mathbf{rk})=125$.

**1130.** Зная векторное уравнение сферической поверхности

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2=a^2,$$

вывести из него соответствующее координатное уравнение.

**1131.** Составить уравнение геометрического места точек, обладающих тем свойством, что проекция радиуса-вектора каждой из них на ось $x$ равна четырём единицам.

Разобрать, как расположены эти точки в пространстве.

**1132.** Исследовать геометрический смысл уравнений:

a) $\mathbf{rj}=-5$;

b) $\mathbf{rk}=6$.

**1133.** Ограничиваясь рассмотрением точек и векторов, расположенных в одной плоскости, показать, что уравнение

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}=0$$

изображает прямую, проходящую через точку $A(\mathbf{r}_1)$ перпендикулярно к данному вектору $\mathbf{a}$.

**1134.** При ограничениях задачи 1133 составить координатное уравнение прямой $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathbf{a}=0$, если дано

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} \text{ и } \mathbf{a} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}.$$

**1135.** Дать геометрическое толкование уравнению

$$[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}] = 0.$$

**1136.** Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$.

**1137.** На плоскости уравнение $r^2 = a^2$ изображает окружность. Составить уравнение касательной к ней в любой её точке $A(\mathbf{r}_1)$.

**1138.** При ограничениях задачи 1133, зная вершины треугольника $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$, написать уравнения:

a) высоты, опущенной из вершины $A$;

b) медианы, проведённой из вершины $B$;

c) перпендикуляра к стороне $BC$, проходящего через её середину;

d) биссектрисы внутреннего угла $A$.

### 3. Плоскость

Всякое уравнение вида:

$$\mathbf{r}\mathbf{a} = \alpha, \tag{37}$$

т. е. уравнение, в котором скалярное произведение текущего радиуса-вектора ($\mathbf{r}$) на данный вектор ($\mathbf{a}$) приравнивается данному скаляру ($\alpha$), изображает п л о с к о с т ь; обратно, всякая плоскость может быть представлена таким уравнением — общим уравнением плоскости.

Если в уравнении (37) свободный член $\alpha = 0$, плоскость проходит через полюс.

В частности, если постоянный множитель в скалярном произведении есть единичный вектор ($\mathbf{n}$), а свободный член, перенесённый в левую часть уравнения, окажется числом отрицательным, т. е.

$$\mathbf{r}\mathbf{n} - p = 0, \tag{38}$$

где $\mathbf{n}^2 = 1$ и $p > 0$, то уравнение (38) называется н о р м а л ь н ы м у р а в н е н и е м п л о с к о с т и, и входящие в него параметры имеют простой геометрический смысл: $\mathbf{n}$ есть орт, направленный из полюса в сторону плоскости и к ней перпендикулярный, а $p$ есть расстояние плоскости от полюса.

Чтобы привести уравнение (37) к нормальному виду, нужно перенести свободный член в левую часть:

$$(\mathbf{ra}) - \alpha = 0 \tag{37'}$$

и все члены помножить на один и тот же скаляр — нормирующий множитель:

$$M = \frac{1}{\pm a} = \frac{1}{a'},$$

где $a'$ есть длина вектора $\mathbf{a}$, взятая со знаком, противоположным знаку свободного члена уравнения (37'). Тогда получим:

$$\left(\mathbf{r}\frac{\mathbf{a}}{a'}\right) - \frac{\alpha}{a'} = 0, \tag{37''}$$

где $\frac{\mathbf{a}}{a'} = \mathbf{n}$ и $\frac{\alpha}{a'} = p$.

Расстояние $\delta$ любой точки $N(\mathbf{r}_1)$ от плоскости (38) вычисляется по формуле:

$$\delta = (\mathbf{r}_1\mathbf{n}) - p \tag{39}$$

или, если плоскость дана уравнением (37):

$$\delta = \left(\mathbf{r}_1\frac{\mathbf{a}}{a'}\right) - \frac{\alpha}{a'}, \tag{39'}$$

т. е. расстояние точки от плоскости равно левой части нормального уравнения плоскости, в которой текущий радиус-вектор заменён радиусом-вектором данной точки.

Расстояние, вычисленное по формуле (39) или (39'), окажется положительным или отрицательным в зависимости от того, расположены ли данная точка и полюс по разным сторонам от плоскости или по одной и той же стороне от неё.

Если плоскость задана вектором $\mathbf{a}$, к ней перпендикулярным, и одной из точек $A(\mathbf{r}_1)$, то уравнение плоскости имеет вид:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{a} = 0. \tag{40}$$

Уравнение (40) может быть приведено к виду (37):

$$\mathbf{ra} = \mathbf{r}_1\mathbf{a}.$$

Если плоскость задана двумя параллельными ей векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и точкой $A(\mathbf{r}_1)$, на ней лежащей, то уравнение её следующее:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,[\mathbf{ab}] = 0. \tag{41}$$

Если плоскость задана двумя точками $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$ и одним вектором $\mathbf{a}$, ей параллельным, уравнение её имеет вид:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}] = 0. \tag{42}$$

Если плоскость задана тремя своими точками $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$, её уравнение будет:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3] = 0 \tag{43}$$

или после преобразований:

$$\mathbf{r}([\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]+[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]+[\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1])=\mathbf{r}_1[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]. \tag{43'}$$

В частности, если все три точки даны на осях координат $A(a\mathbf{i})$, $B(b\mathbf{j})$ и $C(c\mathbf{k})$, уравнение плоскости (уравнение в отрезках) примет вид:

$$\mathbf{r}\mathbf{q}=1, \tag{44}$$

где

$$\mathbf{q}=\frac{1}{a}\mathbf{i}+\frac{1}{b}\mathbf{j}+\frac{1}{c}\mathbf{k}.$$

Если даны две плоскости своими общими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}\mathbf{a}=\alpha,\\ \mathbf{r}\mathbf{b}=\beta,\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

то угол $\varphi$ между этими плоскостями равен углу между векторами, к ним перпендикулярными, т. е.

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{ab}}{ab} \quad \text{и} \quad \sin\varphi=\frac{|[\mathbf{ab}]|}{ab}. \tag{46}$$

Условие параллельности плоскостей (45):

$$[\mathbf{ab}]=0 \text{ или } \mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}. \tag{47}$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\mathbf{ab}=0. \tag{48}$$

Если даны три плоскости:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}\mathbf{a}=\alpha,\\ \mathbf{r}\mathbf{b}=\beta,\\ \mathbf{r}\mathbf{c}=\gamma,\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

то радиус-вектор точки пересечения этих плоскостей можно определить как вектор, удовлетворяющий одновременно всем трём уравнениям (49) (см. задачу 1093). Для его вычисления можно также воспользоваться формулой:

$$\mathbf{r}=\frac{\alpha[\mathbf{bc}]+\beta[\mathbf{ca}]+\gamma[\mathbf{ab}]}{\mathbf{abc}}. \tag{50}$$

**1139.** Исследовать, нет ли среди нижеприведённых уравнений плоскостей нормальных уравнений:

1) $\mathbf{r}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})-3=0$;
2) $\mathbf{r}({}^4/_7\mathbf{i}-{}^1/_7\mathbf{j}+{}^5/_7\mathbf{k})-8=0$;
3) $\mathbf{r}(0{,}8\mathbf{i}-0{,}6\mathbf{k})=0$;
4) $\mathbf{r}({}^2/_3\mathbf{i}+{}^1/_3\mathbf{j}+{}^2/_3\mathbf{k})-25=0$.

**1140.** Если дан орт **n**, построить плоскости

$$\mathbf{rn}=4;\ \mathbf{rn}+3=0;\ \mathbf{rn}=0.$$

**1141.** Если дан орт **n**, построить плоскости

$$\mathbf{ra}=1 \text{ и } \mathbf{ra}+2=0,$$

где $\mathbf{a}=-{}^1/_3\mathbf{n}$.

**1142.** Привести к нормальному виду уравнение плоскости

$$\mathbf{r}(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})+5=0.$$

**1143.** Найти расстояние плоскости

$$\mathbf{r}(6\mathbf{i}-7\mathbf{j}-6\mathbf{k})=33$$

от полюса.

**1144.** Определить расстояние плоскости

$$\mathbf{r}(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k})-7=0$$

от полюса и построить её.

**1145.** Определить углы, которые образует с основными ортами перпендикуляр, опущенный из полюса на плоскость

$$\mathbf{r}(5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k})+8=0.$$

**1146.** Проверить, лежат ли точки $A$ и $B$, радиусы-векторы которых $\mathbf{r}_1\{2;\ 1;\ 6\}$ и $\mathbf{r}_2\{5;\ -3;\ 1\}$, и точка $C(3;\ -2;\ 0)$ на плоскости

$$\mathbf{r}(3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-2\mathbf{k})+1=0.$$

**1147.** Дана плоскость $\mathbf{ra}=\alpha$. Найти основание перпендикуляра, опущенного из полюса на эту плоскость. Решить эту же задачу, если плоскость дана своим нормальным уравнением.

**1148.** Найти точку, симметричную с полюсом относительно плоскости

$$\mathbf{r}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k})-5=0.$$

**1149.** Зная орт $\mathbf{n}\left\{\frac{4}{13};\ \frac{12}{13};\ -\frac{3}{13}\right\}$, направленный из полюса перпендикулярно к плоскости, и расстояние плоскости от полюса $p=4$, составить уравнение плоскости и от векторного уравнения перейти к координатному.

**1150.** Что представляет собою в векторном обозначении совокупность первых трёх членов нормального уравнения плоскости

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

и совокупность переменных членов в общем уравнении плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0?$$

**1151.** Написать в векторной форме уравнение плоскости

$$11x - 7y - 9z + 15 = 0.$$

**1152.** Зная основание $P(\mathbf{r}_1)$ перпендикуляра, опущенного из полюса на плоскость, составить уравнение плоскости.

**1153.** Вычислить расстояние точки:

a) $A(5\mathbf{i} + \mathbf{j})$ от плоскости $\mathbf{r}(4\mathbf{i} - 7\mathbf{k}) + 8 = 0$;

b) $B(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ от плоскости $\mathbf{r}(5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 7 = 0$;

c) $C(4\mathbf{k})$ от плоскости $\mathbf{r}(2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 12 = 0$.

**1154.** Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранный угол между данными двумя плоскостями:

$$\mathbf{r}\mathbf{n}_1 = p_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{r}\mathbf{n}_2 = p_2.$$

**1155.** Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

1) $\mathbf{r}(\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k}) = 0$;
2) $\mathbf{r}(\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}) = \alpha$;
3) $\mathbf{r}(\mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k}) = 0$;
4) $\mathbf{r}(\nu\mathbf{k}) = \beta$;
5) $\mathbf{r}(\lambda\mathbf{i}) = 0$

и сопоставить полученный результат с исследованием общего уравнения плоскости в координатной форме.

**1156.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ перпендикулярно:

a) орту $\mathbf{i}$;

b) вектору $\mathbf{j} + \mathbf{k}$;

c) вектору $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

**1156*.** Через точку $A(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ провести плоскость:

a) параллельную координатной плоскости $(xy)$;

b) параллельную плоскости $\mathbf{r}(3\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 3$;

c) проходящую через ось $x$.

**1157.** Даны две точки $A$ и $B$ своими радиусами-векторами $\mathbf{r}_1 = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Через середину отрезка $AB$ провести плоскость, к нему перпендикулярную.

**1158.** Через полюс провести плоскость, параллельную двум данным векторам $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

**1159.** Составить уравнение плоскости, параллельной орту $\mathbf{k}$ и вектору $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, которая проходит через точку $A\,(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$.

**1160.** Через точки $A\,({}^3/_2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - {}^2/_3\mathbf{k})$ и $B\,(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$ провести плоскость, параллельную вектору $\mathbf{a} = 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

**1161.** Составить уравнение плоскости, проходящей через полюс и через точки $A\,(5\mathbf{i} + \mathbf{k})$ и $B\,(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k})$.

**1162.** Составить уравнение плоскости, зная три её точки:

$$A\,(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}),\quad B\,(5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \text{ и } C\,(2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}).$$

**1163.** Вычислить отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью:

$$1)\ \mathbf{r}\,(\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k}) = \alpha;\quad 2)\ \mathbf{ra} = \alpha.$$

**1164.** Найти плоскость, проходящую через заданную точку $A\,(5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ и отсекающую на осях координат равные положительные отрезки.

**1165.** Вычислить углы между следующими плоскостями:

1) $\mathbf{r}\,(-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}) = 17$ и $\mathbf{r}\,(3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 15\mathbf{k}) = 32$;

2) $\mathbf{r}\,(5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 4$ и $\mathbf{r}\,(7\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 9$;

3) $\mathbf{r}\,(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 0$ и $\mathbf{r}\,(5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}) + 8 = 0$.

**1166.** Через точку $A\,(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k})$ провести плоскость параллельно плоскости $\mathbf{r}\,(3\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 13$.

**1167.** Вычислить расстояние между плоскостями:

$$\mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + 14 = 0 \text{ и } \mathbf{r}\,(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) - 35 = 0.$$

**1168.** На расстоянии пяти единиц от плоскости с уравнением $\mathbf{r}\,(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = 27$ провести параллельную ей плоскость.

**1169.** Через точку $A\,(-3\mathbf{j})$ провести плоскость, перпендикулярную к двум данным плоскостям:

$$\mathbf{r}\,(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 5 \text{ и } \mathbf{r}\,(3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 12.$$

**1170.** Через полюс провести плоскость параллельную вектору $\mathbf{a}$ и перпендикулярную к плоскости $\mathbf{rb} = \beta$.

**1171.** Найти точку пересечения трёх плоскостей:

$$\mathbf{r}(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k})=-8,$$
$$\mathbf{r}(2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k})=-27,$$
$$\mathbf{r}(5\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})=16.$$

**1172.** Показать, что уравнением

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})=\alpha+\lambda\beta,$$

где $\lambda$ — переменный параметр, определяется пучок плоскостей, проходящих через линию пересечения двух основных плоскостей

$$\mathbf{ra}=\alpha \text{ и } \mathbf{rb}=\beta.$$

**1173.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathbf{r}_1\{2;\ 5;\ -3\}$ и через линию пересечения плоскостей

$$\mathbf{r}(3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})=5 \text{ и } \mathbf{r}(\mathbf{i}+2\mathbf{k})=0.$$

**1174.** Через линию пересечения плоскостей

$$\mathbf{ra}=\alpha \text{ и } \mathbf{rb}=\beta$$

провести плоскость, перпендикулярную к плоскости

$$\mathbf{rc}=\gamma.$$

## 4. Прямая линия в пространстве

Всякое уравнение вида

$$[\mathbf{ra}]=\mathbf{b}, \tag{51}$$

т. е. уравнение, в котором векторное произведение текущего радиуса-вектора на данный вектор ($\mathbf{a}\neq 0$) приравнено другому данному вектору, — если только оба данных вектора взаимно перпендикулярны, — изображает прямую линию, и, обратно, всякая прямая линия может быть представлена таким уравнением.

Вектор $\mathbf{a}$ определяет направление прямой (51), вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярен к плоскости, проходящей через данную прямую и полюс.

Если в уравнении (51) свободный член $b=0$, прямая проходит через полюс.

В частности, если постоянный множитель векторного произведения есть единичный вектор

$$[\mathbf{rn}]=\mathbf{N},$$

где $n^2=1$, или

$$[\mathbf{rn}]-\mathbf{N}=0, \tag{52}$$

то модуль свободного члена равен расстоянию ($p$) прямой от полюса

$$|\mathbf{N}|=p,$$

а $\mathbf{n}$ есть орт прямой.

Уравнение (52) называется **нормальным уравнением прямой**.

Чтобы привести общее уравнение прямой (51) к нормальному виду, достаточно перенести свободный член в левую часть и разделить все члены на $a$ (модуль вектора $\mathbf{a}$), отнеся в векторном произведении этот делитель к самому вектору $\mathbf{a}$:

$$\left[\mathbf{r}\frac{\mathbf{a}}{a}\right]-\frac{\mathbf{b}}{a}=0. \tag{51'}$$

Расстояние любой точки $M(\mathbf{r}_1)$ от прямой (52) вычисляется по формуле:

$$\delta=|[\mathbf{r}_1\mathbf{n}]-\mathbf{N}| \tag{53}$$

или, если прямая дана общим уравнением (51), по формуле:

$$\delta=\left|\left[\mathbf{r}_1\frac{\mathbf{a}}{a}\right]-\frac{\mathbf{b}}{a}\right|, \tag{53'}$$

т. е. расстояние точки от прямой равно модулю левой части нормального уравнения прямой, в котором текущий радиус-вектор заменён радиусом-вектором данной точки.

Если прямая задана одной из своих точек $A(\mathbf{r}_1)$ и вектором $\mathbf{a}$, ей параллельным, то уравнение прямой имеет вид:

$$[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}]=0 \tag{54}$$

или

$$[\mathbf{r}\mathbf{a}]=[\mathbf{r}_1\mathbf{a}]. \tag{54'}$$

При тех же заданиях можно представить прямую уравнением в параметрической форме:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{a}. \tag{55}$$

Если прямая задана двумя своими точками $A(\mathbf{r}_1)$ и $B(\mathbf{r}_2)$, уравнение её будет:

$$[\mathbf{r}\,(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)]=[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]. \tag{56}$$

Если прямая определена двумя плоскостями, через неё проходящими:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}\mathbf{a}&=\alpha,\\ \mathbf{r}\mathbf{b}&=\beta,\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

то её можно представить также и одним уравнением:

$$[\mathbf{r}\,[\mathbf{a}\mathbf{b}]]=\beta\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}. \tag{58}$$

Так как в уравнение всякой прямой входит вектор, ей параллельный (направляющий вектор), то задача о вычислении угла между двумя данными прямыми сводится к вычислению угла между их направляющими векторами.

Если даны две параллельные прямые нормальными уравнениями:

$$[\mathbf{r}\mathbf{n}]-\mathbf{N}_1=0 \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}\mathbf{n}]-\mathbf{N}_2=0,$$

то расстояние между ними может быть вычислено по формуле:

$$d = |\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2|. \tag{59}$$

Если даны любые две прямые:

$$[\mathbf{r}\mathbf{a}_1] = \mathbf{b}_1 \text{ и } [\mathbf{r}\mathbf{a}_2] = \mathbf{b}_2, \tag{60}$$

то кратчайшее расстояние между ними вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1)|}{|[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]|}. \tag{61}$$

Условие пересечения двух прямых (60) имеет вид

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = 0. \tag{62}$$

Если прямые (60) пересекаются, то радиус-вектор точки их пересечения определяется следующим образом:

$$\mathbf{r} = \frac{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]}{\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2} \tag{63}$$

или

$$\mathbf{r} = \frac{[\mathbf{b}_2\mathbf{b}_1]}{\mathbf{b}_2\mathbf{a}_1}. \tag{63'}$$

**1175.** Вычислить, на каком расстоянии от полюса проходят прямые:

1) $[\mathbf{r}(^3/_5\mathbf{i} - {}^4/_5\mathbf{k})] = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;
2) $[\mathbf{r}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})] = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$;
3) $[\mathbf{r}(7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k})] = 0$.

**1175*.** Какие особенности можно отметить относительно взаимного расположения прямых: $[\mathbf{r}\mathbf{a}] = \mathbf{b}$ и $[\mathbf{r}\mathbf{a}] = -\mathbf{b}$?

**1176.** В плоскости $\mathbf{r}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 0$ найти прямую, проходящую от полюса на расстоянии трёх единиц и параллельную вектору $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

**1177.** Написать уравнение плоскости, проходящей через полюс и через прямую $[\mathbf{r}\mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

**1178.** Найти вектор, совпадающий с перпендикуляром, опущенным из полюса на прямую:

1) $[\mathbf{r}\mathbf{a}] = \mathbf{b}$; 2) $[\mathbf{r}\mathbf{n}] = \mathbf{N}$;
3) $[\mathbf{r}(11\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 10\mathbf{k})] = 2\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

**1179.** Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из полюса на прямую:

1) $[\mathbf{r}\mathbf{a}] = \mathbf{b}$; 2) $[\mathbf{r}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})] = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

**1180.** Найти основание перпендикуляра, опущенного из полюса на прямую $[\mathbf{r}(\mathbf{j}-3\mathbf{k})]=5\mathbf{i}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

**1181.** Построить прямые:

$$1)\ [\mathbf{r}\mathbf{k}]=\mathbf{i}-4\mathbf{j};\quad 2)\ [\mathbf{r}(\mathbf{j}+\mathbf{k})]=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}.$$

**1182.** Указать особенности в расположении прямых:

1) $[\mathbf{r}(\alpha\mathbf{i})]=\mathbf{b}$; 5) $[\mathbf{r}(\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k})]=\mathbf{b}$;
2) $[\mathbf{r}(\beta\mathbf{j})]=\mathbf{b}$; 6) $[\mathbf{r}(\alpha\mathbf{i}+\gamma\mathbf{k})]=\mathbf{b}$;
3) $[\mathbf{r}(\gamma\mathbf{k})]=\mathbf{b}$; 7) $[\mathbf{r}\mathbf{a}]=\alpha\mathbf{i}$;
4) $[\mathbf{r}(\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j})]=\mathbf{b}$; 8) $[\mathbf{r}\mathbf{a}]=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}$.

**1183.** Написать общее уравнение прямой, пересекающей 1) ось $x$; 2) оси $x$ и $y$; 3) все три оси координат.

**1184.** Вычислить расстояние точки:
1) $A(4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+10\mathbf{k})$ от прямой $[\mathbf{r}(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k})]=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}$;
2) $B(5\mathbf{i}-6\mathbf{j}+8\mathbf{k})$ от оси абсцисс;
3) $C(12\mathbf{i}+5\mathbf{j})$ от прямой $[\mathbf{r}(\mathbf{j}+2\mathbf{k})]=0$.

**1184*.** Проверить, что расстояние точки $A(\mathbf{r}_1)$ от прямой $[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a}]=0$ может быть вычислено по формуле: $\delta=\dfrac{|[\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a}]|}{a}$.

**1185.** Зная орт прямой $\mathbf{n}={}^2/_7\mathbf{i}-{}^3/_7\mathbf{j}+{}^6/_7\mathbf{k}$ и одну из её точек $A(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})$, составить уравнение этой прямой.

**1186.** Через точку $Q(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})$ провести прямую, параллельную прямой

$$[\mathbf{r}(4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})]=7\mathbf{i}-9\mathbf{j}-\mathbf{k}.$$

**1187.** Составить уравнение прямой, перпендикулярной к двум данным векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ и проходящей через точку $A(\mathbf{r}_1)$.

**1187*.** Через точку $A(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k})$ провести прямую, перпендикулярную к двум прямым:

$$[\mathbf{r}(5\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k})]=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k} \text{ и } [\mathbf{r}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})]=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}.$$

**1188.** От параметрического уравнения прямой

$$\mathbf{r}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}+\lambda(4\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})$$

перейти 1) к общему уравнению и 2) к координатным уравнениям.

**1189.** Зная векторные уравнения следующих прямых:

1) $[\mathbf{r}(4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-6\mathbf{k})]=0;$
2) $[(\mathbf{r}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k})(2\mathbf{i}+7\mathbf{k})]=0;$
3) $[\mathbf{r}(2\mathbf{i}+6\mathbf{j}-3\mathbf{k})]=3\mathbf{i}+2\mathbf{k},$

найти их уравнения в координатных обозначениях.

**1190.** Дать переход от общего векторного уравнения прямой

$$[\mathbf{r}(\lambda\mathbf{i}+\mu\mathbf{j}+\nu\mathbf{k})]=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}$$

к каноническим уравнениям вида

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

**1191.** Дать переход от канонических уравнений прямой

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

к общему уравнению в векторной форме.

**1192.** Зная канонические уравнения прямой

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+5}{2},$$

составить её векторное уравнение.

**1192*.** Пользуясь формулой, приведённой в задаче 1184*, дать в координатных обозначениях формулу расстояния точки $A(x_1, y_1, z_1)$ от прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

**1193.** Дан треугольник своими вершинами: $\mathbf{r}_1\{0;\ 2;\ 1\}$, $\mathbf{r}_2\{5;\ -1;\ 4\}$ и $\mathbf{r}_3\{3;\ 0;\ -1\}$. Составить уравнения его сторон.

**1194.** Доказать, что условие коллинеарности трёх точек $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$ может быть написано следующим образом:

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]+[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]+[\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1]=0.$$

**1195.** Показать, что площадь треугольника, имеющего вершины в точках $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$, может быть вычислена по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\left|[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]+[\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3]+[\mathbf{r}_3\mathbf{r}_1]\right|.$$

**1196.** Найти условия параллельности и перпендикулярности двух прямых:

$$[\mathbf{r}(\lambda_1\mathbf{i}+\mu_1\mathbf{j}+\nu_1\mathbf{k})]=\mathbf{a},$$
$$[\mathbf{r}(\lambda_2\mathbf{i}+\mu_2\mathbf{j}+\nu_2\mathbf{k})]=\mathbf{b}.$$

**1197.** Составить уравнение прямой, зная две плоскости, через неё проходящие:

1) $\mathbf{r}(\mathbf{i}+3\mathbf{j})=5$ и $\mathbf{r}(\mathbf{j}-2\mathbf{k})=2$;

2) $\mathbf{r}(5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k})=1$ и $\mathbf{r}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})=4$.

**1198.** Вычислить угол между прямыми:

1) $[\mathbf{r}(\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k})]=0$ и $[\mathbf{r}(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k})]=6\mathbf{i}+3\mathbf{k}$;

2) $[\mathbf{ra}]=\mathbf{b}$ и $[\mathbf{rb}]=\mathbf{a}$.

**1199.** Даны вершины треугольника $ABC$: $A(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k})$, $B(4\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k})$ и $C(6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})$. Составить уравнение медианы $AM$ и вычислить угол, который она образует со стороной $BC$.

**1200.** Проверить, что прямые

$$[\mathbf{r}(2\mathbf{i}+6\mathbf{j}-4\mathbf{k})]=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$

и

$$[\mathbf{r}(5\mathbf{i}+15\mathbf{j}-10\mathbf{k})]=5\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

параллельны, и найти расстояние между ними.

**1201.** Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})$ на прямую:

$$[\mathbf{r}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})]=2\mathbf{i}+7\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

**1202.** Составить уравнение прямой, проходящей через полюс и пересекающей две данные прямые: $[\mathbf{ra}_1]=\mathbf{b}_1$ и $[\mathbf{ra}_2]=\mathbf{b}_2$.

**1203.** Через точку $\mathbf{r}_1\{4;\ 0;\ -1\}$ провести прямую так, чтобы она пересекала две данные прямые:

$$[\mathbf{r}(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k})]=-29\mathbf{i}+7\mathbf{j}+10\mathbf{k}$$

и

$$[\mathbf{r}(5\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})]=3\mathbf{i}-5\mathbf{j}-10\mathbf{k}.$$

**1204.** Проверить, что прямые задачи 1203 не пересекаются, и найти кратчайшее расстояние между ними.

**1204*.** Написать уравнение общего перпендикуляра прямых задачи 1203.

**1205.** Найти кратчайшее расстояние между прямыми

$$[\mathbf{r}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})]=-21\mathbf{i}+16\mathbf{j}+11\mathbf{k}$$

и

$$[\mathbf{r}(-7\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})]=\mathbf{i}-16\mathbf{j}+13\mathbf{k}.$$

**1205*.** Проверив, что кратчайшее расстояние между прямыми $[\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{a}_1]=0$ и $[\mathbf{r}-\mathbf{r}_2,\ \mathbf{a}_2]=0$ вычисляется по формуле: $d=\frac{|\mathbf{r}_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2+\mathbf{r}_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1|}{|[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]|}$, дать в координатных обозначениях соответствующую формулу для прямых

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

**1206.** Проверить, пересекаются ли следующие пары прямых, и, если пересекаются, найти точку их пересечения:

1) $[\mathbf{r}(3\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k})]=-8\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ и $[\mathbf{r}(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k})]=$ $=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+9\mathbf{k}$;

2) $[\mathbf{r}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k})]=23\mathbf{i}+6\mathbf{j}-13\mathbf{k}$ и $[\mathbf{r}(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})]=$ $=-\mathbf{i}-6\mathbf{j}-9\mathbf{k}$.

**1206*.** Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от двух данных прямых: $[\mathbf{ri}]=0$ и $[\mathbf{r},\ \mathbf{i}+\mathbf{j}]=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$. В полученном уравнении перейти к координатным обозначениям.

## 5. Прямая и плоскость

Чтобы найти точку пересечения прямой

$$[\mathbf{ra}]=\mathbf{b} \tag{64}$$

и плоскости

$$(\mathbf{rA})=\alpha, \tag{65}$$

надо совместно решить эти два уравнения. Радиус-вектор точки их пересечения может быть вычислен и по формуле:

$$\mathbf{r}=\frac{\alpha\mathbf{a}+[\mathbf{Ab}]}{\mathbf{aA}}. \tag{66}$$

Угол между прямой (64) и плоскостью (65) вычисляется следующим образом:

$$\sin\varphi=\frac{\mathbf{aA}}{aA} \tag{67}$$

или

$$\cos\varphi=\frac{|[\mathbf{aA}]|}{aA}. \tag{67'}$$

Условие параллельности прямой (64) и плоскости (65):

$$\mathbf{aA}=0. \tag{68}$$

Условие их перпендикулярности:

$$[\mathbf{aA}]=0$$

или (69)

$$\mathbf{A}=\lambda\mathbf{a}.$$

Условие того, что прямая (64) целиком лежит в плоскости (65), выражено двумя равенствами:

$$\alpha\mathbf{a}+[\mathbf{Ab}]=0 \quad \text{и} \quad \mathbf{aA}=0. \tag{70}$$

Если прямая дана уравнением $[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}]=0$, то это же условие выразится проще:

$$(\mathbf{r}_1\mathbf{A})=\alpha \quad \text{и} \quad (\mathbf{aA})=0. \tag{70'}$$

**1207.** Найти точку пересечения прямой и плоскости

1) $[\mathbf{r}\,(4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})]=-6\mathbf{i}-8\mathbf{j}$ и $\mathbf{r}\,(3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k})=2$;

2) $[\mathbf{r}\,(5\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k})]=11\mathbf{i}-3\mathbf{j}-13\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}\,(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})=5$;

3) $[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k})]=9\mathbf{i}+3\mathbf{j}-10\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}\,(3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k})=5$;

4) $[\mathbf{r}\,(8\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})]=-5\mathbf{i}-7\mathbf{j}+18\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}\,(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k})=-1$.

**1208.** Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $\mathbf{r}\,(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})+1=0$ с прямыми

$$[\mathbf{r}\,(\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k})]=5\mathbf{i}-7\mathbf{j}-20\mathbf{k}$$

и

$$[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-6\mathbf{k})]=-2\mathbf{i}+22\mathbf{j}+14\mathbf{k}.$$

**1209.** При каком значении коэффициента $\alpha$ плоскость

$$\mathbf{r}\,(\alpha\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k})=1$$

параллельна прямой

$$[\mathbf{r}\,(4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})]=-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+11\mathbf{k}?$$

**1210.** При каких значениях коэффициентов $\alpha$ и $\beta$ плоскость

$$\mathbf{r}\,(\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+6\mathbf{k})=7$$

перпендикулярна к прямой

$$[\mathbf{r}\,(2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k})]=-19\mathbf{i}-8\mathbf{j}+2\mathbf{k}?$$

**1211.** Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $\mathbf{r}_1\{5;\ 1;\ 2\}$ на плоскость

$$\mathbf{r}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k})=5.$$

**1212.** Написать уравнение перпендикуляра, проведённого из точки $A(\mathbf{r}_1)$ к плоскости $\mathbf{ra}=\alpha$.

**1213.** Найти основание перпендикуляра, опущенного из точки $A(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ на плоскость $\mathbf{r}(\mathbf{i}+\mathbf{k})=1$.

**1214.** Найти проекцию точки $\mathbf{r}_1\{4;\ -3;\ 1\}$ на плоскость

$$\mathbf{r}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})=3.$$

**1215.** Написать уравнение плоскости, проведённой через точку $A(\mathbf{r}_1)$ перпендикулярно к прямой $[\mathbf{ra}]=\mathbf{b}$.

**1216.** Через полюс провести плоскость, перпендикулярную к прямой $[\mathbf{r}(\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})]=2\mathbf{i}-11\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

**1217.** Через точку $\mathbf{r}_1\{5;\ 1;\ 4\}$ провести плоскость так, чтобы она была параллельна данным прямым: $[\mathbf{r}(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})]=$ $=\mathbf{i}+5\mathbf{j}+17\mathbf{k}$ и $[\mathbf{r}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+8\mathbf{k})]=3\mathbf{i}+11\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

**1218.** Проходит ли плоскость $\mathbf{r}(4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})=-3$ через прямую $[(\mathbf{r}-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k})]=0$?

**1219.** Проверить, лежит ли прямая $[\mathbf{r}(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})]=$ $=-3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+23\mathbf{k}$ на плоскости $\mathbf{r}(8\mathbf{i}-9\mathbf{j}-22\mathbf{k})=59$.

**1220.** Составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку $A(\mathbf{r}_1)$ и данную прямую $[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\,\mathbf{a}]=0$.

**1221.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})$ и через прямую

$$[(\mathbf{r}-4\mathbf{i}+3\mathbf{j})(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})]=0.$$

**1222.** Через прямую $[(\mathbf{r}-2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})(5\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})]=0$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости

$$\mathbf{r}(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-3\mathbf{k})=7.$$

**1223.** Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\,\mathbf{a}]=0$ и перпендикулярной к плоскости $\mathbf{rA}=\alpha$.

**1224.** Найти проекцию прямой

$$[(\mathbf{r}-4\mathbf{j}+\mathbf{k})(4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k})]=0$$

на плоскость

$$\mathbf{r}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})+8=0.$$

**1225.** Проверить, что прямые

$$[(\mathbf{r} - 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})(5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})] = 0$$

и

$$[(\mathbf{r} - 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 6\mathbf{k})(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})] = 0$$

пересекаются, и написать уравнение плоскости, через них проходящей.

**1226.** Провести плоскость через данные две параллельные прямые

$$[(\mathbf{r} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})(7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k})] = 0$$

и

$$[(\mathbf{r} - \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})(7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k})] = 0.$$

**1227.** Через прямую $[(\mathbf{r} - 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})] = 0$ провести плоскость, параллельную прямой

$$[(\mathbf{r} + 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})(4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = 0.$$

**1228.** Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ на прямую

$$[\mathbf{r}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})] = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

**1229.** Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(\mathbf{r}_1)$ на прямую $[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)\mathbf{a}] = 0$.

**1230.** Найти проекцию точки $\mathbf{r}_1\{7;\ 9;\ 7\}$ на прямую

$$[\mathbf{r}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

**1231.** Вычислить расстояние точки $A(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$ от прямой

$$[\mathbf{r}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k})] = -10\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 25\mathbf{k}.$$

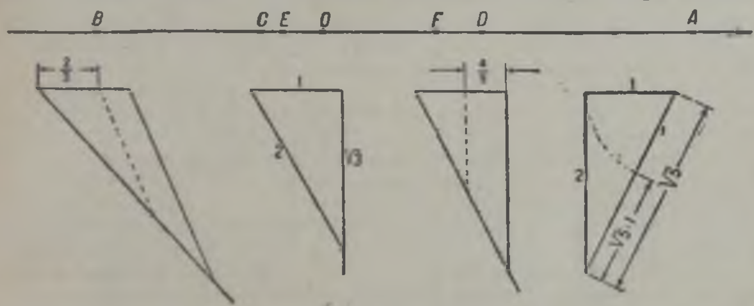
**1232.** Найти точку, симметричную с точкой $A(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$ относительно прямой $[\mathbf{r}(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})] = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

**1233.** Даны вершины треугольника $A(4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$, $B(2\mathbf{i})$ и $C(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$. Составить уравнение высоты, проходящей через вершину $B$.

# ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

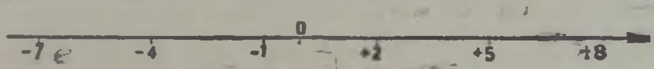
## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

**1.** См. черт. 79. **2.** a) $x=+4$; b) $x_1=+2$; $x_2=-2$; c) $x_1=+2$; $x_2=-3$; d) $x_1=0$; $x_2=3$; $x_3=1$; e) $x_1=x_2=-2$; f) уравнение имеет мнимые корни; построить точки с мнимыми координатами




Черт. 79.

нельзя. **3.** См. черт. 80. **4.** a) $A_1(-3)$; b) $A_2(-7)$; c) $A_3(+7)$. Указание. Две точки симметричны относительно третьей, если находятся по разные стороны, но на равных расстояниях от неё. Точка со-




Черт. 80.

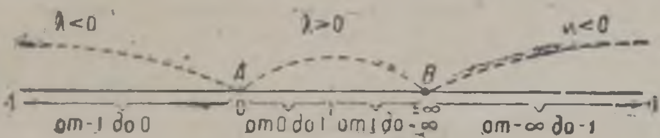
впадает с симметричной точкой, если повернуть прямую в плоскости чертежа около центра симметрии на 180°. **5.** a) $A(+3)$; $B(+{}^5/_3)$; $C(-1)$; $D(-{}^8/_3)$; $M\left(\frac{x}{3}\right)$; b) $A(+18)$; $B(+10)$; $C(-6)$; $D(-16)$; $M(2x)$; c) $A(+3{,}6)$; $B(+2)$; $C(-1{,}2)$; $D(-3{,}2)$; $M\left(\frac{2x}{5}\right)$.

**6.** $x=\frac{5000}{4687}a$, где $a$ — число вёрст, $x$ — соответствующее число километров. Формулу можно значительно упростить, принимая во внимание, что $\frac{5000}{4687}=1{,}0667\ldots\approx 1{,}0(6)\ldots={}^{16}/_{15}$ [1]), и следовательно, $x\approx{}^{16}/_{15}\,a$. **7.** $x={}^5/_4\,t$. **8.** a) $A(+3)$; $B(-1)$; $C(-3)$; $D(-5)$; $E(-10)$; $M(x-3)$; b) $A(+11)$; $B(+7)$; $C(+5)$; $D(+3)$; $E(-2)$; $M(x+5)$. **9.** В точку $0'(+8)$. Указание. Пользуемся формулой переноса начала координат: $x=x'+a$. В данном случае нам известна первоначальная координата точки ($x=+7$) и новая координата ($x'=-1$); искомой является координата нового начала $a$. **10.** $x={}^{20}/_{19}(t-1)$, где $t$ — показание термометра, $x$ — истинная температура по шкале Цельсия. Указание. Эта задача сводится к составлению формулы перехода от одной системы координат к другой, причём начало координат переносится в точку $(+1)$ и, кроме того, меняется единица длины; чтобы узнать отношение первоначальной и новой единиц длины, обращаем внимание на температуру кипения воды: там, где на старой шкале стоит $+96°$, должно стоять $+100°$. Таким образом, часть шкалы, заключённая между $+1°$ и $+96°$, т. е. содержащая 95 первоначальных единиц, будет по новой системе содержать 100 единиц. Следовательно, $e'/e={}^{95}/_{100}={}^{19}/_{20}$, и формула указанного двойного преобразования будет: $t={}^{19}/_{20}\,x+1$. Чтобы получить ответ, надо только разрешить это уравнение относительно $x$. **11.** Перенести начало координат в точку $(-7)$ и переменить направление. **12.** Перенести начало координат в точку $(+10)$ и переменить направление. **13.** a) изменение масштаба: $e'=5e$; b) изменение масштаба и направления: $e'=3e$; c) перенесение начала координат в точку $(-1)$ и увеличение масштаба вдвое; d) перенесение начала координат в точку $(+3)$ и перемена направления; e) перенесение начала координат в точку $(+5)$; изменение направления и уменьшение масштаба вдвое; f) изменение масштаба: $e'=ne$; g) перенесение начала в точку $(+a)$; h) перенесение начала в точку $(+a)$; изменение масштаба в отношении $e'/e=n$. Если $n>0$, то направление сохранено; если $n<0$, то направление изменено. **14.** Начало координат перенесено в точку $(+4)$; направление изменено и масштаб уменьшен вдвое. Указание. Удобно воспользоваться общей формулой преобразования координат $x=nx'+a$ (см. задачу 13, h). Вставляя вместо $x$ поочерёдно значения $+3$ и $+7$ и вместо $x'$ соответственно $+2$ и $-6$, получим два уравнения, из которых определим $n$ и $a$. Получим $n=-{}^1/_2$, $a=4$, что и приводит к указанному ответу. **15.** $x_0=53{,}4$. Указание. Задача решается по формуле $x=(e'/e)\,x'+x_0$. В данном случае: $x=57$; $x'=4$; $e'/e={}^9/_{10}$; $x_0=?$ **16.** $AB=+7$; $CD=-11$; $EF=-3$; $OG=+6$; $GO=-6$; $KO=+3$; $MN=+3$. **17.** a) $P(+7)$; b) $P(-9)$; c) $P(-4)$; d) $P(+9)$. **18.** $\lambda_1=2$; $\lambda_2=-3$; $\lambda_3=-{}^3/_2$. **19.** a) $M(+3)$; b) $M(+5{,}7)$; c) $M(+13{,}5)$; d) точка $M$ совпадает с $A$; e) соответствующей точки деления нет. **20.** $B(-4{,}2)$. **21.** $C'(+{}^1/_3)$; $B'(+3^2/_3)$; $A'(+1^4/_9)$. Указание. Если точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda$, то четвёртая гармоническая к $C$ относительно $A$ и $B$ делит тот же отрезок в отношении $-\lambda$.

---

[1]) Знак $\approx$ употребляется как знак приближённого равенства.

**22.** $x \approx 52{,}8$ *см* (с точностью до 1 *мм*). Указание. Точка опоры должна совпадать с точкой приложения равнодействующей силы, т. е. должна делить отрезок между точками приложения действующих сил на части, обратно пропорциональные этим силам. **23.** $x = 1{,}05$ *м*. Указание. На опору $B$ давит половина веса балки, т. е. 40 *кг*. Значит, от груза в 200 *кг* на её долю должно пасть $110 - 40 = 70$ *кг*, а на долю опоры $A$ — остальные 130 *кг*. Принимаем точку $A$ за




Черт. 81.

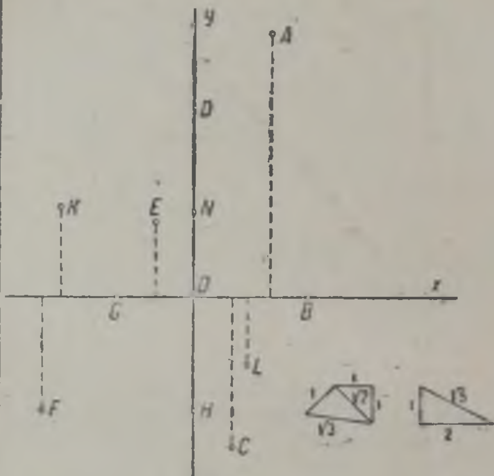
начало координат и делим отрезок $AB$ в отношении $70:130 = 7:13$. **24.** Не ближе чем на расстоянии 47,5 *см*. **25.** См. черт. 81. Значения $\lambda$ написаны под линией. Указание.

$$A = M; \quad \lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{AA}{AB} = 0. \quad B = M; \quad \lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{AB}{BB} = \infty.$$

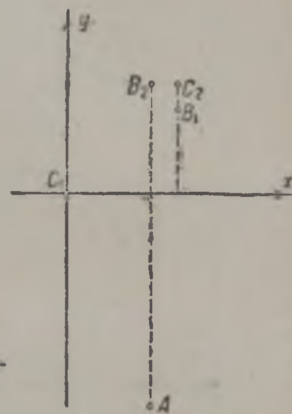
$$M \longrightarrow \infty; \quad \lambda = \frac{AM}{MB} = \frac{AB + BM}{MB} = \frac{AB}{MB} - 1; \quad \lambda \longrightarrow -1.$$

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

**26.** См. черт. 82, стр. 260. **27.** См. черт. 83, стр. 260: a) $A(+3;\ -8)$; b) $B_1(+4;\ +3)$ и $B_2(+3;\ +4)$; c) $C_1(0;0)$, $C_2(+4;\ +4)$ и две точки с мнимыми координатами. **28.** См. табл. и черт. 84, 85, стр. 260—261. **29.** $M_1(+3;\ -2)$, $M_2(-3;\ +2)$, $M_3(-3;\ -2)$. **30.** a) $M_1(+1;\ +5)$ и $M_2(-5;\ +5)$; b) $M_1(-2;\ +8)$ и $M_2(-2;\ +2)$. **31.** $x = y$ или $x = -y$. **32.** a) $(0;\ 0)$, $(+1;\ 0)$, $(+1;\ +1)$, $(0;\ +1)$ или $(0;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(-1;\ +1)$, $(0;\ +1)$ или $(0;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(-1;\ -1)$, $(0;\ -1)$ или $(0;\ 0)$, $(+1;\ 0)$; $(+1;\ -1)$, $(0;\ -1)$ в зависимости от того, какие стороны квадрата приняты за оси координат; b) $(+\frac{1}{2}\sqrt{2};\ 0)$, $(0;\ +\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2};\ 0)$, $(0;\ -\frac{1}{2}\sqrt{2})$; c) $(+\frac{1}{2};\ +\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2};\ +\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2})$, $(+\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2})$. **33.** $(+a;\ 0)$, $(+\frac{1}{2}a;\ +\frac{1}{2}\sqrt{3}a)$, $(-\frac{1}{2}a;\ +\frac{1}{2}\sqrt{3}a)$, $(-a;\ 0)$, $(-\frac{1}{2}a;\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}a)$ и $(+\frac{1}{2}a;\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}a)$. **34.** См. черт. 86, стр. 261. **35.** См. черт. 87, стр. 261. **36.** См. черт. 88, стр. 261. **37.** См. черт. 89, стр. 262: a) №№ 1 и 6 на расстоянии 9 *км* от Москвы, №№ 5 и 8, №№ 7 и 10 на расстоянии 45 *км*, №№ 7 и 8, №№ 9 и 10 на расстоянии 19,5 *км*. b) В полдень нет ни одного поезда в пути, в 20 часов — №№ 7, 8, 10. c) $3^{56}$, $5^{48}$, $7^{45}$, $11^{0}$, $16^{0}$, $18^{15}$, $18^{36}$, $20^{08}$, $20^{22}$, $2^{36}$. d) Встречаются №№ 4 и 6, и ни один не перегоняет. **38.** $s = \frac{gt^2}{2}$; $h = 50 - \frac{gt^2}{2}$; $x = t$, $y = h$. Момент падения: $h = 0$, когда

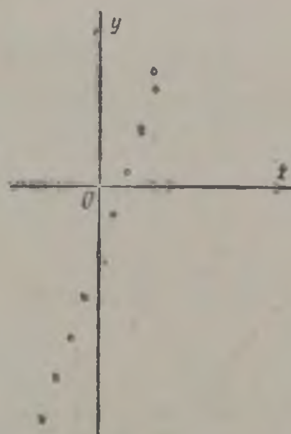



Черт. 82.

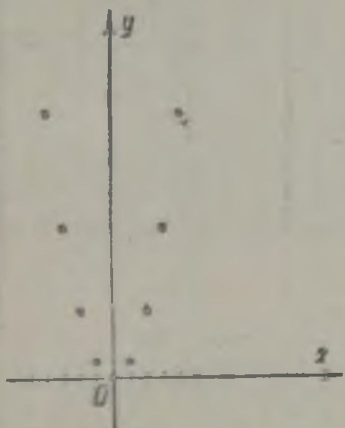



Черт. 83.

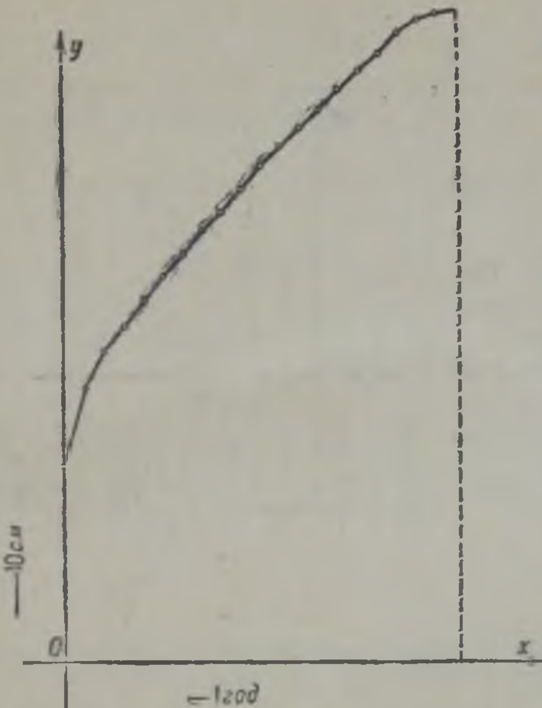
| $x$ | a) $y$ | b) $y$ |
|---|---|---|
| $-4$ | $-17$ | $+16$ |
| $-3$ | $-14$ | $+9$ |
| $-2$ | $-11$ | $+4$ |
| $-1$ | $-8$ | $+1$ |
| $0$ | $-5$ | $0$ |
| $+1$ | $-2$ | $+1$ |
| $+2$ | $+1$ | $+4$ |
| $+3$ | $+4$ | $+9$ |
| $+4$ | $+7$ | $+16$ |



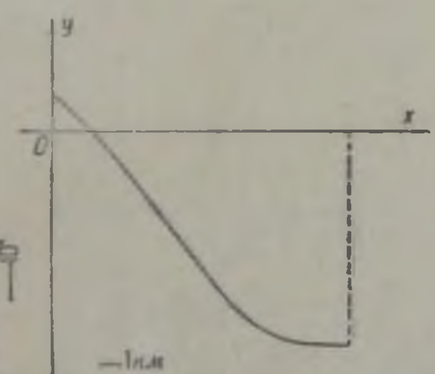

Черт. 84.



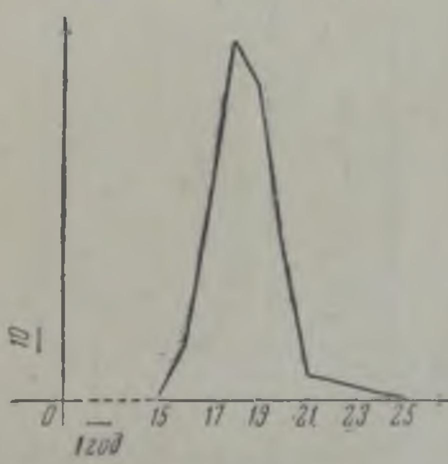

Черт. 85.




Черт. 86.

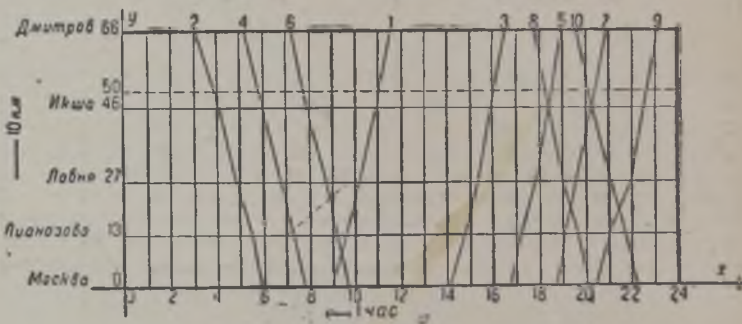



Черт. 87.




Черт. 88.

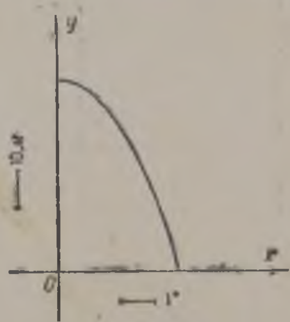
$\frac{gt^2}{2}=50$; $t=\sqrt{\frac{100}{g}}\approx 3{,}2$. График — дуга параболы. См. таблицу и черт. 90. **39.** См. черт. 91. Указание. Вес балки $P$ распределяется равномерно на обе опоры; вес человека $p$ распределяется на опоры




Черт. 89.

обратно пропорционально расстоянию его от этих опор. Отсюда нетрудно вывести формулу, по которой вычисляется давление на опору $B$: $y=\frac{P}{2}+\frac{p}{l}x$. Для числового примера мы имеем график, изображённый на черт. 91: $y=60+13x$. Этот график есть отрезок

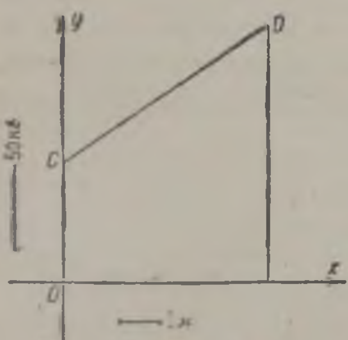
| $t''$ | $s$ | $h$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 50 |
| $^1/_2$ | $1^2/_9$ | $48^7/_9$ |
| 1 | 4,9 | 45,1 |
| $1^1/_2$ | 11,02 | 38,98 |
| 2 | 19,6 | 30,4 |
| $2^1/_2$ | 30,6 | 19,4 |
| 3 | 44,1 | 5,9 |
| 3,2 | 50 | 0 |



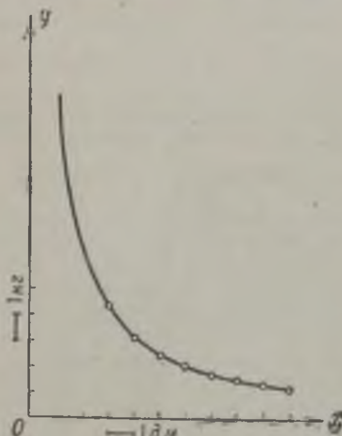

Черт. 90.

прямой между точками $C(0; +60)$ и $D(+5; +125)$. **40.** См. черт. 92. Указание. Выразив длины в дециметрах и силы в килограммах, получим: $P=\frac{12}{R}$. По самому смыслу задачи $R\geqslant r$; поэтому будем давать $R$ значения, начиная от 1 *дм*, и ограничимся значением

10 *дм*. Полученный график есть дуга гиперболы. **41.** 5; 10; 5; 13. **42.** $AB=5$; $BC=13$; $CA=8\sqrt{2}$. **43.** $AB=\sqrt{10}$; $AC=\sqrt{50}$; $BC=\sqrt{40}$; $AC^2=AB^2+BC^2$. **43*.** Угол при вершине $Q$ тупой, так как $PR^2>PQ^2+QR^2$. **44.** Задача имеет два решения: $y_1=+11$; $y_2=-1$. **45.** $M_1(0;\ -3)$, $M_2(0;\ -9)$. **46.** $(+6;\ +6)$, $(-8;\ -8)$, $(-8;\ +8)$, $(+6;\ -6)$. **47.** $AB=5\sqrt{2}$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **48.** $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. **49.** $B(+6;\ +4)$. **50.** $x_1=3+4\sqrt{3}$; $y_1=4$, или $x_2=3-4\sqrt{3}$; $y_2=-4$. **51.** $M(+5;\ 0)$. **52.** $18x-8y=53$. **52*.** $M_1(+8;\ 0)$ или $M_2(-1;+3\sqrt{3})$. **53.** $M(-5;\ +4)$. Указание. Определяем точку $M$ из условий: $AB=MB$ и $AC=MC$. **53*.** $B(+2;\ +5)$ и $D(+16;\ +3)$. **54.** $M(-1;\ -2)$. **55.** $M(+2;\ +10)$. Указание. Центр лежит на перпендикуляре, проведённом к касательной в точке прикосновения; отсюда следует, что абсцисса центра равна $+2$; ординату мы определяем из условия: $MA=MB$. **56.** Существуют два круга, удовлетворяющих условиям задачи. Их центры:




Черт. 91.




Черт. 92.

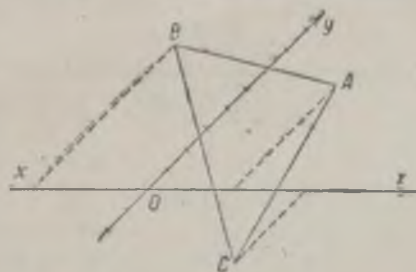
$M_1(+1;-1)$ и $M_2(+5;-5)$ и радиусы $r_1=1$, $r_2=5$. **57.** $S=7$ кв. ед. **58.** $P=15+5\sqrt{5}$; $S=25$ кв. ед. **58*.** 12,5 кв. ед. Указание. Для вычисления площади многоугольника разбиваем его на треугольники. **59.** (a) и (b) — лежат; (c) — не лежат. **60.** $(-5;\ 0)$. **61.** $C(+5;\ -2)$. **61*.** $AB=DC$ и $AB\parallel DC$; $h=2{,}2$. Указание. Для вычисления высоты можно воспользоваться площадью и длиной основания. **62.** $M(+4;\ -2{,}5)$, $N(+2;\ +1)$, $P(+1;\ -3{,}5)$. **62*.** $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$ и $\sqrt{41}$. **63.** $B(+11;\ +5)$. **64.** $A(+8;\ +3)$, $B(-2;\ -1)$. Указание. Условие, что конец $A$ скользит по прямой линии, параллельной оси $x$, определяет ординату этой точки

$(y_1=3)$; точно так же определена абсцисса точки $B(x_2=-2)$. Задача сводится к вычислению недостающих координат точек $A(x_1; +3)$ и $B(-2; y_2)$, зная середину отрезка $AB$. **65.** $x_1=-2$; $y_1=-6$; $x_2=8$; $y_2=2$; $x_3=-6$; $y_3=10$. **65*.** $C(2x_2-x_1;\ y_1)$ и $D(x_2;\ 2y_1-y_2)$ или $C'(x_1; 2y_2-y_1)$ и $D'(2x_1-x_2; y_2)$. **66.** $C(+10{,}5;\ +10)$, $D(+4;\ -3)$. Указание. Воспользуемся тем свойством, что диагонали параллелограмма делятся при пересечении пополам. Искомые вершины определяются как концы отрезков, у которых известны начало и середина. **67.** $D(-4;\ -1)$. Указание. Вводим вспомогательную точку, являющуюся пересечением диагоналей (см. задачу 66). **68.** $M_1(+5{,}4; +2{,}8)$, $M_2(+7{,}8;\ +3{,}6)$, $M_3(+10{,}2;\ 4{,}4)$, $M_4(+12{,}6;\ +5{,}2)$. Указание. Делим отрезок $AB$ в четырёх разных отношениях: $\lambda_1={}^1/_4$; $\lambda_2={}^2/_3$; $\lambda_3={}^3/_2$; $\lambda_4={}^4/_1$. **69.** $P(+7{,}2;\ +5{,}4)$. Указание. $OM=5$; $OP=9$; $PM=-4$; $\dfrac{OP}{PM}=-{}^9/_4$. Точка $P$ делит отрезок $OM$ в отношении $\lambda=-{}^9/_4$. **69*.** $M\left(+\dfrac{196}{65};\ +\dfrac{112}{65}\right)$. Указание. Из подобия треугольников определяем отношение, в котором точка $M$ делит отрезок $AB\left(\lambda=\dfrac{16}{49}\right)$. **70.** $(-2;\ +1)$. Указание. Искомая точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. **71.** $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$. Указание. Центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан (см. задачу 70). **72.** $C(-a;\ -b)$. Указание. Можно воспользоваться выражениями для координат центра тяжести треугольника (см. задачу 71). **73.** $M(+3^1/_3;\ +5^2/_3)$. Указание. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. **74.** $B_1(+11;\ 0)$, $C_1(+8;\ +11{,}5)$. Указание. Искомые вершины делят отрезки $AB$ и $AC$ в отношении $\lambda=-{}^5/_3$. **75.** $M(-2;\ +1)$. Указание. Сделать чертёж, провести общие касательные, линию центров, соединить центры кругов с точками прикосновения $P_1$ и $P_2$. Из подобия треугольников $MC_1P_1$ и $MC_2P_2$ следует, что искомая точка $M$ делит отрезок $C_1C_2$ в отношении $\lambda=-{}^3/_7$. Данные две окружности пересекаются, а потому имеют только одну пару общих касательных. **76.** $C(+6;\ 0)$. Указание. Искомая точка лежит на оси абсцисс; следовательно, она имеет ординату, равную нулю. Зная ординату искомой точки и ординаты двух точек $A$ и $B$, лежащих с нею на одной прямой, определяем отношение, в котором эта точка делит отрезок $AB$, а зная это отношение, вычисляем неизвестную абсциссу искомой точки. (Ср. с решением задачи 60.) **77.** $(+5;\ -7)$. Указание. См. задачу 76. **78.** $M(+1;\ +2)$. Указание. Обозначим через $\lambda$ отношение, в котором искомая точка $M(x,\ y)$ делит диагональ $AC$. Это отношение может быть выражено или через абсциссы трёх точек $A$, $C$ и $M$, или через их ординаты. Приравнивая между собой эти два выражения для одного и того же отношения $\lambda$, мы получим уравнение, связывающее координаты $x$ и $y$ искомой точки. Второе уравнение между этими неизвестными получим, приравняв два выражения для отношения $\lambda_1$, в котором та же точка $M$ делит диагональ $BD$. **79.** $M(+5{,}5;\ +4{,}75)$. Указание. Можно последовательно найти сперва центр тяжести двух материальных точек, а потом центр тяжести найденной точки и третьей данной точки. **80*.** $M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. Сравнить с задачей 71.

**81.** $x=\frac{a^2}{2(a+b)}$; $y=\frac{b^2}{2(a+b)}$. Указание. Вершину угла принимаем за начало координат, а оси координат направляем по сторонам угла.

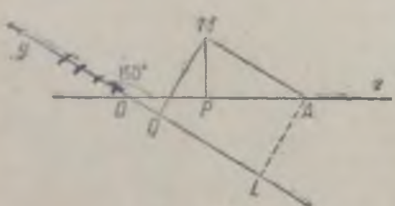
**82.** $\bar{x}=\frac{x_1(b+c)+x_2(a+c)+x_3(a+b)}{2(a+b+c)}$, $\bar{y}=\frac{y_1(b+c)+y_2(a+c)+y_3(a+b)}{2(a+b+c)}$.

**83.** $x=0$, $y\approx+1{,}5867$. Указание. За ось $x$ принимаем прямую $AB$, за ось $y$ — ось симметрии фермы $EC$. Так как стержни однородные, то вес их пропорционален длине. **84.** $x=+8{,}2$; $y=+6{,}2$. Указание. Диагональю $AC$ делим четырёхугольник на два треугольника $ABC$ и $ADC$ и находим центр тяжести каждого треугольника отдельно. Центр тяжести четырёхугольника делит расстояние между найденными точками в отношении, обратном отношению площадей соответствующих треугольников, так как вес треугольников пропорционален их площади. **85.** $x=7$; $y=8$. **86.** См. черт. 93.




Черт. 93.

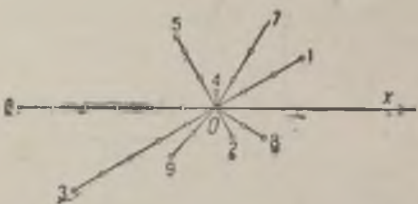
**87.** $d_1=2$; $d_2=3$. Указание (см. черт. 94). $d_1=MP=AM\times\sin(\pi-\omega)=y\cdot\sin\omega=4\cdot{}^1/_2=2$; $d_2=MQ=AL=OA\cdot\sin(\pi-\omega)=x\cdot\sin\omega=6\cdot{}^1/_2=3$. **88.** $M_1(+3;+2)$, $M_2(-3;\ +2)$, $M_3(-3;\ -2)$ и $M_4(+3;\ -2)$. Указание. Задача допускает 4 решения, так как не указано, по какую сторону от осей находится точка. **89.** $x=-8$; $y=+5$. **90.** (0; 0), (+1; 0), (+2; +1), (+2; +2), (+1; +2), (0; +1). **91.** $d=2$. **92.** $AM=7$. **93.** $AB=5$; $AC=2\sqrt{21}$; $BC=7$.




Черт. 94.

**94.** $C_1\left(+\frac{9}{2};\ -\frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right)$ или $C_2\left(+\frac{9}{2};\ \frac{-1+4\sqrt{3}}{2}\right)$. Указание. Искомая вершина $C$ должна удовлетворять условиям: $CA=AB$ и $CB=AB$. **95.** $\omega=\frac{\pi}{3}$. **96.** $AB=5$. Указание.

Пользуясь формулой (5), находим точки $A$ ($x$; 0) и $B$ (0; $y$), в которых прямая $MN$ пересекает оси координат, а потом вычисляем расстояние между найденными точками. **97.** $\varphi=30^\circ$. **98.** $y=-5$. Указание. Воспользуемся формулой (3′), в которой согласно условию задачи $\varphi=\omega-\varphi$. **99.** $M_1(+1;\ +{}^1/_2)$, $M_2(+9;\ +4{}^1/_2)$. Указание. Для нахождения искомой точки пользуемся формулами (3′) и (1′). **100.** $M_1(-1;\ +10)$, $M_2(-13;\ -2)$, $M_3(-7+2\sqrt{3};\ 4-2\sqrt{3})$; $M_4(-7-2\sqrt{3};\ 4+2\sqrt{3})$.



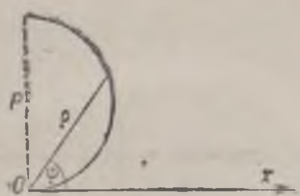
Черт. 95.

Черт. 96.

| $\varphi$ | $0^\circ$ | $15^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $75^\circ$ | $90^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\varphi$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
| $\rho=a\sin 2\varphi$ | 0 | $\frac{a}{2}$ | $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ | $a$ | $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{a}{2}$ | 0 |

Указание. Все искомые точки находятся на расстоянии 6 единиц от данного центра $C$; кроме того, для одного диаметра мы имеем $\varphi=\omega-\varphi$, а для другого диаметра $\varphi=\pi+(\omega-\varphi)$. **101.** $S=3{,}25$ кв. ед. **102.** $\omega=30^\circ$ или $\omega=150^\circ$. **103.** См. черт. 95. **104.** a), b), c) — на окружностях с центрами в полюсе и радиусами, соответственно равными 1,5 и $a$. d), e), f), g) — на лучах, выходящих из полюса и образующих с полярной осью углы в $30^\circ$, $60^\circ$, $90^\circ$, $\varphi$.

**105.** a) $\left(1;\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(3;\ \frac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3};\ \frac{5\pi}{6}\right)$, $(\rho;\ \varphi+\pi)$; b) $\left(1;\ \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(3;\ \frac{4\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$, $(\rho;\ 2\pi-\varphi)$. **106.** $(a;\ 0)$, $\left(a\sqrt{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2a;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(a\sqrt{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(a;\ \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(0;\ \frac{0}{0}\right)$. Примечание. Полюс имеет радиус-вектор, равный нулю, и неопределённую амплитуду. **107.** См. черт. 96 и соответствующую таблицу. **108.** График представляет полуокружность, диаметр которой равен $P$ (черт. 97). **109.** $AB=\sqrt{3}$, $CD=10$, $EF=5$. **110.** $AB=BC=CA=7$. **111.** $M_1(1;\ 0)$ и $M_2(7;\ 0)$. **112.** $S={}^1/_2\rho_1\cdot\rho_2\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_1)$. Указание. Воспользуемся тригонометрической формулой для площади треугольника: $S=\frac{a\cdot b\cdot\sin C}{2}$. **113.** $S=1$ кв. ед. **114.** $S=6(5\sqrt{3}-3)$ кв. ед. Указание. Сделать чертёж и вычислить искомую площадь, комбинируя площади треугольников, имеющих одну вершину в полюсе, т. е. треугольников $OAB$, $OBC$ и $OAC$.



Черт. 97.

**115.** $A(+1;\ +\sqrt{3})$, $B(-1;\ +1)$, $C(0;\ +5)$, $D\left(+\frac{3\sqrt{3}}{2};-{}^3/_2\right)$.

**116.** $(5;\ \operatorname{arc\,tg}(-{}^4/_3))$, $\left(\sqrt{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(2;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $(5;\ 0)$. **117.** $\rho\cos\varphi=a$. **118.** $x^2+y^2=a^2$. **119.** $P_x=3\sqrt{3}$; $P_y=3$. **120.** $P=10$ *кг*; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **121.** $\text{пр}_x\ AB=2$; $\text{пр}_y\ AB=-1$. Указание. Проекции отрезка на оси равны разностям одноимённых координат концов. Знак проекции зависит от того, совпадает ли её направление с положительным или отрицательным направлением оси проекции. **122.** $R=13$. **123.** a) $x=x'$; $y=-y'$; b) $x=y'$; $y=x'$. **124.** a) Изменить направление на обеих осях; b) на оси $x$ уменьшить единицу масштаба втрое, на оси $y$ увеличить единицу вдвое. **125.** a) Перенести начало координат в точку $O'$ $(-5;\ 0)$; b) перенести начало координат в точку $O'''$ $(0;\ +2)$; c) перенести начало координат в точку $O''(+3;\ -3)$. **126.** $(+5;\ -8)$, $(+11;\ -12)$, $(+4;\ +4)$, $(+8;\ -3)$, $(+4;\ 0)$. **127.** $d=5$. **128.** $d=0$. Точки $A$ и $B$ совпадают. **129.** Координаты нового начала относительно старой системы: $a=+5$, $b=-1$. Координаты старого начала относительно новой системы: $a'=-5$, $b'=+1$. **130.** a) $A(-3;\ -2)$; $B(+5;\ +1)$, $M(y;\ -x)$; b) $A(+3;\ +2)$, $B(-5;\ -1)$, $M(-y;\ x)$; c) $A(-2;\ +3)$, $B(+1;\ -5)$, $M(-x;\ -y)$. **131.** $A(+{}^3/_2;\ -{}^5/_2)$; $M\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}},\ \frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)$. **132.** $x=\frac{(x'-y')\sqrt{2}+1}{2}$; $y=\frac{(x'+y')\sqrt{2}+1}{2}$.

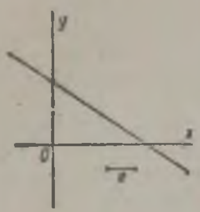
**133.** $B_1\left(4+\frac{5\sqrt{3}}{2};\ \frac{3}{2}\right)$, $C_1\left(3+\frac{5\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$, $D_1(3;\ \sqrt{3}-1)$.

Указание. За новые оси координат принимаем новое положение сторон прямоугольника ($A_1B_1$ и $A_1D_1$). Преобразование состоит из переноса начала в точку $(+4;\ -1)$ и поворота осей на угол $\alpha=30°$. Формулы этого преобразования такие: $x=x'\frac{\sqrt{3}}{2}-y'\frac{1}{2}+4$

и $y = x'\frac{1}{2} + y'\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. Координаты вершин прямоугольника после перемещения известны относительно новой системы: $A_1$ (0; 0), $B_1$ (5; 0), $C_1$ (+5; +2) и $D_1$ (0; +2). Нужно только по вышеприведённым формулам вычислить координаты этих точек относительно первоначальной системы координат. Сделать чертёж. **134.** $A$ (0; $-{}^9/_5$), $B$ (0; $+{}^{16}/_5$), $C$ ($-{}^{12}/_5$; 0); $x = {}^4/_5x' - {}^3/_5y' + {}^{48}/_{25}$, $y = {}^3/_5x' + {}^4/_5y' + {}^{36}/_{25}$. Сделать чертёж. **135.** $x = x' - \frac{y'}{\sqrt{2}} + a$; $y = \frac{y'}{\sqrt{2}}$. **136.** $x' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $y' = \frac{5}{2}$. **137.** (−1; 0), (+1; 0), (0; $+\sqrt{3}$), (0; $-\sqrt{3}$), $x = x' - \frac{y'}{\sqrt{3}} + 1$, $y = x' + \frac{y'}{\sqrt{3}} + 1$. **138.** a) $S = \frac{1}{2}[x_1'(y_2' - y_3') + x_2'(y_3' - y_1') + x_3'(y_1' - y_2')]$, где для координат третьей вершины, совпадавшей раньше с началом координат, введены следующие обозначения: $-a = x_3'$ и $-b = y_3'$; b) $S = \frac{\sin\omega}{2}(x_1'y_2' - y_1'x_2')$. **139.** $x'^2 + y'^2 = 4$. **140.** $x' \cdot y' = 0$. **140*.** $O'(-3; +1)$; преобразованное уравнение: $x'^2 + 2x'y' - y'^2 - 7 = 0$. **141.** $2x' \cdot y' = a^2$. **142.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$. **143.** 1) Биссектриса нормального координатного угла; 2) внешняя биссектриса того же угла; 3) совокупность обеих биссектрис; 4) мнимая кривая с одной только действительной точкой в начале координат; 5) окружность, имеющая центр в начале координат, и радиус, равный $a$; 6) прямая, параллельная оси абсцисс; 7) совокупность двух прямых, параллельных оси $y$; 8) совокупность двух осей координат; 9) совокупность трёх прямых: оси ординат ($x = 0$) и двух прямых, ей параллельных; 10) совокупность двух прямых, из которых одна параллельна оси ординат ($x + a = 0$), а другая параллельна оси абсцисс ($y - b = 0$). **144.** См. черт. 98—102 на стр. 269. **145.** См. черт. 103—105 на стр. 270. **146.** См. черт. 106—108 на стр. 271. **147.** См. черт. 109 на стр. 272. **148.** См. черт. 110 на стр. 272. **149.** См. черт. 111 на стр. 274. **150.** См. черт. 112 на стр. 274. **151.** Точки $A$ и $C$ лежат на кривой; точка $B$ не лежит на ней. **152.** Проходит. **153.** Через начало координат проходят кривые (b) и (e). **154.** Уравнение кривой не должно содержать свободного члена. **155.** $x - y + 2 = 0$. Прямая, перпендикулярная к $AB$ и делящая этот отрезок пополам. Указание. Чтобы составить уравнение искомого геометрического места, выражаем формулой свойство образующей точки $M$, а именно: $AM = BM$. Заменяем отрезки их выражениями через координаты и производим возможные упрощения. **155*.** $x - y = 4$. Указание. Находим точку $C$ отрезка $MN$, через которую проходит искомая прямая. Выбрав на $MN$ любой отрезок, для которого точка $C$ служит серединой, сведём задачу к известному случаю, см. задачу 155. **156.** $x^2 + y^2 = 4$. Окружность с центром в начале координат и радиусом $r = 2$. Указание. Образующая точка $M(x, y)$ обладает

a) $2x+3y=6$

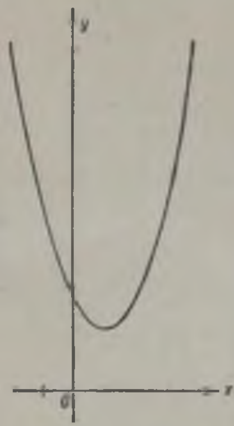
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | $+2$ |
| $+1$ | $+4/3$ |
| $+2$ | $+2/3$ |
| $+3$ | 0 |
| $+4$ | $-2/3$ |
| ... | ... |
| $-1$ | $+8/3$ |
| $-2$ | $+10/3$ |
| ... | ... |




Черт. 98.

d) $y=(x-1)^2+2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | $+3$ |
| $+1$ | $+2$ |
| $+2$ | $+3$ |
| $+3$ | $+6$ |
| $+4$ | $+11$ |
| ... | ... |
| $-1$ | $+6$ |
| $-2$ | $+11$ |
| ... | ... |

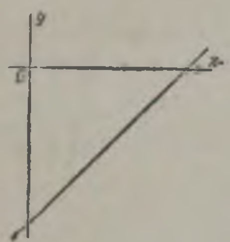



Черт. 101.

1/2

b) $y=x-5$

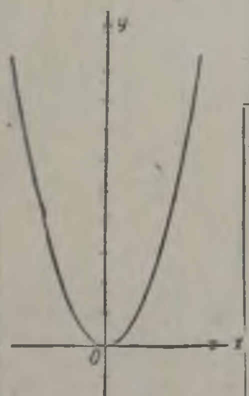
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | $-5$ |
| $+1$ | $-4$ |
| $+2$ | $-3$ |
| ... | ... |
| $+5$ | 0 |
| $+6$ | $+1$ |
| ... | ... |
| $-1$ | $-6$ |
| ... | ... |




Черт. 99.

c) $y=x^2$

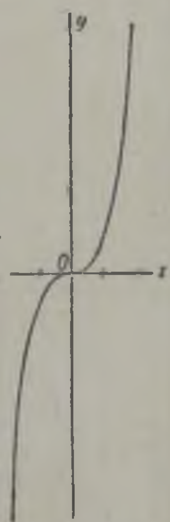
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\pm 1$ | 1 |
| $\pm 2$ | 4 |
| $\pm 3$ | 9 |
| ... | ... |
| $\pm 1/2$ | 1/4 |
| $\pm 1/4$ | 1/16 |
| ... | ... |




Черт. 100.

e) $y=x^3$

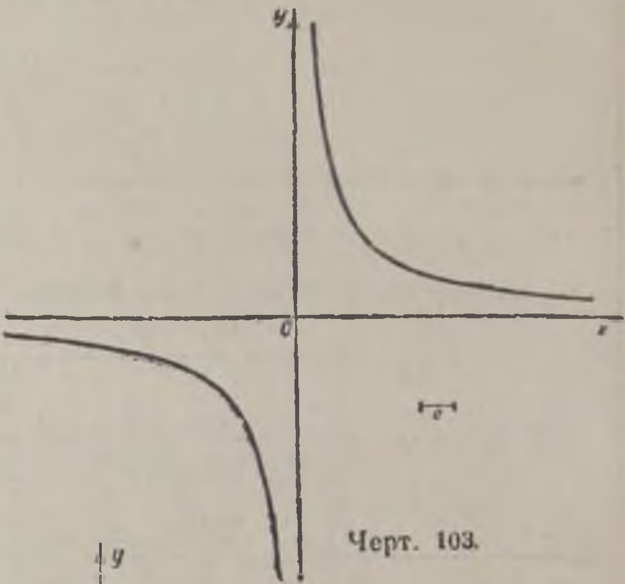
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $+1$ | $+1$ |
| $+2$ | $+8$ |
| $+3$ | $+27$ |
| ... | ... |
| $-1$ | $-1$ |
| $-2$ | $-8$ |
| $-3$ | $-27$ |
| ... | ... |
| $+1/2$ | $+1/8$ |
| ... | ... |




Черт. 102.

a) $xy=4$

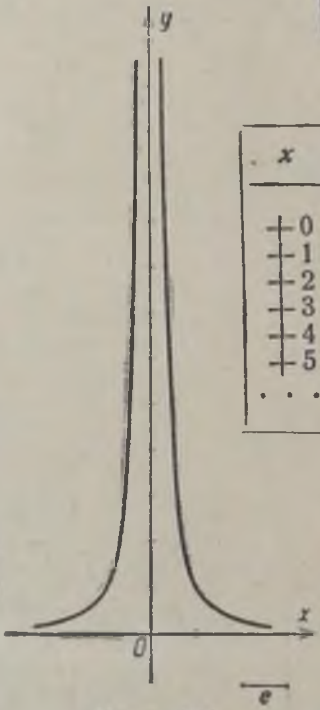
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $+1$ | $+4$ |
| $+1/2$ | $+8$ |
| $+1/4$ | $+16$ |
| $x\to 0$ | $y\to\infty$ |
| $+2$ | $+2$ |
| $+3$ | $+1^1/_3$ |
| $+4$ | $+1$ |
| $+6$ | $+2/3$ |
| $+8$ | $+1/2$ |
| ... | ... |
| $-1$ | $-4$ |
| $-1/2$ | $-8$ |
| ... | ... |




Черт. 103.

b) $y=\frac{1}{x^2}$

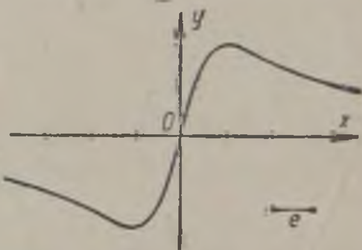
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $\pm 1$ | $+1$ |
| $\pm 2$ | $+1/4$ |
| $\pm 3$ | $+1/9$ |
| $\pm 4$ | $+1/16$ |
| ... | ... |
| $\pm 1/2$ | $+4$ |
| $\pm 1/3$ | $+9$ |
| $\pm 1/4$ | $+16$ |
| ... | ... |




Черт. 104.

c) $y=\frac{4x}{x^2+1}$

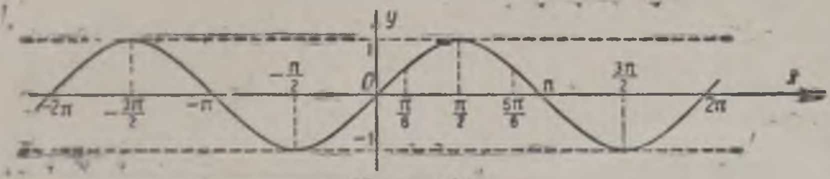
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| $+0$ | $+0$ | $-1$ | $-2$ |
| $+1$ | $+2$ | $-2$ | $-8/5$ |
| $+2$ | $+8/5$ | ... | ... |
| $+3$ | $+12/10$ | $+1/2$ | $+8/5$ |
| $+4$ | $+16/17$ | $+1/3$ | $+12/10$ |
| $+5$ | $+20/26$ | $+1/4$ | $+16/17$ |
| ... | ... | ... | ... |




Черт. 105.

a) $y = \sin x$

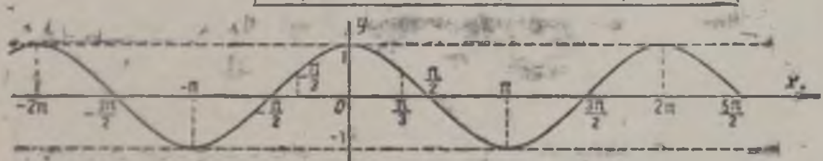
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0\ldots$ |




Черт. 106.

b) $y = \cos x$

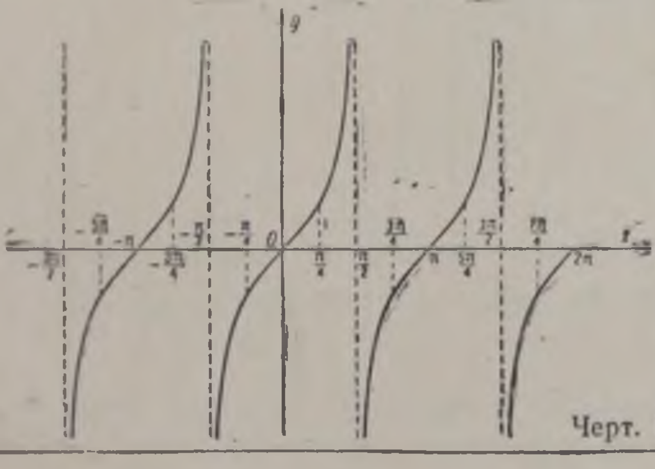
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+1$ | $+\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $+1\ldots$ |




Черт. 107.

c) $y = \operatorname{tg} x$

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $x \to \frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $+1$ | $y \to \pm\infty$ | $-1$ | $0$ | $+1\ldots$ |

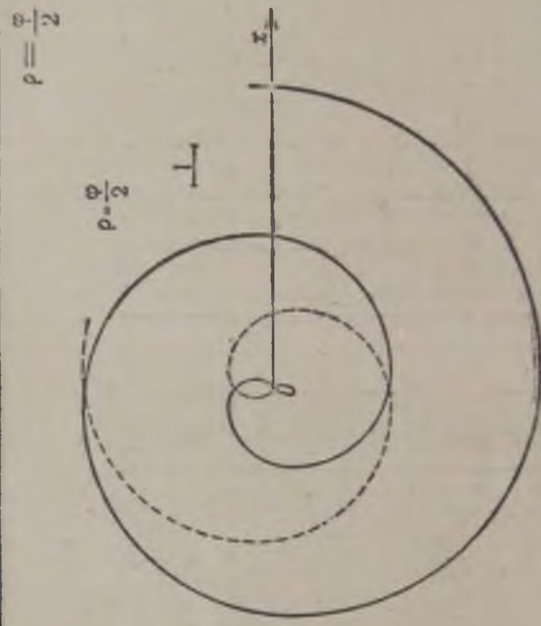



Черт. 108.

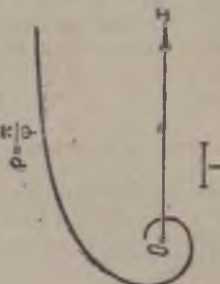
| $\varphi$ | $\rho$ (№ 147) | $\rho$ (№ 148) |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $\infty$ |
| $\pi/_{12}$ | . . . | $12$ |
| $\pi/_6$ | $\pi/_{12}\approx 0{,}26$ | $6$ |
| $\pi/_4$ | $\pi/_8\approx 0{,}39$ | $4$ |
| $\pi/_3$ | $\pi/_6\approx 0{,}52$ | $3$ |
| $\pi/_2$ | $\pi/_4\approx 0{,}79$ | $2$ |
| $2\pi/_3$ | $\pi/_3\approx 1{,}05$ | $^8/_2$ |
| $3\pi/_4$ | $3\pi/_8\approx 1{,}18$ | $^4/_3$ |
| $\pi$ | $\pi/_2\approx 1{,}57$ | $1$ |
| $5\pi/_4$ | . . . | $^4/_5$ |
| $4\pi/_3$ | . . . | $^8/_4$ |
| $3\pi/_2$ | $3\pi/_4\approx 2{,}36$ | $^2/_3$ |
| $5\pi/_3$ | . . . | $^8/_5$ |
| $2\pi$ | $\pi\approx 3{,}14$ | $^1/_2$ |
| $5\pi/_2$ | . . . | $^2/_5$ |
| $3\pi$ | $3\pi/_2\approx 4{,}71$ | $^1/_3$ |
| $4\pi$ | $2\pi\approx 6{,}28$ | $^1/_4$ |
| . . . | . . . | |

Указание. Если мы будем давать отрицательные значения полярным координатам, то получим другую ветвь кривой, намеченную пунктиром.

При построении нет надобности вычислять приближённые значения радиуса-вектора, — достаточно взять отрезок длиной $\pi$ и откладывать указанные его доли.




Черт. 109.

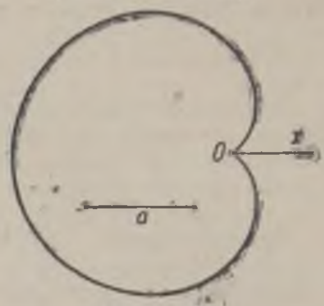



Черт. 110.

свойством: $AM = \frac{BM}{2}$. **157.** $x^2 + y^2 + 24x = 180$, или, дополнив члены, содержащие абсциссу $x$, до полного квадрата, можно переписать это уравнение так: $(x + 12)^2 + y^2 = 324$. Это — окружность с центром в точке $(-12;\ 0)$ и радиусом $r = 18$. Указание. Нужное разложение силы будет достигнуто, если на отрезке $P$ как на основании мы построим треугольник, боковые стороны которого относятся между собой как 2:3. Эти стороны и будут искомые слагающие силы. Но таких треугольников можно построить бесчисленное множество, и исследование облегчается, если известно геометрическое место их вершин. За начало координат принимаем точку приложения силы, а направление её принимаем за положительное направление оси абсцисс. Сделать чертёж. **158.** $y = cx$. Прямая, проходящая через точку пересечения данных двух прямых. Указание. Данные прямые принимаем за оси координат и решаем задачу в косоугольных координатах. **158*.** $x - y - 2 = 0$. **159.** $\rho \sin \varphi = \frac{M}{a}$ или $y = \frac{M}{a}$. Прямая, параллельная оси $x$, если за ось $x$ принята прямая $OA$ (черт. 113 на стр. 274). **160.** Окружность $x^2 + y^2 = a^2$. Прямая $AB$ принята за ось $x$, и начало координат делит отрезок $AB$ пополам. **161.** $x^2 + y^2 = a^2$. Указание. Выражение для отрезков $b$ и $b_1$ находим из рассмотрения подобных треугольников: $\triangle MNA \sim \triangle COA$ и $\triangle BOD \sim \triangle BNM$ (черт. 114 на стр. 274). **161*.** Окружность $x^2 + y^2 = 14$, или $4\ (x^2 + y^2) = 2s^2 - a^2$, где $s^2 = b^2 + c^2$. Указание. За ось $x$ принята прямая, на которой лежит основание треугольников; начало координат совпадает с серединой этого основания. **162.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$. Указание. За ось абсцисс принимаем прямую, соединяющую фокусы. Начало координат выбираем посредине между фокусами. **162*.** Эллипс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$, см. задачу 162. **163.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$. Выбор осей тот же что и в задаче 162. **163*.** Гипербола $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$, см. задачу 163. **164.** $y^2 = 2px$. Указание. За ось $x$ принимаем перпендикуляр, опущенный из фокуса на директрису. Начало координат берём посредине между фокусом и директрисой. **164*.** Парабола $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$, см. задачу 164. **165.** a) $6y - x = 0$; b) $y = 2x + 6$; c) $x^2 + y^2 = a^2$; d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Указание. Если даны уравнения движения точки, определяющие её координаты через промежуточный параметр (в данном случае через $t$), то, исключив этот параметр из обоих уравнений, получим одно уравнение, связывающее только координаты точки, т. е. обычное уравнение той кривой, которую описывает точка при своём движении. Данные уравнения тоже определяют траекторию точки, но только в параметрической

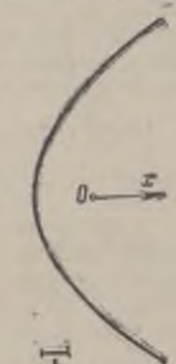
| $\varphi$ | $\rho$ (№ 149) | $\rho$ (№ 150) |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $\infty$ |
| $\frac{\pi}{12}$ | . . . | . . . |
| $\frac{\pi}{6}$ | . . . | . . . |
| $\frac{\pi}{4}$ | . . . | . . . |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{a}{2}$ | $8$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $a$ | $4$ |
| $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3a}{2}$ | $\frac{8}{3}$ |
| $\frac{3\pi}{4}$ | . . . | . . . |
| $\pi$ | $2a$ | $2$ |
| $\frac{5\pi}{4}$ | . . . | . . . |
| $\frac{4\pi}{3}$ | . . . | $\frac{8}{3}$ |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $a$ | $4$ |
| $\frac{5\pi}{3}$ | . . . | $8$ |
| $2\pi$ | $0$ | . . . |
| $\frac{5\pi}{2}$ | . . . | . . . |
| $3\pi$ | . . . | . . . |
| $4\pi$ | . . . | . . . |
| . . . | . . . | . . . |

$\rho = a(1 - \cos\varphi)$

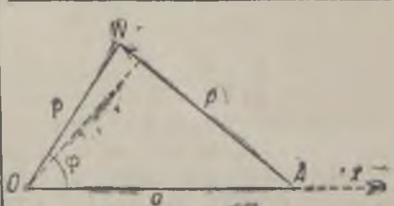



Черт. 111.

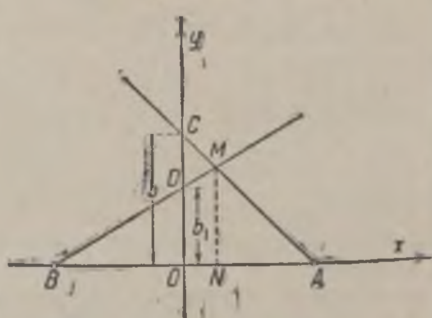
$$\rho = \frac{4}{1 - \cos\varphi}$$




Черт. 112.

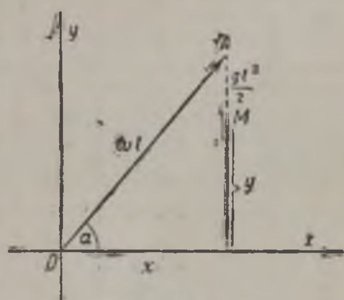



Черт. 113.




Черт. 114.

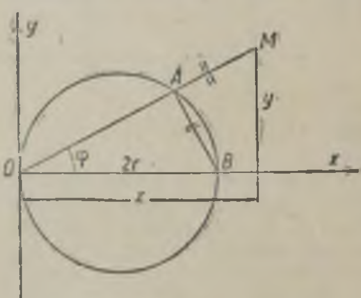
форме. **166.** $y^2 = 2\frac{v^2}{g}x$ (дуга параболы). Указание. Следует представить раньше траекторию в параметрической форме (см. задачу 165). **167.** $y = mx - nx^2$, где $m = \operatorname{tg}\alpha$ и $n = \frac{g}{2v^2 \cdot \cos^2\alpha}$. Указание. Составляем раньше уравнение траектории в параметрической форме, а именно: определяем положение, которое должно занимать тело по прошествии $t''$. Пользуемся указанием, данным в тексте к задаче 166. В данном случае мы получим $x = vt \cdot \cos\alpha$ и $y = vt \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$ (черт. 115). **168.** $y = x - \frac{x^2}{80}$; $d = 80$. Вычертить эту кривую. **168*.** $x - y = \frac{1}{2}\cdot(a - b)$, если траектории подвижных точек приняты за оси координат, направление движения — за положительное направление соответствующей оси, а исходные точки обозначены $A(a;\ 0)$ и $B\ (0;\ b)$. **169.** $xy = a^2$, где $a^2$ — площадь каждого прямоугольника. После преобразования координат получим $\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1$. Это—гипербола (см. задачу 163). **169*.** $xy = \frac{s}{2}$, где $s$ — площадь треугольника, см. указание к задаче 169. **170.** Гипербола $x \cdot y = \text{const.}$ (см. задачу 169). **171.** $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ или $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$. **172.** $x^2 \cdot y^2 = (y + a)^2(b^2 - y^2)$. Указание. Чтобы установить нужное соотношение между текущими координатами ($x$ и $y$) и данными параметрами $a$ и $b$, пользуемся подобием треугольников, в которые входят эти отрезки[1]). **173.** $y(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$. Указание. Относительно способов составления уравнения см. задачу 172. **174.** $\rho = 2r\cdot\cos^3\varphi$ или $(x^2 + y^2)^2 = 2rx^3$. **175.** Дуги двух окружностей: 1) $(x - r)^2 + (y - r)^2 = 2r^2$, для $y > 0$ и 2) $(x - r)^2 + (y + r)^2 = 2r^2$, для $y < 0$. Решение (черт. 116). Согласно определению кривой: $OM = OA + AM = OA + AB$. Мы находим следую-



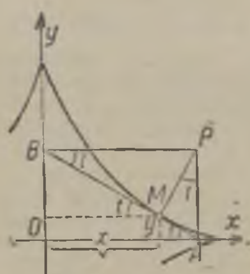

Черт. 115.

1) Попробовать составить уравнение в полярных координатах, выбрав за полярную ось прямую, проходящую через точку $A$ параллельно $OB$. Это уравнение вытекает непосредственно из самого определения кривой. Полученный результат проверить, сделав преобразование координат (переход от полярных координат к прямоугольным и перенос начала) и получив уравнение, указанное в ответе.

щие выражения для $OM$, $OA$ и $AB$: $OM=\sqrt{x^2+y^2}$, $OA=2r\cos\varphi=$
$=\dfrac{2rx}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $AB=\pm 2r\sin\varphi=\pm\dfrac{2ry}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{cases}+\text{ если } \varphi>0 \text{ и след. } y>0,\\ -\text{ если } \varphi<0 \text{ и след. } y<0.\end{cases}$ Вставляя полученные выражения отрезков в основное равенство, имеем: $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{2rx}{\sqrt{x^2+y^2}}\pm\dfrac{2ry}{\sqrt{x^2+y^2}}$, или $x^2+y^2-2rx\pm 2ry=0$. Дополняя группу членов, содержащих абсциссу, и группу членов, содержащих ординату, до полных квадратов, получим уравнения окружностей, данных в ответе. **176.** $y^2=\dfrac{x^3}{2r-x}$. **177.** $\rho=a\cdot\sin 2\varphi$ или $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$. Кривая представляет четыре лепестка, сходящихся в начале координат. **178.** $\rho=a\cdot\cos\varphi+b$ или $(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$. Указание. Кривая будет описана целиком только тогда, когда $A$ опишет окружность дважды. **179.** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. Решение (черт. 117). $x=MB\cdot\cos t=BP\cdot\cos^2 t=AB\cdot\cos^3 t=a\cdot\cos^3 t$; $y=AM\sin t=$ $=AP\cdot\sin^2 t=AB\cdot\sin^3 t=a\sin^3 t$. Таким образом, получены параметрические уравнения астроиды: $x=a\cdot\cos^3 t$ и $y=a\cdot\sin^3 t$. Исключая из этих двух уравнений параметр $t$, получим уравнение астроиды, указанное в ответе. **180.** $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$.

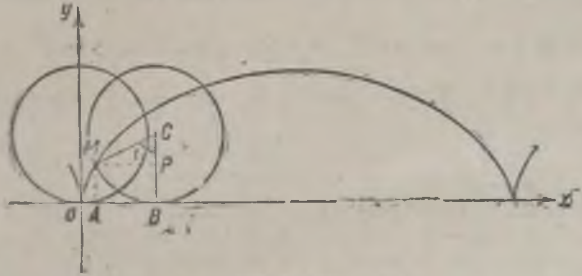


Черт. 116.



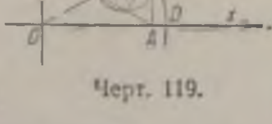
Черт. 117.

Решение (черт. 118). $x=OA=OB-AB=\smile MB-MP=at-$ $-a\cdot\sin t=a(t-\sin t)$; $y=AM=BC-PC=a-a\cdot\cos t=a(1-$ $-\cos t)$. **181.** Указание (черт. 119). Вершина прямоугольника $P$ описывает неподвижный круг, радиус которого $OP=a$. Окружность, проходящая через точки $P$, $M$ и $C$, имеет радиус $\dfrac{a}{4}$ и катится без скольжения по первой окружности. Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что $\smile MP=\smile PD$. **182.** (Черт. 120). $x=a(\cos t+$ $+t\sin t)$; $y=a(\sin t-t\cos t)$. Указание. До сматывания конец нити находится в точке $Q$. При сматывании натянутая нить совпадает с касательной к кругу, причём длина касательной $PM = -PQ = at$. **183.** Первая прямая проходит через точки $A$, $E$ и $F$; вторая проходит через $C$, $D$ и $F$. Точка $F$ является точкой пересечения обеих прямых. **184.** $y = -5x + 2$. Указание. Урав-

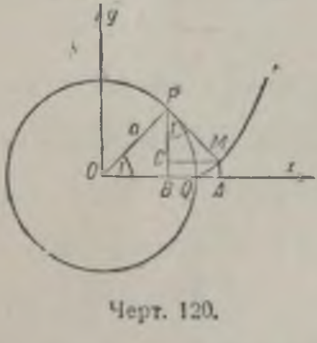



Черт. 118.

нение прямой, содержащее искомые параметры, имеет вид: $y = kx + b$. Так как точки $P$ и $Q$ лежат на этой прямой, то их координаты должны удовлетворять её уравнению. Произведя подстановку, получим два уравнения для определения $k$ и $b$. **185.** a) $k = 2$, $b = 3$; b) $k = -{}^5/_2$, $b = 4$; c) $k = -{}^3/_8$, $b = -2$. Указание. Нужно раз-




Черт. 119.




Черт. 120.

решить уравнение относительно ординаты, тогда коэффициент при $x$ будет равен угловому коэффициенту, а свободный член равен искомому отрезку. **186.** Указание. Для построения прямой нужно знать две её точки. Для предложенных прямых известны координаты точек их пересечения с осью ординат $(0; b)$; поэтому для каждой прямой достаточно найти ещё по одной точке. **187.** $y = x$; $y = -x$; $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; $y = 0$. **188.** $y = -0{,}4x$. **189.** Прямая линия с угловым коэффициентом, равным $v$, и отсекающая на оси ординат отрезок $s_0$. **190.** $v = 16$ *км/час*. Указание. См. задачу 189.

**191.** $y=\frac{v_2}{v_1}x$. Указание. В любой момент $t$ движущаяся точка будет иметь абсциссу $x=v_1t$ и ординату $y=v_2t$. Исключая $t$ из этих двух уравнений, мы получим искомую траекторию. **192.** $y=\frac{g_2}{g_1}x$. **193.** $y=\pm x\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **194.** $y=0$; $y=2\sqrt{3}$; $y=\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$; $y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$. **195.** $x_1=+6$; $y_1=0$; $y=-{}^2/_3\,x+4$. **196.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\operatorname{arctg}(-{}^3/_4)$. Указание. Пользуемся формулой (3) в тексте. **197.** a) $y=4x$; b) $y=-2x$; c) $y=-3x$ или $y={}^1/_3x$; d) $y=-(2+\sqrt{3})\,x$ или $y=-(2-\sqrt{3})\,x$. **198.** a) $y=-1$; b) $y=x-4$ или $y=-x+2$; c) $y=3x-10$. **199.** $y=-2x+14$; $x_2=+6$; $y_2=+2$; $d=3\sqrt{5}$. Указание. Искомая траектория — перпендикуляр, опущенный из точки $(+3;\ +8)$ на данную прямую. **200.** $y={}^3/_4x-{}^5/_2$. **201.** $y=-{}^3/_7x+{}^{23}/_7$ или $y={}^7/_3x-{}^{73}/_3$. Указание. Так как луч падает на прямую под углом 45°, то отражённый луч будет перпендикулярен к нему. **202.** $y=-2x+7$ и $y={}^1/_2x-3$. Указание. Оба катета проходят через данную точку $(+4;\ -1)$; один из них образует с гипотенузой угол 45° (треугольник равнобедренный), другой катет перпендикулярен к первому. **203.** Второй катет: $2x-3y+11=0$; гипотенуза: $x+5y-40=0$ или $5x-y-18=0$. **204.** $y=\frac{x}{2}-{}^5/_2$; $y=x-2$; $y=2x-1$.

**205.** $y=\frac{2}{\sqrt{3}}x$ (перпендикуляр к оси $x$); $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ (перпендикуляр к оси $y$). **206.** Прямая образует с осями $x$ и $y$ углы $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $\omega-\varphi=-\frac{\pi}{6}$. Указание. Пользуемся формулой (3′). Здесь $\theta=\varphi$; $k=0$; $k'=-2$; $\omega=\frac{\pi}{3}$. **207.** $(AB)\,y=0$; $(BC)\,y=-\sqrt{3}x+a\sqrt{3}$; $(CD)\,y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+a\sqrt{3}$; $(DE)\,y=2a\sqrt{3}$; $(EF)\,y=-\sqrt{3}x-a\sqrt{3}$; $(FA)\,y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$. **208.** $\theta=\frac{\pi}{6}$. **209.** $\omega=60°$ или $\omega=300°$. Указание. Пользуемся формулой (3′), которая дана в тексте. **210.** $\omega=60°$ или $\omega=300°$. Указание. Пользуемся условием перпендикулярности (5′). **211.** $y={}^1/_5x-1$. **212.** $11x+y-17=0$. **213.** $x+2y-7=0$ и $2x-3y=0$. **214.** a) $3x-4y+12=0$, $4x+3y+16=0$, $2x-y-2=0$; b) $7x-y+3=0$; c) $x+7y+4=0$; d) $3x-4y+12=0$. Указание. Биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам; поэтому для составления уравнения (c) надо найти длину сторон $AB$ и $BC$ и разделить сторону $AC$ в отношении $\lambda = \frac{AB}{BC}$. При вычислениях предполагаем, что $\omega = \frac{\pi}{2}$. **215.** $y = 2x$. **216.** $3x + 4y - 16 = 0$; $5x + 3y - 1 = 0$; $2x - y - 7 = 0$; **217.** $BC \| DA$; $3x - 5y + 5 = 0$; $x - y = 0$; $y - 1 = 0$. Указание. Чтобы проверить параллельность двух сторон данного четырёхугольника, вычисляем угловые коэффициенты его сторон по формуле (6). Чтобы составить уравнение средней линии, вычисляем координаты середин двух непараллельных сторон $AB$ и $CD$. При составлении уравнения диагонали $AC$ мы можем воспользоваться уравнением (7), данным в тексте; тогда уравнение $AC$ примет вид: $\frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{0}$, но равенство этих двух дробей имеет место лишь тогда, когда числитель второй дроби равен нулю, т. е. $y - 1 = 0$, так как иначе правая часть уравнения бесконечно велика, в то время как левая часть принимает конечные значения. Таким образом, оба написанных уравнения равносильны, и диагональ $AC$ параллельна оси $x$, что непосредственно следует из того, что две её точки $A$ и $C$ имеют одинаковые ординаты. **218.** Указание. Чтобы проверить, проходят ли три прямые через одну точку, находим сначала точку пересечения двух из них (решаем совместно их уравнения) и потом смотрим, удовлетворяют ли найденные координаты уравнению третьей прямой. **219.** $(A'B')\ 2x - 5y - 18 = 0$; $(B'C')\ x + 3y - 20 = 0$; $(C'A')\ 3x - 2y - 5 = 0$ или $(A''B'')\ 6x - 15y + 72 = 0$; $(B''C'')\ x + 3y + 34 = 0$; $(C''A'')\ 3x - 2y + 25 = 0$. Указание. Чтобы составить уравнения сторон бо́льшего треугольника, вычисляем координаты его вершин. Вершина $A'$ лежит на прямой $MA$, причём расстояние её от центра подобия $M$, т. е. отрезок $MA'$ в три раза больше отрезка $MA$; другими словами, точка $A'$ делит отрезок $MA$ в отношении $\lambda = -{}^3/_2$. Вершины $B'$ и $C'$ делят в том же отношении отрезки $MB$ и $MC$. Второй треугольник симметричен с первым относительно центра подобия, и его вершины получаются делением отрезков $MA$, $MB$ и $MC$ в отношении $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$.

**220.** a) лежат; b) не лежат. **221.** $y = 7$. **222.** $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Указание. Луч должен быть направлен так, что если бы он не отразился от оси $x$, то прошёл бы через точку $B'$, симметричную с $B$ относительно оси $x$. Задача сводится к определению угла между прямой $AB'$ и осью $x$. **223.** $M(+1;\ 0)$. Указание. Легко убедиться, что ломаная $AMB$, при любом положении точки $M$ на оси $x$, имеет одинаковую длину с ломаной $AMB_1$, где $B_1$ — точка, симметричная с точкой $B$ относительно оси $x$, а эта последняя ломаная имеет наименьшую длину, когда все три точки $A$, $M$ и $B_1$ лежат на одной прямой. Чтобы решить задачу, надо сначала найти точку пересечения прямой $AB_1$ с осью $x$. **224.** $M_1(0;\ +2)$ и $M_2(0;\ -8)$. **225.** $\pm\frac{X}{5} \pm \frac{Y}{2} = 1$. **226.** $x + y + a = 0$ и $x - y = 0$. **227.** a) $a = -4$, $b = 6$; b) $a = {}^1/_2$, $b = -2$; c) $a = 1$; $b = 1$; d) $a = -4$, $b = -10$.

**228.** $S=9$ кв. ед. **229.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ или $\frac{x}{4}+\frac{y}{3/2}=-1$. **230.** $x+y=7$. **230*.** $3x+y-2=0$; $x-3y-14=0$; $x-3y+16=0$ и $3x+y-32=0$. **231.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$. **232.** a) $b=-a$; b) $b=a$; c) $b=-a\sqrt{3}$. Указание. $k=-\frac{b}{a}$. **233.** Длина $d=7$. **234.** $x+y-4=0$. **235.** $S=12$ кв. ед. **236.** $\frac{x}{\lambda a}+\frac{y}{\lambda b}=1$ — прямая, параллельная первоначальной. **236*.** Прямая $x+y=3$. **237.** Прямые c), e) и f) даны нормальными уравнениями. Указание. Нормальное уравнение (при $\omega=90°$) характеризуется тем, что сумма квадратов коэффициентов при $x$ и $y$ равна единице ($\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$) и свободный член отрицательный. **238.** $\frac{4x-3y+10}{-5}=0$; $\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-3=0$; $0,6x+0,8y-1,5=0$; $\frac{x-2y+3}{-\sqrt{5}}=0$; $\frac{y}{2}-\frac{x\sqrt{3}}{2}-2=0$; $-x\cos 10°-y\sin 10°-4=0$ или $x\cos 190°+y\sin 190°-4=0$. **239.** $p=2/3$. **240.** $r=5$. **242.** a) $\frac{x}{2\sqrt{7}}+\frac{5y}{2\sqrt{7}}-\frac{2}{\sqrt{7}}=0$; b) $\frac{1}{7}x+\frac{5\sqrt{3}}{14}y-\frac{1}{2}=0$; c) $-\frac{5}{2\sqrt{13}}x-\frac{1}{\sqrt{13}}y-\frac{\sqrt{13}}{2}=0$. **243.** $p=1/6$; $\alpha=0$; $\beta=\frac{\pi}{4}$. **244.** $\delta=2$. **245.** a) $\delta=3$; b) $\delta=4$; c) $\delta=5^2/_3$; d) $\delta=0$, т. е. точка $P_4$ лежит на данной прямой; e) $\delta=-2,2$. **246.** $\delta=-1$. **247.** $\omega=\frac{\pi}{3}$. **248.** $h_A=\frac{29\sqrt{5}}{28}$; $h_B=4^6/_{13}$; $h_C=2$. Указание. Чтобы вычислить длину высот, находим абсолютные величины расстояний каждой вершины от противолежащей стороны. **249.** $\delta=\frac{25}{\sqrt{34}}$. **250.** $M_1(0;\ -12)$ и $M_2(0;\ +4/3)$. **252.** $d=14^2/_{13}$.

**253*.** $x+y=7\pm5\sqrt{2}$ (две прямые). **254.** $4x+3y-25=0$ и $24x-7y+125=0$. **255.** $d=0,5$. **256.** $12x+5y-26=0$ и $12x+5y-78=0$. **257.** $8x-12y+11=0$. **258.** $x-2y=0$ и $x-2y+5=0$ или $2x+y=0$ и $2x+y-5=0$. **259.** $M(+1;\ +8)$. **260.** $C_1(-5/3;\ +11^1/_4)$, $C_2(-15;\ +5/4)$, $C_3(-5/9;\ -8^3/_4)$, $C_4(+11^2/_3;\ +5/4)$. Указание. Эта задача имеет четыре решения, так как известны только абсолютные величины расстояний искомой точки от данных прямых; эти расстояния могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. **262.** $4x-12y+7=0$ и $6x+2y-5=0$. (См. задачу 261.) **263.** $M_1(0;\ +1)$, $M_2(-9;\ +4)$, $M_3(0;\ -5)$, $M_4(+3;\ +4)$. Указание. Центр круга, вписанного в треугольник, должен находиться на равных расстояниях от трёх его сторон, т. е. должен лежать на пересечении биссектрис трёх углов треугольника. Существуют четыре точки, удовлетворяющие условиям задачи: точка пересечения

 32

трёх внутренних биссектрис треугольника ($M_1$) и точки пересечения внутренней биссектрисы каждого из углов $A$, $B$ или $C$ с внешними биссектрисами двух других углов ($M_2$, $M_3$ и $M_4$). **264.** $x+2y-5=0$ и $x-6y+11=0$. Указание. Всякая прямая, проходящая через точку $M(+1;\ +2)$, изобразится уравнением $y-2=k(x-1)$ или $kx-y-k+2=0$. Расстояние этой прямой от точки $A(+3;\ +3)$ будет: $d_1=\frac{3k-3-k+2}{\sqrt{1+k^2}}$ и от точки $B(+5;\ +2)$ будет $d_2=\frac{5k-2-k+2}{\sqrt{1+k^2}}$. Согласно условию задачи $d_1=\pm d_2$, или, пользуясь найденными выражениями этих расстояний: $\frac{2k-1}{\sqrt{1+k^2}}=$ $=\pm\frac{4k}{\sqrt{1+k^2}}$. Отсюда, взяв тот или иной знак, мы получим два значения для углового коэффициента $k$; значит, задаче удовлетворяют две прямые, указанные в ответе[1]). **265.** $y-3=0$ и $12x-5y-117=0$. Указание. Для искомой прямой выбираем форму уравнения, разрешённую относительно ординаты: $y=kx+b$. Из двух условий, что расстояние $d_1$ этой прямой от точки $A$ равно шести $\left(\frac{2k+3+b}{\sqrt{1+k^2}}=\pm 6\right)$ и расстояние $d_2$ той же прямой от точки $B$ равно четырём $\left(\frac{5k+1+b}{\sqrt{1+k^2}}=\pm 4\right)$, определяем оба параметра $k$ и $b$. Задача эта должна иметь четыре решения; геометрически она сводится к нахождению общих касательных к двум окружностям, имеющим центры в точках $A$ и $B$ и радиусы, соответственно равные 6 и 4; в данном примере только две из этих касательных являются действительными прямыми, две другие — мнимые прямые; для них мы находим мнимые значения параметров. **266.** Точка может перемещаться по двум прямым: $y=0$ и $y=\sqrt{3}x$. **267.** $y={}^{8}/_{15}x-{}^{2}/_{3}$. **268.** $x+2y-23=0$, $x+2y-3=0$, $2x-y-6=0$ и $2x-y+14=0$. Указание. Уравнения первых двух сторон можно составить проще, пользуясь тем, что квадрат есть фигура, симметричная относительно своего центра; поэтому сторона, проходящая через точку $A$, должна вместе с тем пройти и через точку $B'$, симметричную с $B$ относительно $M$. **270.** a) $3x-4y-12=0$; b) ${}^{3}/_{5}x-{}^{4}/_{5}y-{}^{12}/_{5}=0$; c) $y={}^{3}/_{4}x-3$ и d) $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$. **271.** a) $\vartheta=\frac{3\pi}{4}$, если считать, что угол образован вращением первой прямой против часовой стрелки до совпадения со второй прямой; b) $\vartheta=\frac{\pi}{3}$; c) $\vartheta=\frac{\pi}{2}$; d) $\vartheta=\frac{\pi}{4}$.

---

[1]) Можно было бы решить задачу, пользуясь некоторыми геометрическими соображениями, а именно: нетрудно видеть, что условию задачи удовлетворяют две прямые, проходящие через точку $M$: одна из них параллельна прямой $AB$, а другая проходит через середину отрезка $AB$.

45
3
135

61
32
29

**272.** $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$. **273.** $\theta=\frac{2\pi}{3}$. **274.** Прямые a) и b) параллельны между собой, к ним обеим перпендикулярна прямая d); прямые e) и g) параллельны, к ним перпендикулярна прямая f). **275.** $\omega=\frac{\pi}{4}$. **276.** $a_1=2$; $a_2=-{}^2/_3$. Указание. Определяем неизвестный параметр $a$ из условия пропорциональности коэффициентов при координатах в уравнениях параллельных прямых: $\frac{a+1}{3a}=\frac{-2a}{-8}$. **277.** $a_1=0$; $a_2=1$. **279.** $4x+y=0$. **280.** $4x-7y-15=0$. Указание. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку: $A(x-x')+B(y-y')=0$. Что же касается выбора коэффициентов $A$ и $B$, то соответствующие указания даны в решении задачи 278. **281.** $5x-6y=0$. Решение. Искомая прямая проходит через начало координат, поэтому свободный член её уравнения равен нулю, и уравнение примет вид $Ax+By=0$. Из условия перпендикулярности данной и искомой прямой имеем: $\frac{A}{5}=-\frac{B}{6}$; обозначив эти отношения через $\lambda$, получим: $A=5\lambda$ и $B=-6\lambda$. Вставляем полученные значения коэффициентов в уравнение искомой прямой: $5\lambda x-6\lambda y=0$ или $5x-6y=0$. Таким образом, при составлении уравнения прямой, перпендикулярной к данной, проще всего за коэффициент при $x$ взять коэффициент при $y$ в данном уравнении, а за коэффициент при $y$ взять данный коэффициент при $x$, причём у одного из этих коэффициентов нужно переменить знак. **282.** $x+4y-3=0$. (См. задачу 281.) **283.** $5x-3y+25=0$ и $5x-3y+9=0$ **284.** $(x-x')\sin\alpha-(y-y')\cos\alpha=0$. **285.** $7x+5y=0$. **286.** $x+7y-27=0$. **287.** a) $(+2; +5)$; b) прямые параллельны между собой; c) $(-1; +4)$. **288.** $(+3; 0)$, $(0; -5)$ и $(-2; +1)$. **289.** $x={}^{29}/_{14}$; $y=-{}^5/_{14}$. **290.** $M(0; +3)$; $\theta=\operatorname{arctg}(-2)$. **291.** $(+3; +1)$, $(+12; -2)$, $(+8^{10}/_{13}; +3^4/_{13})$, $(+6^3/_{13}; -4^4/_{13})$. Указание. При решении задачи можно воспользоваться тем, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят друг друга пополам. **291*.** $2x-11y+17=0$; $2x-y+7=0$; $2x-11y+67=0$ и $2x-y-3=0$. **292.** $Q'(+10; +21)$. Указание. Из точки $Q$ опускаем перпендикуляр на данную прямую и находим точку их пересечения $M$. Эта точка $M$ служит серединой отрезка между данной точкой $Q$ и искомой $Q'$. **293.** $x-y-7=0$ и $x-2y-10=0$. Указание. Определяем первую вершину $A$ параллелограмма как точку пересечения двух данных сторон; потом определяем противолежащую вершину $C$ как конец диагонали $AC$, у которой известны начало $A$ и середина $M$. Искомые стороны проходят через точку $C$ и параллельны двум данным сторонам параллелограмма. **293*.** $S=37^{11}/_{13}$ кв. ед. **294.** $C(+2; +4)$. Указание. Вершину $C$ определяем как точку пересечения высоты $CH$ (она проходит через $H$ и перпендикулярна к $AB$) и стороны $BC$ (проходит через $B$ и перпендикулярна к $AH$). **295.** $M_1(+2; +5)$, если $BM \parallel AC$, или $M_2(+14; +17)$, если $AB \parallel CM$. **296.** В первых трёх случаях прямые проходят через одну точку, а в последнем — не проходят. **297.** $3a+7b+3=0$. **300.** a) $4x-y=0$; b) $11y-16=0$; c) $11x-4=0$; d) $17x-40y+52=0$. Указание.

Пользуемся уравнением пучка прямых: $2x+5y-8+q(x-3y+4)=0$. В первом случае надо подобрать параметр $q$ так, чтобы свободный член обратился в нуль: $-8+4q=0$, откуда $q=2$. Во втором случае параметр $q$ подбирается так, чтобы коэффициент при $x$ обратился в нуль; в третьем случае надо приравнять нулю коэффициент при ординате $y$; последний случай — см. задачу 299. **301**: $2x-y-5=0$. **302.** $x+3y-9=0$; $68x-17y+57=0$; $65x-26y+72=0$. Решение. Уравнение любой прямой, проходящей через первую вершину, т. е. через точку пересечения первых двух сторон, будет: $5x-2y+$ $+6+q(4x-y+3)=0$. Искомая прямая, проходящая через эту вершину, должна быть параллельна третьей стороне треугольника; следовательно, коэффициенты при координатах в их уравнениях должны быть пропорциональны: $\frac{5+4q}{1}=\frac{-2-q}{3}$, откуда $q=-{}^{17}/_{13}$. Вставляя найденное значение параметра в уравнение пучка, получим уравнение искомой прямой: $x+3y-9=0$. Таким же путём определим уравнения остальных искомых прямых, проходящих через две другие вершины треугольника. **303.** $22x+33y-35=0$, $5x-y+$ $+3=0$ и $17x+34y-38=0$. **304.** $x-y-3=0$ ($BC$); $4x+5y-$ $-20=0$ ($AC$); $3x-12y-1=0$ ($CH$). **305.** $14x-7y+32=0$ и $7x+21y-75=0$. Указание. Уравнения основных прямых пучка мы получим из уравнения этого пучка при следующих значениях параметра: $q=0$ и $q=\infty$. **306.** $2x-5y-2=0$. Решение. Первый способ. Искомая прямая изображается при подходящих значениях параметров $q$ и $q'$ как уравнением $x+y-1+$ $+q(x-1)=0$, так и уравнением $2x-3y+q'(y+1)=0$. А чтобы два уравнения представляли одну и ту же прямую, нужно чтобы все коэффициенты этих двух уравнений, включая и свободные члены, были пропорциональны, т. е. $\frac{1+q}{2}=\frac{1}{q'-3}=\frac{1+q}{-q'}$. Из этих двух уравнений определяем $q$ и $q'$; сравнивая, например, первое и последнее отношения, мы сразу получим $q'=-2$; приравнивая первые два отношения между собой и заменяя $q'$ найденным значением, получим $q=-{}^{7}/_{5}$. Если мы вставим в уравнение первого пучка $q=-{}^{7}/_{5}$ или в уравнение второго пучка $q'=-2$, то получим одну и ту же прямую $2x-5y-2=0$, которая и является общей прямой обоих пучков. Второй способ. Обозначив коэффициенты искомой прямой через $A$, $B$, $C$, можно воспользоваться условием (23) прохождения трёх прямых через одну точку, что приведёт к решению двух уравнений: $\begin{vmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$ и $\begin{vmatrix} A & B & C \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ или $\left\{\begin{matrix} A+C=0, \\ 3A+2B-2C=0 \end{matrix}\right\}$, откуда $A:B:C=2:-5:-2$. **307.** $y=0$; $x-3=0$ и $x-y-6=0$. **308.** $x+4y-4=0$. Указание. Уравнение всякой прямой, проходящей через точку $P(0;+1)$, имеет вид: $y=kx+1$. Находим абсциссы точек пересечения этой прямой с данными прямыми; $x_1=$

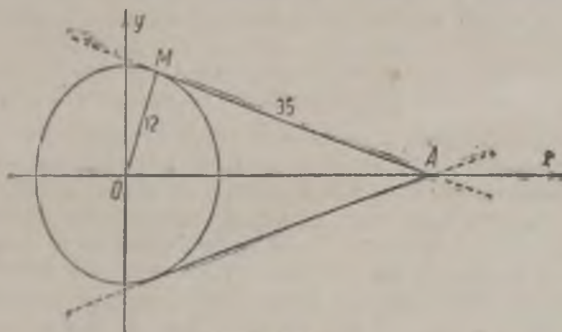
$=\frac{7}{3k-1}$ и $x_2=\frac{7}{2+k}$. Полусумма этих абсцисс должна равняться абсциссе точки $P$, т. е. нулю. Из этого условия определяем угловой коэффициент искомой прямой. **308*.** $x+y-3=0$. **309.** $y=\frac{\lambda}{q}x$. Указание. Концы отрезка подвижной прямой, заключённого между осями, будут: $A(bq;\ 0)$ и $B(0;\ b)$. Точка $M$, делящая отрезок $AB$ в отношении $\lambda$, имеет координаты $x=\frac{bq}{1+\lambda}$ и $y=\frac{\lambda b}{1+\lambda}$. Исключая из этих двух равенств переменный параметр $b$, мы получим уравнение искомой траектории. **309*.** a) $14x-43y+29=0$; b) $2x-25y+$ $+23=0$. **310.** $(7-\sqrt{5};\ 3\sqrt{5}-10)$ и $\left(+\frac{14}{3};\ -3\right)$. **310*.** $h=\frac{21}{\sqrt{17}}$; $M\left(+\frac{17}{12};\ +\frac{11}{3}\right)$; $S=13^1/_8$ кв. ед. **311.** $2x+7y+22=0$; $7x+2y-13=0$; $x-y+2=0$. **311*.** $3x+4y-15=0$; $h=4{,}4$. **312.** $2x+y-8=0$; $x-3y+10=0$; $x+4y-4=0$. Указание. Определяем точку $M$ пересечения медиан, потом определяем конец медианы $AM$ — точку $D$, как делящую отрезок $AM$ в отношении $\lambda=-3$. Через точку $D$ проводим прямую так, чтобы отрезок её, заключённый между данными медианами, делился в точке $D$ пополам (см. задачу 308); это и будет сторона треугольника, противолежащая вершине $A$. **312*.** $S_1:S_2=4:3$. **313.** $x+7y-6=0$; $x-y-6=0$; $7x+y-10=0$. Указание. При решении этой задачи можно воспользоваться тем, что стороны угла расположены симметрично относительно его биссектрисы; поэтому стороны $AB$ и $BC$ симметричны относительно биссектрисы угла $B\,(x+y-2=0)$; другими словами, на стороне $BC$ лежит точка $A_1$, симметричная с данной вершиной $A$ относительно прямой $x+y-2=0$; точно так же на стороне $BC$ лежит ещё точка $A_2$, симметричная с $A$ относительно биссектрисы угла $C\,(x-3y-6=0)$. Таким образом, мы можем найти две точки $A_1$ и $A_2$ прямой $BC$ (см. задачу 292); можем, следовательно, составить её уравнение и определить остальные вершины треугольника как точки пересечения стороны $BC$ с данными биссектрисами углов $B$ и $C$. **314.** $S_1=18{,}75$ кв. ед. или $S_2=33^1/_3$ кв. ед.

**314*.** $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{61}{53} & \frac{237}{53} & 1 \\ \frac{9}{29} & \frac{137}{29} & 1 \\ -\frac{121}{74} & \frac{97}{74} & 1 \end{vmatrix}\approx 1{,}68$ кв. ед. **315.** $\left(+\frac{10}{3};\ +\frac{7}{3}\right)$.

**316.** a) $\rho=p\cdot\sec(\varphi-\alpha)$; b) $\rho\cdot\sin(\vartheta-\varphi)=a\cdot\sin\vartheta$. Указание. Для вывода этих уравнений сделать чертежи, а потом проверить результат переходом к прямолинейной системе координат.

**316*.** $\rho \sin(\vartheta - \varphi) = \rho_1 \sin(\vartheta - \varphi_1)$. **317.** $\dfrac{\rho \cdot \sin(\varphi - \varphi_1)}{\rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)} =$ $= \dfrac{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}}{\sqrt{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2\rho_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$. Указание. Это уравнение можно получить, пользуясь результатами задачи 316* или непосредственно из чертежа. Во всяком случае выяснить геометрический смысл полученной пропорции. **317*.** a) $\varphi = \frac{\pi}{5}$; b) $\rho = 4 \sec\left(\varphi - \frac{5\pi}{6}\right)$; $\rho = 4 \sec\left(\varphi - \frac{11\pi}{6}\right)$; c) $\rho \cos \varphi = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, d) $\rho \sin\varphi = 1$; e) $\rho \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{3}{2}$; f) $\frac{7\sqrt{3}}{12} \rho \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt[3]{\rho^2 - 10\rho \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{12}\right) + 25}$. Указание. При решении этих задач можно воспользоваться результатами задач 316—317. **318.** a) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$; b) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$; c) $x^2 + (y-4)^2 = 169$. **319.** $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$. Центром служит середина $AB$. **320.** $a = +{}^8/_3$; $b = 0$; $(x - {}^8/_3)^2 + y^2 = {}^{85}/_9$. **321.** $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$. **323.** a) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ (см. задачу 322); b) данные три точки лежат на одной прямой; поэтому провести через них окружность нельзя. **324.** Точки $C$, $E$ и $F$ лежат на окружности; точки $A$ и $G$ лежат внутри окружности; точки $B$ и $D$ лежат вне окружности. Указание. О положении точки относительно окружности мы судим по её расстоянию от центра этой окружности. В зависимости от того, будет ли это расстояние меньше, равно или больше радиуса, точка лежит внутри окружности, на ней или вне её. **325.** $a = 4$; $b = -3$; $r = 2$. **326.** a) $(x-2)^2 + y^2 = 4$; b) $x^2 + (y+3)^2 = 16$; c) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 25$; d) $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{58}{9}$. **327.** a) Круг нулевого радиуса; имеет только одну действительную точку, а именно — начало координат. b) Мнимый круг; не имеет ни одной действительной точки. c) Круг нулевого радиуса с действительной точкой $(-5; +2)$. d) Мнимый круг с мнимым радиусом $r = \sqrt{-4}$. **328.** a) $x^2 + y^2 = 9$; b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$. Точка $A$ служит центром круга, точка $B$ лежит на окружности. В обоих случаях, после преобразования, ось $x$ является диаметром окружности. **329.** $x^2 + y^2 = 49$. **330.** Если $F = 0$, то окружность проходит через начало координат. Если $D = 0$ или $E = 0$, то окружность симметрична относительно оси ординат или оси абсцисс, т. е. центр лежит на одной из этих осей. Если $A = 0$, данное уравнение не изображает окружность, а потому мы не рассматриваем этот случай. **331.** a) Ось абсцисс пересекает окружность в начале координат и в точке $(+8; 0)$; ось ординат пересекает окружность в начале координат и в точке $(0; -6)$. b) Окружность касается оси абсцисс в точке $(+3; 0)$ и пересекает ось ординат в точках $(0; +9)$ и $(0; +1)$. c) Окружность касается оси $x$ в точке

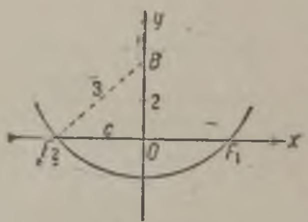
(+2; 0) и касается оси $y$ в точке (0; —2). d) Окружность не имеет действительных точек пересечения ни с той ни с другой осью. **332.** $x^2+(y-2)^2=4$. Указание. Так как окружность касается оси абсцисс в начале координат, то ось ординат служит её диаметром. **333.** $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ и $(x+2)^2+(y+3)^2=4$. **334.** $(x-17)^2+(y-17)^2=17^2$ и $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. Указание. Если окружность касается обеих осей координат, то центр её лежит на биссектрисе координатного угла, и мы имеем $a=b$, кроме того, радиус окружности равен расстоянию центра от касательной, т. е. от оси $x$ или от оси $y$; следовательно, $r=a=b$, и в данном случае уравнение окружности примет вид: $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$. Таким образом, искомое уравнение содержит только один неизвестный параметр $a$, который мы определим из условия, что окружность проходит через точку $A(+2; +9)$. **335.** $(x-5)^2+\left(y\pm 5\sqrt{2}\right)^2=50$. Указание. Если окружность касается оси $x$, то абсцисса центра равна абсциссе точки прикосновения, а ордината центра по абсолютной своей величине равна радиусу; поэтому уравнение искомой окружности имеет вид: $(x-5)^2+(y\pm r)^2=r^2$. Точки пересечения этой окружности с осью ординат ($x=0$) мы получим из уравнения: $y^2\pm 2ry+25=0$. По условию задачи разность корней этого квадратного уравнения равна 10, т. е. $y_1-y_2=10$ или $2\sqrt{r^2-25}=10$; отсюда определяем единственный неизвестный параметр $r$ уравнения. **336.** $a=+30$; $b=+48$ или $a=-30$; $b=+48$. **337.** $(x-6)^2+(y-7)^2=36$. Указание. Радиус окружности равен расстоянию её центра от касательной. **338.** a) (+3; —1) и (+2; —2); b) прямая касается окружности в точке (—4; +6); c) действительных точек пересечения нет. **339.** Прямые a) и b) пересекают окружность; прямая c) касается и d) проходит вне окружности. Указание. О расположении прямых относительно окружности мы судим по расстоянию этих прямых от центра. В зависимости от того, будет ли это расстояние меньше, равно или больше радиуса — прямая пересекает, касается или проходит вне окружности. **340.** $4x-2y-9=0$. Указание. Радиус, проходящий через данную точку, перпендикулярен к искомой хорде. **341.** $x-2y-5=0$. **342.** $4x+3y-35=0$. **343.** $2x-3y+9=0$. Указание. Можно привести данное уравнение окружности к нормальному виду и воспользоваться общим уравнением касательной. **344.** $y=0$ и $20x-21y=0$. **345.** a) $y-7x=0$ и $x-y=0$; b) $4x-3y-25=0$ и $3x+4y-25=0$ (см. задачу 344). **346.** $2x-y\pm 5=0$. **347.** $12x\pm 35y=444$. Указание. Уравнение данной окружности известно: $x^2+y^2=144$. Определив координаты точки $A$ (черт. 121) из прямоугольного треугольника $OMA$, сведём задачу к проведению касательных к данной окружности из данной точки. **348.** $(x-{}^7/_2)^2+(y-{}^7/_2)^2={}^{25}/_2$ и $(x-{}^{13}/_{18})^2+(y-{}^{13}/_{18})^2={}^{25}/_{162}$. **349.** (+5; —6). Указание. Координаты точки прикосновения можно было бы получить, решив совместно уравнение данной окружности и данной прямой; но можно их определить иначе, пользуясь общим уравнением касательной к данной окружности: $(x-1)(x_1-1)+(y+3)(y_1+3)=25$. Так как это уравнение и данное уравнение $4x-3y-38=0$ изображают одну и ту же прямую, то коэффициенты этих двух уравнений должны быть пропорциональны: $\frac{x_1-1}{4}=$ $=\frac{y_1+3}{-3}=\frac{x_1-3y_1+15}{38}$. Из этих двух уравнений первой степени определяем координаты точки прикосновения $x_1$ и $y_1$. **350.** $3x-4y-$ $-2=0$. Указание. Ввиду прекращения действия силы точка $M$ должна продолжать свой путь прямолинейно в том направлении, которое она имела в момент прекращения силы. Направление дви-



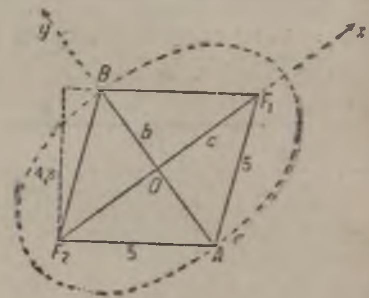

Черт. 121.

жения точки по кривой определяется в любой момент направлением касательной к ней. Следовательно, точка $M$ должна продолжать движение по касательной к окружности в точке $A$. **351.** $(-0,4;\ +8,8)$, если точка $M$ двигалась по окружности против часовой стрелки; $(+6;\ +4)$, если точка $M$ двигалась в обратном направлении. Указание. Задача сводится к нахождению точек прикосновения тех касательных к окружности, которые проходят через точку $(-2;\ 0)$. (См. задачу 350.) **352.** $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Указание. Искомый угол есть угол между двумя касательными, проведёнными из данной точки к данной окружности. **352*.** $x^2+y^2=2r^2$. **353.** $5x+2y-7=0$. **354.** $x+y-4=0$. **355.** $x^2+y^2-10x-8y+37=0$. **356.** $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ и $(x-2,8)^2+(y-0,4)^2=1$. Указание. Точка $M$ лежит вне данной окружности, и, судя по величине радиусов данной и искомой окружностей, эти две окружности могут соприкасаться только внешним образом. **357.** $\varphi=\frac{\pi}{2}$. **358.** $(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2=r_1^2+r_2^2$. Указание. Линия центров и радиусы, направленные в точку пересечения двух ортогональных окружностей, образуют прямоугольный треугольник. **359.** $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ и $\left(x-\frac{41}{13}\right)^2+\left(y-\frac{3}{13}\right)^2=9$. **360.** $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$ и $(-7;\ +1)$. **361.** Внешние касательные: $y-2=0$ и $4x-3y-10=0$; внутренние касательные: $x-1=0$ и $3x+4y-$ $-5=0$. **362.** $t=4$. **363.** $t_1=3$; $t_2=0$ (точка $M$ лежит на окружности);

$t_3 = i\sqrt{6}$ (точка $M_3$ лежит внутри окружности); $t_4 = \sqrt{10}$. **364.** $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$, т. е. окружность концентрическая с данной, имеющая радиус $R = \sqrt{r^2 + 4^2}$. **365.** a) $x^2 + y^2 + 8x - 26y = 0$; b) $x^2 + y^2 + 16x - 42y = 0$ — окружности, проходящие через точки пересечения данных окружностей; c) $x - 2y = 0$ — прямая, так называемая радикальная ось двух данных окружностей. **367.** a) $2(a_1 - a)x + 2(b_1 - b)y + a^2 - a_1^2 + b^2 - b_1^2 - r^2 + r_1^2 = 0$; b) $2x + 7y + 8 = 0$; c) $4x + 4y + 5 = 0$. Указание. Если уравнения двух окружностей



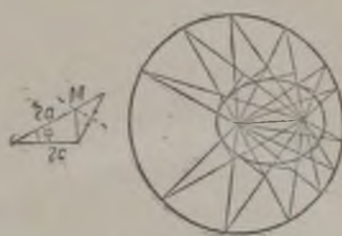

Черт. 122.




Черт. 123.

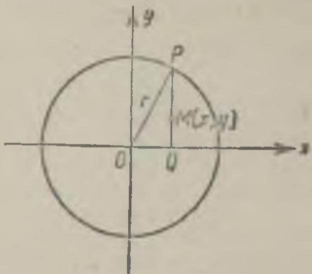
$U = 0$ и $U_1 = 0$ даны в такой форме, что коэффициенты при квадратах координат равны единицам, то уравнение радикальной оси этих окружностей будет $U_1 - U = 0$. **369.** $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 50$. **370.** $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 13$. Указание. Центр искомой окружности лежит на радикальной оси данных двух окружностей, а радиус равен по длине касательной, которую можно провести из центра к одной из данных окружностей. **371.** $(-2; -2)$. **372.** $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 6$. Указание. Центр искомой окружности совпадает с радикальным центром трёх данных окружностей, а радиус равен касательной, проведённой из радикального центра к одной из этих окружностей. **373.** Окружность, касающаяся внутренним образом данной окружности в точке $P$ и имеющая радиус $R = \frac{a\lambda}{1+\lambda}$. **374.** Окружность, радиус которой равен $\frac{a}{2}$; центр её находится посредине между точкой $P$ и центром данной окружности. Точка $P$ служит центром подобия обеих окружностей.
**375.** a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; c) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; d) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; e) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. **376.** $2a = 26$; $2b = 10$; $e = \frac{12}{13}$; $F_1(+12; 0)$; $F_2(-12; 0)$.
**377.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. Указание. Данные расстояния могут быть выражены через параметры эллипса следующим образом: $a + c$ и $a - c$.

**378.** $c^2 = a^2 - b^2$ (черт. 122). **379.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ или $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, в зависимости от того, проходит ли эллипс через концы большой или малой диагонали ромба. Указание. Для определения параметров эллипса мы можем воспользоваться следующими соотношениями (черт. 123): $b^2 + c^2 = 25$ и $2bc = 5 \cdot 4{,}8$ (площадь ромба). **380.** Эллипс с полуосями 13 *см* и 5 *см*. Вершины при основании треугольника служат фокусами этого эллипса. **381.** Указание. Мы пользуемся построением треугольника по стороне ($2c$), прилежащему углу ($\varphi$) и сумме двух других сторон ($2a$). Если угол $\varphi$ будет меняться, вершина $M$ опишет эллипс. Повторяя это построение при различных значениях угла $\varphi$, мы можем получить сколько угодно точек эллипса (черт. 124).

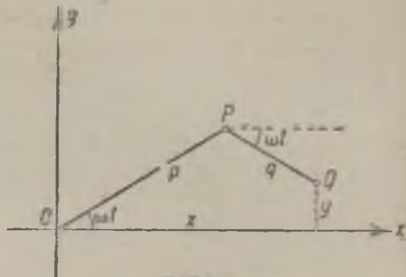


Черт. 124.

**382.** $cx \pm a^2 = 0$. **383.** $x = \pm 9$. **384.** $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$. **385.** a) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $e = \frac{\sqrt{10}}{5}$; c) $e = {}^1/_2$. **386.** $e \approx 0{,}08$. **387.** $(\pm 5; \pm 2)$. **388.** $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1$. Указание. Определяем параметры эллипса $a^2$ и $b^2$ из того условия, что координаты данных точек должны удовлетворять его уравнению. **390.** Точки $A$ и $E$ лежат на эллипсе; $B$ и $G$ — внутри эллипса; точки $C$ и $D$ — вне эллипса. Указание. См. задачу 389. **391.** $A(+6;\ 0)$, $B\left(+\frac{6}{7}; +\frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$; $C\left(+\frac{6}{7}; -\frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$. Указание. Искомый треугольник симметричен относительно большой оси. Сторона треугольника равна удвоенной ординате вершины $B$. **392.** $M_1\left(-\frac{15}{2}; +\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$ и $M_2\left(-\frac{15}{2}; -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$. **393.** Вершины большой оси. **394.** $d = 4^1/_3$. Указание. Определяем прежде всего фокальные радиусы-векторы данной точки; сумма их даст большую ось эллипса; далее определяем эксцентриситет и искомое расстояние $d_1 = \frac{r_1}{e}$. **395.** $M_1(+3; -3)$ и $M_2\left(+\frac{69}{13}; +\frac{21}{13}\right)$. **396.** $M_1M_2 = \frac{2b^2}{a}$. **397.** $M_1M_2 = \frac{24\sqrt{2}}{5}$. **398.** $S = 68^4/_7$ кв. ед. Указание. Стороны всякого прямоугольника, вписанного в эллипс, должны быть параллельны его осям. **399.** $a_4 = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **400.** $4x + 9y - 13 = 0$. Указание. Угловой коэффициент хорды, проходящей через данную точку $[y - 1 = k(x - 1)]$, надо выбрать так, чтобы при совместном решении её уравнения с уравнением эллипса полусумма корней полученного квадратного уравнения была равна соответствующей координате данной точки $\left(\frac{x_1+x_2}{2}=1 \text{ или } \frac{y_1+y_2}{2}=1\right)$, в зависимости от того, которую из координат мы будем исключать при решении системы уравнений. **401.** $x-2y-8=0$. **402.** $y=3$ и $12x+7y+51=0$. Решение. Способ 1. Можно взять уравнение любой прямой, проходящей через данную точку $[y-3=k(x+6)]$, и подобрать угловой коэффициент так, чтобы при совместном решении уравнения этой прямой и уравнения эллипса получить равные корни (приравнять подкоренное количество нулю). Способ 2. Можно воспользоваться уравнением касательной к эллипсу $\left(\frac{xx_1}{15}+\frac{yy_1}{9}=1\right)$ и определить координаты точки прикосновения $(x_1, y_1)$ из двух условий: во-первых, касательная проходит через точку $A(-6; +3)$; следовательно, мы имеем $\frac{-6x_1}{15}+\frac{3y_1}{9}=1$ и, во-вторых, точка прикосновения лежит на данном эллипсе, т. е. $\frac{x_1^2}{15}+\frac{y_1^2}{9}=1$. **403.** $2x-y\pm 12=0$. Указание. Уравнение всякой прямой, параллельной данной, имеет вид: $y=2x+b$. Нужно только подобрать параметр $b$ из условия касания. (См. первый способ решения задачи 402.) Можно воспользоваться уравнением касательной к данному эллипсу $\left(\frac{xx_1}{30}+\frac{yy_1}{24}=1\right)$, определив координаты точки прикосновения из условия, что угловой коэффициент должен равняться 2 $\left(\text{т. е.} -\frac{4x_1}{5y_1}=2\right)$ и что точка прикосновения лежит на эллипсе $\left(\frac{x_1^2}{30}+\frac{y_1^2}{24}=1\right)$. (См. второй способ решения задачи 402.) **404.** $12x-13y\pm 169=0$. (См. указание к задаче 403.) **405.** $(+5; -4)$. Указание. Уравнение касательной дано: $4x-5y-40=0$; с другой стороны, всякая касательная к данному эллипсу изображается уравнением $16xx_1+25yy_1-800=0$. Если эти два уравнения изображают одну и ту же прямую, то коэффициенты их пропорциональны, т. е. $\frac{16x_1}{4}=-\frac{25y_1}{5}=\frac{800}{40}$. Отсюда определяем точки прикосновения. Иначе можно было бы их найти, решив совместно уравнение эллипса и его касательной. **406.** Четыре касательные удовлетворяют условию задачи: $\pm 3x\pm 4y+15=0$. **407.** Указание. Концы одного и того же диаметра симметричны относительно начала координат, т. е. соответственные координаты их равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки. **408.** $x-y\pm 3=0$ и $x+y\pm 3=0$. Указание. Вершины всякого описанного около эллипса ромба (в частности, и квадрата) должны лежать на осях эллипса. Кроме того, стороны квадрата должны отсекать на осях равные отрезки. **409.** $x\pm 5=0$. **411.** $A^2a^2+B^2b^2=C^2$. **412.** Задача имеет два решения: 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; $(+4;\ +{}^9/_5)$; 2) $\frac{16x^2}{225}+\frac{y^2}{16}=1$; $(+{}^9/_4;\ +{}^{16}/_5)$. Указание. Для определения параметров эллипса удобно воспользоваться условием касания, выведенным в задаче 411. **413.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$. (См. задачу 411.) **414.** $x+y\pm3=0$; $x-y\pm3=0$. Указание. Удобно применить признак соприкосновения прямой и эллипса (см. задачу 411). **415.** $2x+y\pm5=0$; $2x-y\pm5=0$. **418.** Окружность $x^2+y^2=a^2+b^2$. Решение. Пусть $M(X, Y)$ будет одна из искомых точек, тогда обе касательные, проведённые к эллипсу из этой точки, должны быть перпендикулярны между собой. Уравнение всякой прямой, проходящей через точку $M$, будет: $y-Y=$ $=k(x-X)$ или $kx-y+(Y-kX)=0$. Условие того, что эта прямая касается эллипса, примет вид: $k^2a^2+b^2=(Y-kX)^2$, или после преобразования: $k^2(a^2-X^2)+2XYk+(b^2-Y^2)=0$. Это квадратное уравнение определяет угловые коэффициенты обеих касательных, проходящих через точку $M$, но по условию перпендикулярности этих касательных произведение корней указанного квадратного уравнения должно равняться отрицательной единице: $k_1\cdot k_2=-1$ или $\frac{b^2-Y^2}{a^2-X^2}=-1$ (произведение корней квадратного уравнения равно свободному члену, делённому на коэффициент при квадрате неизвестного). Мы получили уравнение, связывающее координаты искомых точек, т. е. уравнение искомого геометрического места. После элементарных преобразований получим окончательно: $X^2+Y^2=a^2+b^2$. **420.** $\frac{(x-x')^2}{a^2}+\frac{(y-y')^2}{b^2}=1$. **421.** $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ или $\frac{(x-5)^2}{25}+$ $+\frac{y^2}{({}^{25}/_3)^2}=1$, в зависимости от того, совпадает ли с осью абсцисс большая или малая ось эллипса. **422.** $\frac{(x-7)^2}{49}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$. **423.** $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{{}^{75}/_7}=1$. **424.** $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r\lambda}{1+\lambda}\right)^2}=1$. Указание. По условию $\frac{QM}{MP}=\lambda$ (черт. 125, стр. 292) Определяем ординату $y$ точки $M$, делящей отрезок $QP$ в отношении $\lambda$; ордината начальной точки $Q$ равна нулю, ординату же конечной точки $P$ определяем из уравнения окружности: $y_2=\sqrt{r^2-x^2}$; следовательно, $y=\frac{\lambda\sqrt{r^2-x^2}}{1+\lambda}$. Преобразовав это уравнение, получим окончательное уравнение эллипса, указанное в ответе. **425.** $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2}=1$. **426.** $\frac{x^2}{(p+q)^2}+$ $+\frac{y^2}{(p-q)^2}=1$, т. е. эллипс с полуосями $p+q$ и $p-q$. Если $p>q$, точка $Q$ описывает эллипс, двигаясь против часовой стрелки; если $p<q$, точка $Q$ перемещается по эллипсу в обратном направлении. Если $p=q$, то точка $Q$ при полном обороте стержня $OP$ опишет дважды отрезок оси $x$ длиною $2(p+q)$. Указание. Определим



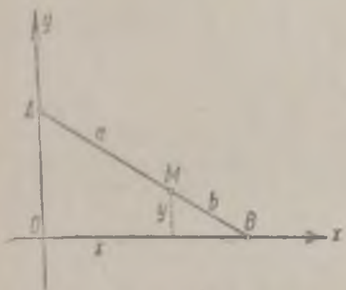

Черт. 125.



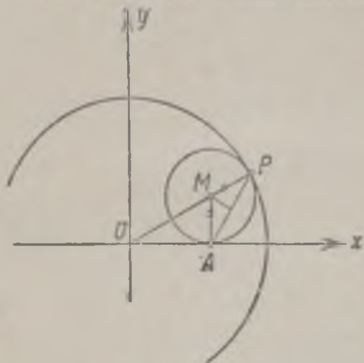

Черт. 126.

координаты точки $Q$ по прошествии $t''$ от начала движения. В это время стержень $p$ (черт. 126) будет наклонён к оси абсцисс под углом $\omega t$, а стержень $q$ под углом $-\omega t$. Координаты точки $Q$ определятся как проекции ломаной $OPQ$ на оси координат. Искомую траекторию мы получим, исключив $t$ из двух уравнений, определяющих координаты точки $Q$. **427.** Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ или окружность $x^2+y^2=a^2$, если точка $M$ совпадает с серединой отрезка $AB$. Указание. Стороны прямого угла принимаем за оси координат. Параметрами кривой будут служить расстояния точки $M$ от концов отрезка $AB$ (черт. 127), а именно: $AM=a$ и $BM=b$. **428.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=$ $=1$, если через $a$ и $b$ обозначены отрезки скользящего стержня от точки $M$ до точек пересечения с осью ординат и осью абсцисс. **429.** a) $l=5$; $AM=3$; b) $l=5$; $AM=4$; c) $l=10$; $AM=5$. **430.** Эллипс с центром в точке $(0;\ +1)$ и с полуосями $a=\sqrt{14}$ и $b=\sqrt{7}$, направленными параллельно осям координат. **431.** $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+$ $+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2:\left(\frac{b}{2}\right)^2=1$. **432.** $\frac{(x-{}^3/_2)^2}{({}^5/_2)^2}+\frac{y^2}{4}=1$. Указание. Точка $M$ (черт. 128) описывает эллипс, фокусами которого служат центр круга и точка $A(+3;\ 0)$. **433.** a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$; c) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$; d) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$. **434.** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. **435.** Указание черт. 129, стр. 294). Пользуемся построением треугольника по основанию $2c$, углу при нём $\varphi$ и разности двух других сторон $2a$. Повторяя это построение при различных значениях угла $\varphi$, получим точки гиперболы. Левую ветвь гиперболы мы получим, приняв правый фокус за вершину угла, прилежащего к большой стороне треугольника.

**436.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **437.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$. **438.** Указание (черт. 130, стр. 294). $c$ есть гипотенуза прямоугольного треугольника, катеты которого равны $a$ и $b$.

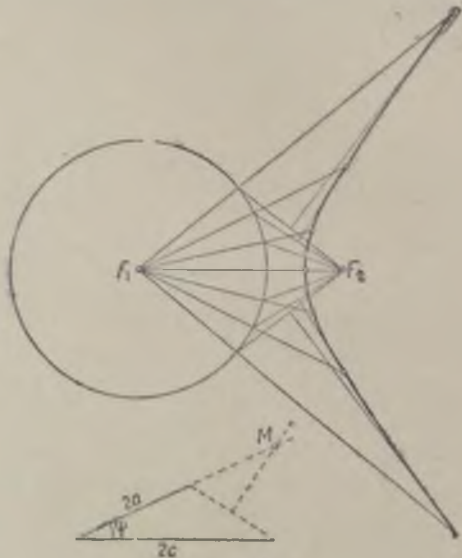


Черт. 127.

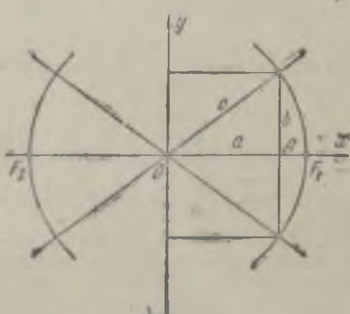


Черт. 128.

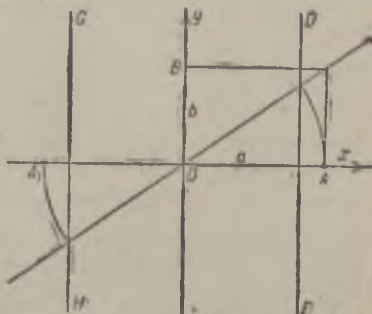
**439.** a) $F_1(+5;\ 0)$, $F_2(-5;\ 0)$; b) $e=\frac{5}{3}$; c) $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm\frac{9}{5}$; d) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$; $e'=\frac{5}{4}$. **439*.** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$. **440.** $DE$ и $GH$ суть искомые директрисы гиперболы (черт. 131, стр. 294). **440*.** $\delta=b$. **441.** a) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$; b) $a=6$, $b=6$; c) $a=\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{5}$; d) $a=\frac{3\sqrt{19}}{5}$, $b=\sqrt{19}$. **442.** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ и $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$. **442*.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ или $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{\frac{256}{9}}=1$. **443.** a) $\alpha=120^\circ$, b) $\alpha=90^\circ$. **444.** a) $e=\frac{2}{\sqrt{3}}$, b) $e=\sqrt{2}$; c) $e=\sqrt{3}$. **445.** $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$. **446.** $r_1=9$, $r_2=19$, $\operatorname{tg}\vartheta=\frac{28\sqrt{2}}{41}\approx 0{,}97$. **447.** a) $x=\pm\frac{4}{5}\sqrt{34}$, $y=\pm 1{,}8$ (4 точки); b) $x=+9{,}6$, $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}$ (2 точки). Указание. Если фокальные радиусы-векторы какой-нибудь точки гиперболы перпендикулярны друг к другу, то они вместе с отрезком оси, заключённым между фокусами, образуют прямоугольный треугольник и связаны соотношением $r_1^2+r_2^2=4c^2$. **448.** $e\leqslant 1+\sqrt{2}$. Решение. Если на гиперболе существует точка, для которой $r_1=d_2$, то для неё же, вследствие равенства $\frac{r_2}{d_2}=e$, будем иметь $\frac{r_2}{r_1}=e$ или $\frac{ex+a}{ex-a}=e$; отсюда определяем абсциссу искомой точки $x=\frac{a(1+e)}{e^2-e}$. Но все действительные точки гиперболы обладают тем свойством, что их абсциссы $x \geqslant a$;




Черт. 129.




Черт. 130.




Черт. 131.

следовательно, мы должны иметь: $\frac{1+e}{e^2-e} \geqslant 1$. Решая это неравенство и принимая во внимание, что эксцентриситет гиперболы $e > 1$, получим

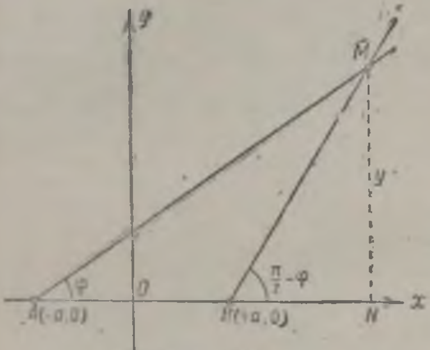
$e \leq 1+\sqrt{2}$. **449.** $\delta_1 \cdot \delta_2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$. Указание. Это свойство вполне характеризует гиперболу, т. е. гиперболу можно рассматривать как геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух прямых есть величина постоянная, и прямые эти служат асимптотами гиперболы. **450.** $\left(\pm\frac{14\sqrt{3}}{3}; \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ — четыре точки. **451.** a) $(+10, +2)$ и $(-10; -2)$; b) прямая касается гиперболы в точке $(+10; -2)$; c) действительных точек пересечения нет; d) $\left(-\frac{15\sqrt{10}}{4}; -\frac{9}{2}\right)$ и второй точки пересечения нет, прямая параллельна одной из асимптот. **452.** $x-2y-12=0$ и $x+2y+8=0$. **452*.** $9x \pm 4\sqrt{34}y=0$. Указание. Определяем координаты концов искомого диаметра из двух условий: эти точки лежат на гиперболе и находятся на расстоянии $20:2=10$ от центра гиперболы. **453.** $3x-4y-5=0$. Указание. См. задачу 400. **453*.** $y=\frac{b^2}{a^2k}\cdot x$, где $k$ — угловой коэффициент параллельных хорд. **454*.** Указание. См. задачи 453* и 454. **455.** $\left(\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}; \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$. Задача возможна, когда $b>a$. **456.** $x+y=1$. **457.** 1) $3x+2y=6$ и $3x-2y=6$. 2) Только одна касательная $3x+2y+6=0$, так как точка $(-4; +3)$ лежит на гиперболе. 3) Действительных касательных провести к гиперболе через точку $(+5; -1)$ нельзя, так как эта точка лежит внутри гиперболы. **458.** a) $x+y+3=0$ и $x+y-3=0$; b) действительных касательных в этом направлении нет; c) $2x+y+\sqrt{54}=0$ и $2x+y-\sqrt{54}=0$. **459.** $|k| \geq \frac{b}{a}$. **460.** $\left(+\frac{8\sqrt{5}}{5}; +\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$ и $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}; -\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$. Указание. Угловой коэффициент всякой касательной к гиперболе имеет вид: $k=\frac{b^2x'}{a^2y'}$. В данном случае мы имеем $\frac{9x'}{8y'}=\sqrt{3}$. Из этого уравнения и из уравнения гиперболы определяем координаты точки прикосновения. **461.** $8x+\sqrt{11}y-20=0$ и $8x-\sqrt{11}y-20=0$. **462.** $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$. **463.** $A^2a^2-B^2b^2=C^2$. **464.** $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. Указание. Неизвестные параметры гиперболы $a$ и $b$ проще всего определить, воспользовавшись данным угловым коэффициентом асимптоты: $b:a={}^1/_2$ и условием соприкосновения гиперболы и данной прямой: $25a^2-36b^2=64$. (См. задачу 463.) **465.** $x^2+y^2=a^2-b^2$. В случае равносторонней гиперболы $a=b$ и искомое геометрическое место точек сводится к одной лишь точке—центру гиперболы. Если $a<b$, то у гиперболы нет и одной пары перпендикулярных друг к другу касательных. (См. задачи 418 и 459.) **466.** $\pm cx \pm ay=a^2$; $\left(\pm c; \pm\frac{b^2}{a}\right)$. **467.** Указание. Со-

фокусные кривые могут быть представлены следующими двумя уравнениями: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$ и $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2-c^2}=1$. **468.** $\hat{c}_1\cdot\hat{c}_2=-b^2$. Указание. Знак минус у искомого произведения объясняется тем, что фокусы гиперболы находятся по разные стороны от любой её касательной. **470.** $S=\frac{c^2\sin\varphi}{2}$; $\varphi$ — угол между асимптотами. **470*.** $(1+\lambda)^2\cdot x\cdot y=2\lambda S$ уравнение гиперболы, асимптоты которой совпадают с осями координат. **471.** $\frac{(x-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$. **472.**

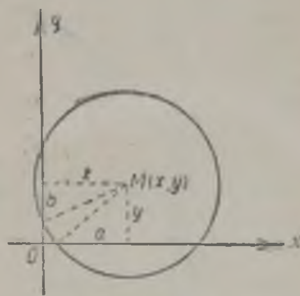
a) $\frac{(x-1)^2}{5^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1$; $x_1=+1$; $y_1=-2$; $a=5$ и $b=3$;

b) $\frac{(x+1)^2}{6}-\frac{(y+1)^2}{5}=1$; $x_1=-1$; $y_1=-1$; $a=\sqrt{6}$ и $b=\sqrt{5}$;

c) $\frac{(x+3)^2}{4}-y^2=1$; $x_1=-3$; $y_1=0$; $a=2$ и $b=1$. Указание. Члены, содержащие $x$, и члены, содержащие $y$, дополняем до полных квадратов и, перенеся свободный член направо, делим на него все члены уравнения. **473.** $\frac{(x+15)^2}{9^2}-\frac{y^2}{12^2}=1$. Указание. В данном случае удобно пользоваться длиной фокальной хорды, перпендикулярной к действительной оси: $l=\frac{2b^2}{a}$. **474.** $\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$. **475.** $\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$. **476.** Равносторонняя гипербола, вершины которой совпадают с точками $A$ и $B$. Решение. Определяем ординату образующей точки $M$ из двух треугольников $AMN$ и $BMN$ (черт. 132): $y=(x+a)\operatorname{tg}\varphi$ и $y=(x-a)\operatorname{ctg}\varphi$. Из этих двух уравнений исключаем параметр $\varphi$ (проще всего перемножить оба уравнения), и тогда получим уравнение искомого геометрического места: $x^2-y^2=a^2$. **477.** Директриса гиперболы, соответствующая тому фокусу, из которого проведены перпендикуляры. **478.** Равносторонняя гипербола $x^2-y^2=a^2-b^2$ (черт. 133). **479.** Указание. Центр окружности и данная внешняя точка служат фокусами гиперболы. Радиус данной окружности равен действительной оси гиперболы. (См. задачу 432.) **480.** a) $y^2=12x$; b) $y^2=10x-25$; c) $y^2=16x$; d) $x^2=8y$; e) $x^2=-18y$. **481.** $A\ (+18;\ +12)$ и $B\ (+18;\ -12)$. **482.** $OM=10$. **483.** Указание. Мы ищем точки параболы на прямых, параллельных её оси (черт. 134). **484.** Парабола $y^2=\frac{a^2}{b}x$. **485.** Для указанного построения можно воспользоваться различными прямоугольными треугольниками, например равнобедренным с катетами

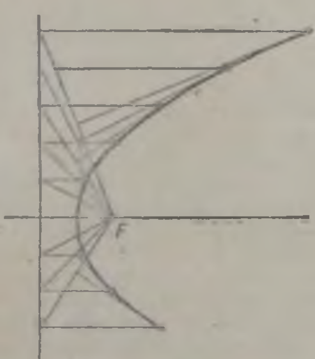



Черт. 132.

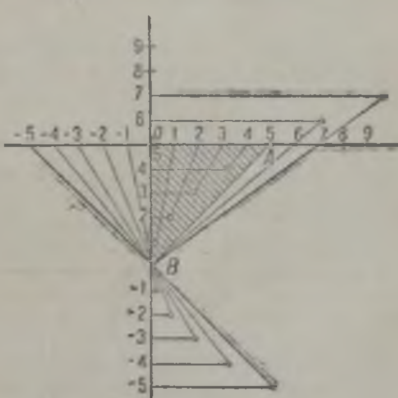



Черт. 133.

$a=b=5$ или треугольником с катетами $a=10$ и $b=20$; $a=15$ и $b=45$ и т. д., лишь бы только $\frac{a^2}{b}=5$. Возьмём первый из этих

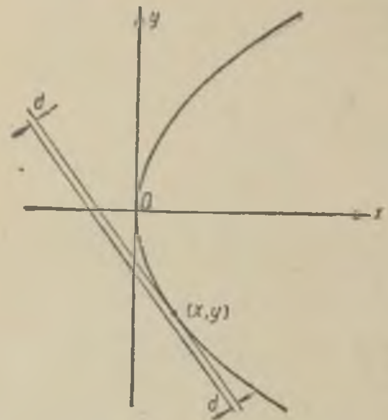



Черт. 134.

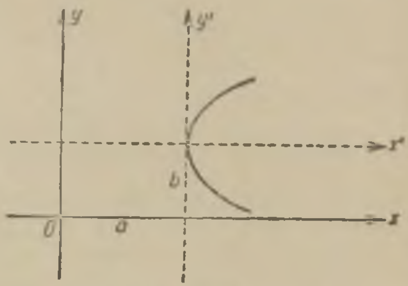



Черт. 135.

треугольников; тогда для получения точек параболы вне треугольника продолжаем оба катета в обе стороны и продолжаем наносить на них равные деления; точки деления нумеруем, как указано на черт. 135. **486.** Если точка $(x_1, y_1)$ принадлежит внешней области, то мы имеем $y_1^2 - 2px_1 > 0$. Если точка $(x_1, y_1)$ принадлежит внутренней области, то $y_1^2 - 2px_1 < 0$. Если точка $(x_1, y_1)$ лежит на параболе, то её координаты удовлетворяют уравнению $y_1^2 - 2px_1 = 0$. **487.** $a_3 = 4p\sqrt{3}$. Указание. Треугольник расположен симметрично относительно оси параболы; одна из вершин его совпадает с вершиной параболы, а противолежащая сторона пер-



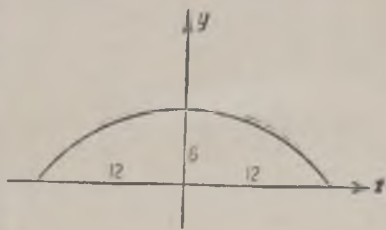

Черт. 136.




Черт. 137.

пендикулярна к оси параболы. **488.** a) $(+2;\ -6)$ и $(+{}^1/_2;\ +3)$; b) прямая касается параболы в точке $(+{}^2/_9;\ +2)$; c) действительных точек пересечения нет; d) $(+{}^1/_2;\ +3)$; прямая параллельна оси симметрии. **489.** $(+{}^5/_4;\ +\sqrt{15})$, $(+{}^5/_4;\ -\sqrt{15})$, и две мнимые точки пересечения. **490.** $x - 2 = 0$. **491.** $l = 2p$. **491*.** $x - 10 = 0$; $2x - y\sqrt{5} = 0$; $2x + y\sqrt{5} = 0$. **492.** $2x - y - 3 = 0$. Указание. См. задачу 400. **493.** $x + y + 2 = 0$ и $2x + 5y + 25 = 0$. **494.** $(+9;\ -6)$. Указание. Определяем координаты точки прикосновения из условия пропорциональности коэффициентов в уравнении данной прямой $x + 3y + 9 = 0$ и в уравнении касательной к параболе $yy_1 = 2(x + x_1)$ или $2x - y_1 y + 2x_1 = 0$. **496.** a) $x + y + 3 = 0$ в точке $(+3;\ -6)$ и $x - y + 3 = 0$ в точке $(+3;\ +6)$; b) $y = 3x + 1$; c) $x - 2y + 12 = 0$; d) $3x + y + 1 = 0$. **497.** $p = 2bk$. **498.** $|d| = 2$. Указание. Если прямая не пересекает параболу, то кратчайшее расстояние параболы от прямой будет расстояние от прямой той точки параболы, в которой касательная параллельна данной прямой (черт. 136). **499.** $p = {}^5/_2$. Указание. Выражаем координаты точки прикосновения через неизвестный параметр $p$ (см. задачу 494) и вставляем их в уравнение параболы. Можно также воспользоваться результатом задачи 497. **500.** $x + 3y + 15 = 0$ и $x - 3y + 15 = 0$. Указание. Значения параметров искомой прямой удобно вычисляются из условия соприкосновения прямой и кривой. (См. задачи 497 и 411.) **500*.** $S_1 : S_2 = 2$.

Площадь вписанного в параболу треугольника вдвое больше площади соответствующего описанного треугольника. **503.** Директриса параболы $x = -\frac{p}{2}$. **504.** a) $(y-b)^2 = 2p(x-a)$; b) $(y-b)^2 = -2p(x-a)$; c) $(x-a)^2 = 2p(y-b)$; d) $(x-a)^2 = -2p(y-b)$. Решение. a) Переносим начало координат в точку $(a, b)$, не меняя направления осей (черт. 137). Тогда в новой системе координат уравнение параболы будет: $y'^2 = 2px'$. Переходим обратно к прежней системе, по формулам преобразования координат: $x' = x - a$, $y' = y - b$. Уравнение параболы примет вид: $(y-b)^2 = 2p(x-a)$. Это и есть искомое уравнение. **505.** a) $A = 0$ и $B = 0$; b) $C = 0$ и $B = 0$. **506.** a) $(-2; +1)$; $p = 5$; ось параллельна оси $x$; b) $(0; -7)$; $p = 3$; ось параллельна оси $x$; c) $(+2; 0)$; $p = -4$; направление оси совпадает с отрицательным направлением оси $x$; d) $(+3; +5)$; $p = 2$; ось параболы параллельна оси $y$; e) $\left(-\frac{B}{2A}; \frac{4AC - B^2}{4A}\right)$; $p = \frac{1}{2A}$; ось параболы параллельна оси $y$; f) $(+4; -1)$; $p = {}^1/_2$; ось параллельна оси $y$; g) $(-3; -9)$; $p = {}^1/_2$; ось параллельна оси $y$. Указание. Предварительно преобразовать данные уравнения и привести их к тому типу уравнений, который разобран в задаче 504. **507.** Указание. Приняв общую ось парабол за ось абсцисс и поместив начало координат в общем фокусе, получим для рассматриваемых парабол следующие уравнения: $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$ и $y^2 = -2q\left(x - \frac{q}{2}\right)$. Далее определяем точки пересечения этих парабол, касательные в найденных точках, и убеждаемся в перпендикулярности касательных, проведённых к обеим параболам в общих их точках.




Черт. 138.

**508.** $\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Сравнить с уравнением прямой относительно отрезков. Указание. Так как ось параболы совпадает с осью $x$ и вершина расположена в точке $(+a; 0)$, то уравнение параболы примет вид: $y^2 = 2p(x-a)$ (см. задачу 504). Для определения параметра $p$ воспользуемся тем, что парабола проходит через точки $(0; \pm b)$. **509.** $-\frac{x}{5} + \frac{y^2}{36} = 1$. (См. задачу 508.) **510.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} = 1$. **511.** $p = -12$. Указание (черт. 138). Воспользуемся уравнением параболы относительно отрезков, отсекаемых ею на осях координат (см. задачу 510). **512.** $|p| = 2^2/_3$. **513.** $h = 5$ *м*. **514.** $y^2 = \frac{p}{2}x$.

**515.** Парабола с вершиной в фокусе данной параболы и с параметром вдвое меньшим. **516.** Прямая вращается около точки $(2p;\ 0)$. **517** Парабола, имеющая данную точку фокусом и данную прямую — директрисою. **518.** Две параболы: $y^2 = \pm 2x + 1$. **519.** a) $\rho = a$; b) $\rho = 2a \cdot \cos\varphi$; c) $\rho^2 - 2\rho_1\rho\cos(\varphi - \varphi_1) = a^2 - \rho_1^2$. **520.** $\rho^2 = \dfrac{b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$. **521.** $\varphi = \arccos\left(\pm\dfrac{4}{5}\right)$. **522.** a) $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$; b) $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$, где величина $p = \dfrac{b^2}{a}$ называется параметром эллипса. **523.** $a = 2\sqrt{2}$; $b = \sqrt{6}$; $2c = 2\sqrt{2}$. **524.** $\rho^2 = \dfrac{-b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$.
**525.** $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, если через $\theta$ обозначен один из тех углов, внутри которых расположена гипербола. **526.** $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$, где $p = \dfrac{b^2}{a}$.
**527.** Уравнения асимптот: $\rho = \dfrac{2}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$ и $\rho = \dfrac{2}{\sin\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right)}$; уравнения директрис: $\rho = -\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}$ и $\rho = -\dfrac{3\sqrt{2}}{\cos\varphi}$. **528.** $\rho = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **529.** $M(3;\ \arccos{}^1/_3)$ — две точки, симметричные относительно полярной оси. **530.** $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$. **531.** a) $\left(\dfrac{p}{2};\ \pi\right)$ — вершина параболы; b) две точки: $\left(p;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\left(p;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$. **532.** $|\delta_1\delta_2| = p^2$.
**533.** a) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; b) $y^2 = \dfrac{2}{3}x$; c) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; d) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
**534.** $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$. Указание. Берём общее уравнение кривой второго порядка: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$. Если оно изображает искомую кривую, то ему должны удовлетворять координаты данных точек. Вставляя в общее уравнение координаты каждой из данных точек, получим пять условий, связывающих коэффициенты $a_{ik}$; из этих соотношений определяем отношения пяти коэффициентов к шестому и вставляем их в общее уравнение, предварительно разделённое на этот шестой коэффициент. **535.** $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y = 0$.
**536.** Условиям задачи удовлетворяют две кривые параболического типа: $x^2 - 8x - y + 15 = 0$ и $9x^2 + 6xy + y^2 - 72x - 24y + 135 = 0$.
**537.** $x^2 - 4xy + 3y^2 - 4y = 0$. **538.** $xy + 15 = 0$. **539.** $x^2 - 8y = 0$.
**540.** 1) $(+7;\ +5)$; 2) $(-1;\ -1)$; 3) $(0;\ +1)$; 4) центра нет; кривая параболического типа; 5) кривая имеет целую линию центров: $x + y + 1 = 0$; 6) $\left(+\dfrac{10}{3};\ +\dfrac{4}{3}\right)$; 7) $\left(+\dfrac{3}{4};\ -\dfrac{5}{4}\right)$; 8) линия

300.

центров: $x+3y+2=0$; 9) центра нет, кривая параболического типа; 10) линия центров: $x-2y+5=0$. **541.** Уравнение представляет центральную кривую, если только $a \neq 9$. Уравнение представляет кривую параболического типа, если $a=9$ и $b \neq 9$. Кривая имеет линию центров: $2x+6y+3=0$, если одновременно $a=9$ и $b=9$. Указание. Задача сводится к исследованию той системы двух уравнений $\left\{\begin{matrix} 2x+6y+3=0 \\ 6x+2ay+b=0 \end{matrix}\right\}$, из которой определяются координаты центра. Ответ зависит от того, будет ли эта система определённая, противоречивая или неопределённая. **542.** Кривые a), b), c) имеют центр в начале координат; кривая d) имеет линию центров: $3x-2y=0$; кривая e) имеет центр в начале координат, если $\delta \neq 0$, и имеет линию центров $a_{11}x+a_{12}y=0$, если $\delta=0$. **543.** $2x^2-6xy+5y^2-11=0$. Указание. Удобно воспользоваться уравнением кривой, отнесённой к центру: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$. Нам надо будет оставить старшие члены без изменения $(2x^2-6xy+5y^2)$, отбросить члены первой степени, а для нахождения свободного члена достаточно вычислить оба дискриминанта: $\Delta=-11$ и $\delta=1$. **544.** a) $7x^2+4xy+4y^2-83=0$; b) $x^2-2xy+4=0$; c) $6x^2-4xy+9y^2-40=0$. **545.** $a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2+a_{33}=0$. Указание. Воспользоваться уравнением кривой, отнесённой к центру (7), и сделать обратный переход к первоначальной системе координат. **546.** $5x^2-5xy+2y^2-5x-2y=0$. **547.** Прямая линия $3x+y=0$. Указание. Составить уравнения для определения координат центра; исключив из них параметр $a$, получим уравнение искомого геометрического места. **548.** $4x^2-8xy-2y^2+9y-4=0$. Указание. Через данные четыре точки проходит бесчисленное множество кривых линий; все они изображаются уравнением:

$$2x^2-4\lambda xy+(4\lambda+1)y^2-4x-(4\lambda+1)y=0,$$

где $\lambda$ — переменный параметр. **549.** a) эллипс ($\Delta \neq 0$; $\delta>0$); b) гипербола ($\Delta \neq 0$; $\delta<0$); c) парабола ($\Delta \neq 0$; $\delta=0$); d) мнимые прямые, пересекающиеся в вещественной точке $(+7;\ +5)$; ($\Delta=0$; $\delta>0$); e) пара действительных пересекающихся прямых ($\Delta=0$; $\delta<0$). **550.** 1) Гипербола ($\Delta=16$; $\delta=-8$); 2) эллипс ($\Delta=-64$; $\delta=8$); 3) пара пересекающихся действительных прямых ($\Delta=0$; $\delta=-1$); 4) пара действительных пересекающихся прямых $\left(\Delta=0;\ \delta=-\frac{81}{4}\right)$; 5) гипербола $\left(\Delta=-\frac{1}{4};\ \delta=-\frac{5}{4}\right)$; 6) эллипс ($\Delta=-13$; $\delta=1$); в случае прямоугольной системы координат это уравнение изображает окружность; 7) парабола ($\Delta=-4a^2$; $\delta=0$); 8) парабола ($\Delta=-1$; $\delta=0$); 9) парабола ($\Delta=-32$; $\delta=0$); 10) пара действительных параллельных прямых ($\Delta=0$; $\delta=0$); прямые не сливаются, потому что существуют миноры дискриминанта, например: $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, которые не равны нулю; 11) пара сливающихся прямых ($\Delta = 0$; $\delta = 0$ и все миноры второго порядка дискриминанта $\Delta$ равны нулю). **551.** a) Две прямые, параллельные осям координат: $x - a = 0$ и $y - b = 0$; b) ось ординат $x = 0$ и прямая $x - 2y + 5 = 0$; c) дважды взятая прямая $x - 2y = 0$; d) дважды взятая прямая $3x + 5y = 0$; e) две параллельные прямые: $2x - 3y + 5 = 0$ и $2x - 3y - 5 = 0$.

**553.** a) $3x - 2y = 0$ и $7x + 5y = 0$;
b) $x + y + 1 + \sqrt{5} = 0$ и $x + y + 1 - \sqrt{5} = 0$;
c) $y - 5x = 0$ и $x + y - 1 = 0$;
d) $2x - y + 3 = 0$; прямые сливаются.

**555.** a) Пара прямых $x - y = 0$ и $2x + 5y = 0$;
b) дважды взятая прямая $x + 2y = 0$;
c) пара прямых $5x - y = 0$ и $2x - y = 0$;
d) пара мнимых прямых, пересекающихся в начале координат.

**556.** a) $a = 0$; b) $a = -\frac{1}{2}$. Указание. Находим значения дискриминантов: $\Delta = -\frac{a}{2} - \frac{1}{4}$ и $\delta = 2a$. В первом случае $\delta = 0$, во втором случае $\Delta = 0$. **557.** a) $a_1 = \frac{5}{3}$ и $a_2 = \frac{5}{4}$; b) $a_1 = 1$ и $a_2 = -1$. **558.** Однородное уравнение второй степени: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$, так как свободный член $\frac{\Delta}{\delta} = 0$. **558*.** $a_{33} = -5$. **559.** $a = 4$; $b = -3$. **560.** Уравнение изображает эллипс при любом значении $\lambda > 1$; оно изображает параболу при единственном значении $\lambda = 1$; при всех значениях $\lambda < 1$ уравнение изображает гиперболу; в частности, когда $\lambda = -24$, гипербола распадается на две пересекающиеся прямые: $x - 6y - 3 = 0$ и $x + 4y - 1 = 0$. **561.** При всех значениях параметра $\lambda$ уравнение изображает гиперболу; только при двух значениях $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = -12{,}5$ гиперболы вырождаются в пары действительных пересекающихся прямых. **562.** Задача неопределённая, так как четыре последние точки лежат на одной прямой $x + 2y - 6 = 0$, и следовательно, искомая кривая распадается на эту прямую и прямую, проходящую через начало координат. Введя обозначение $\frac{a_{11}}{a_{22}} = \lambda$, мы можем искомую кривую представить следующим уравнением:

$$2\lambda x^2 + (4\lambda + 1)\,xy + 2y^2 - 12\lambda x - 6y = 0$$

или $(x + 2y - 6)(2\lambda x + y) = 0$.

**563.** $(+5;\ 0)$, $(+2;\ 0)$ и $(0;\ +5)$, $(0;\ +1)$. **564.** a) Кривая касается оси абсцисс в точке $(+2;\ 0)$ и пересекает ось ординат лишь в одной точке $(0;\ +4)$; b) ось абсцисс пересекает кривую в точках $(+3;\ 0)$ и $(+1;\ 0)$; ось ординат параллельна оси этой параболы и пересекает её лишь в одной точке $(0;\ +3)$; c) кривая проходит через начало координат и в начале координат касается оси абсцисс; ось ординат она пересекает в начале координат и в точке $(0;\ +2)$. **565.** $l=2$. **566.** При $\lambda=\pm 5$ кривая отсекает на оси ординат хорду, равную 3; при $\lambda=\pm 4$ кривая касается оси ординат. Указание. Задача сводится к исследованию квадратного уравнения $y^2+\lambda y+4=0$, которое получим из уравнения кривой, положив $x=0$. Для выполнения первого условия нужно, чтобы разность корней этого квадратного уравнения $y_2-y_1=3$. Для выполнения второго условия нужно, чтобы $y_2=y_1$. **567.** a) $(+1;0)$ и $\left(+\frac{1}{2};\ -\frac{5}{2}\right)$; b) точки пересечения мнимые; c) прямая касается кривой в точке $(+1;\ 0)$; d) $\left(+\frac{1}{2};\ \ +\frac{1}{6}\right)$, прямая пересекает кривую лишь в одной точке. **568.** $5x+8y-24=0$; $5x-8y-8=0$; $x-4y-2=0$ и $x+4y-3=0$. **569.** $7x+4y+10=0$ в точке $(-2;\ +1)$ и $3x-4y+18=0$ в точке $(-2;\ +3)$. **570.** $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$; $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$; $yy_1=p(x+x_1)$; $\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}=2$. **571.** $2x+5y=0$ и $2x+y=0$. Указание. Определяем координаты точки прикосновения из двух условий: 1) так как касательная проходит через начало координат, то свободный член в её уравнении должен равняться нулю, т. е. $a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}=0$, или в нашем случае: $2x'+\frac{5}{2}y'+1=0$; 2) координаты точки прикосновения удовлетворяют уравнению данной кривой. **572.** $7x-2y-13=0$; $x-3=0$. **573.** a) Точка $(-2;\ +1)$ лежит на данной кривой, а потому через неё можно провести только одну касательную, уравнение которой $7x+4y+10=0$; b) данное уравнение изображает распавшуюся кривую, состоящую из двух прямых, пересекающихся в точке $(+3;\ -3)$. Все касательные к этой кривой, т. е. все прямые, встречающие её в двух слившихся точках, должны проходить через точку $(+3;\ -3)$; таким образом, через всякую точку можно провести только одну касательную к данной кривой; исключение составляет только точка $(+3;\ -3)$, через которую проходит бесчисленное множество касательных. Единственная касательная, проходящая через точку $(-2;\ +1)$, имеет уравнение: $4x+5y+3=0$. **574.** $y+4=0$ и $3y-4=0$. Указание. Координаты точки прикосновения определяем из уравнений: $F_{x'}=0$ (в уравнении касательной, параллельной оси $x$, коэффициент при абсциссе равен нулю) и $2F'=0$ (координаты точки прикосновения удовлетворяют уравнению кривой). **576.** $25x^2\pm 30xy+9y^2-150x-90y+225=0$ (две параболы). **577.** $6x^2+3xy-y^2+2x-y=0$. Указание. Так как искомая кривая проходит через начало координат, то свободный член её уравнения равен нулю ($a_{33}=0$). Из условия касания кривой и прямой $4x+3y+2=0$ в точке $(+1;\ -2)$ следует:

$$\frac{a_{11}-2a_{12}+a_{13}}{4}=\frac{a_{21}-2a_{22}+a_{23}}{3}=\frac{a_{31}-2a_{32}}{2}.$$

Наконец, из того условия, что кривая касается прямой $x-y-1=0$ в точке $(0;\ -1)$, вытекает: $\frac{-a_{12}+a_{13}}{1}=\frac{-a_{22}+a_{23}}{-1}=\frac{-a_{23}}{-1}$. Из этих пяти уравнений определяем отношения коэффициентов искомого уравнения. **578.** $y=2x$ и $y=-3x$. Указание. Угловые коэффициенты искомых прямых определяются из уравнения: $a_{11}+2a_{12}k+a_{22}k^2=0$. **579.** $3x-y-6=0$ и $x-2y-2=0$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **580.** $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Указание. Данное уравнение изображает параболу; все указанные прямые параллельны её оси симметрии и, следовательно, параллельны между собою. **581.** $\lambda=\frac{3}{4}$. **582.** a) $2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ $(k_1=0;\ a_{11}=0)$; b) $a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ $(k_1=\infty;\ a_{22}=0)$; c) $2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ $(k_1=0$ и $k_2=\infty;\ a_{11}=0$ и $a_{22}=0)$. **583.** a) $a_{11}=a_{13}=0$; b) $a_{22}=a_{23}=0$; c) $a_{11}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0$. **584.** $6x^2-xy-2y^2+4y=0$. **585.** $xy+4x+6y=0$. **586.** $2x^2-xy-3y^2-x-6y-15=0$. **586*.** $x^2-4y^2-2x+4y=0$, т. е. кривая второго порядка, распавшаяся на две действительные пересекающиеся прямые: $x-2y=0$ и $x+2y-2=0$. Указание. Данным условиям задачи удовлетворяет бесчисленное множество кривых; все они изображаются уравнением:

$$x^2+2\lambda xy+4y^2-4x-8y+4=0,$$

при различных значениях параметра $\lambda$. Далее решаем согласно указанию к задаче 547. **588.** $x+2y+3=0$ и $7x-5y+2=0$. **589.** $y-1=0$ и $4x+5y+3=0$. **590.** $x-1=0$ и $x-2y+3=0$. **591.** $x+1=0$. **592.** $2x-y-8=0$. **593.** $49x-49y+44=0$. **594.** a) $6x+7y+4=0$; b) $7x+10y+5=0$; c) $x+3y+1=0$. **595.** $17x-4y-4=0$. Указание. Искомый диаметр сопряжён хордам, параллельным данной прямой. **596.** $(-3;\ +5)$. Указание. Искомую точку мы находим как точку пересечения данной прямой и сопряжённого ей диаметра. **597.** Условию задачи удовлетворяют две пары сопряжённых диаметров: $6x-12y+11=0$ и $3x-y-7=0$, или $2y-5=0$ и $3x-3y-2=0$. Указание. Угловые коэффициенты искомых диаметров определяются из двух уравнений: $3-3(k+k_1)+5kk_1=0$ (условие сопряжённости относительно данной кривой) и $\frac{k-k_1}{1+kk_1}=1$ $\left(\text{угол между диаметрами равен } \frac{\pi}{4}\right)$. **598.** a) $kk'=-\frac{b^2}{a^2}$; b) $kk'=\frac{b^2}{a^2}$. **599.** $2x-y-5=0$.

**600.** $k_1 = {}^8/_{2}$; $k_2 = -{}^5/_{12}$; $a'^2 = {}^{130}/_{23}$; $b'^2 = {}^{169}/_{23}$, где $a'$ и $b'$ обозначают длину искомых полудиаметров. **601.** $\varphi = 120^\circ$. **602.** $2a' = 4\sqrt{2}$; $2b' = 2\sqrt{5}$. **603.** $2a = 22$; $2b = 6$. Указание. Пользуемся теоремами Аполлония. **604.** $\varphi = \arcsin {}^1/_7$. Указание. Для гиперболы имеют место следующие соотношения между полуосями $(a, b)$ и сопряжёнными полудиаметрами $(a', b')$: $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$ и $ab = a'b' \sin\varphi$. (Сравнить с теоремами Аполлония для эллипса, приведёнными в задаче 602.) **605.** $y = 2x$ и $y = {}^1/_3\, x$ или $y = -2x$ и $y = -{}^1/_3\, x$. (См. задачу 597.) **606.** a) $x - 3y = 0$; b) $x - 3y - 6 = 0$; c) $3x - 9y - 7 = 0$; d) $5x - 15y - 8 = 0$ и $5x - 15y - 19 = 0$; e) $10x - 30y - 27 = 0$. **607.** $y - p = 0$. **608.** $x - 12 = 0$. **609.** a) $2x + 2y + 1 = 0$ и $x - y + 2 = 0$; b) $28x + 21y + 4 = 0$ и $33x - 44y - 6 = 0$; c) $x + y = 0$ и $x - y = 0$. Указание. Угловые коэффициенты главных осей могут быть определены из следующего уравнения: $a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$. Вставляя угловой коэффициент одной из осей в общее уравнение диаметра $F_x + kF_y = 0$, получим уравнение другой (сопряжённой ей) оси. **610.** Главные оси кривой, распавшейся на две пересекающиеся прямые, совпадают с биссектрисами углов, образованных этими прямыми. **612.** a) $x + 2y - 1 = 0$; $(+{}^1/_5; +{}^2/_5)$; b) $39x - 26y - 12 = 0$; $(+{}^{18}/_{169}; -{}^{51}/_{169})$; c) $y - 1 = 0$; $(-1; +1)$. **613.** $5x + 5y + 2 = 0$. Указание. Первая кривая — центральная, уравнение пучка её диаметров следующее: $2x - y - 1 - k(x + 2y + 1) = 0$, вторая из данных кривых парабола; угловой коэффициент всех её диаметров $k_1 = -\frac{\alpha}{\beta} = -1$. Чтобы найти общий диаметр этих двух кривых, достаточно найти тот диаметр вышеприведённого пучка, который имеет угловой коэффициент, равный $-1$. **615.** $19x^2 - 56xy + 43y^2 - 6 = 0$. **616.** a) Начало координат совпадает с центром кривой; b) ось абсцисс совпадает с одним из диаметров кривой, а ось ординат параллельна сопряжённому диаметру; c) оси координат параллельны двум сопряжённым диаметрам, и кривая проходит через начало координат; d) оси координат совпадают с двумя сопряжёнными диаметрами; e) ось ординат совпадает с одним из диаметров, а ось абсцисс параллельна сопряжённому диаметру; f) оси координат параллельны двум сопряжённым диаметрам. **617.** $10x^2 - 5y^2 - 1 = 0$. Указание. Переносим начало координат в центр кривой; тогда уравнение её будет: $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 1 = 0$. Потом находим направление главных осей кривой из уравнения $a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$, которое в нашем случае будет: $2k^2 - 3k - 2 = 0$. Определив $k_1 = 2$ и $k_2 = -{}^1/_2$, достаточно будет повернуть оси координат на угол $\alpha = \operatorname{arctg} 2$, чтобы совместить их с главными осями кривой. Соответствующие формулы преобразования координат будут: $x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}$ и $y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}$. Пользуясь ими, мы преобразуем уравнение кривой, отнесённой к центру, в искомое уравнение кривой, отнесённой к главным осям. **618.** a) $5x^2 + 10y^2 = 1$; b) $13y^2 - 52x^2 = 1$; c) $2x^2 - 2y^2 = 1$; d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; e) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. **619.** $\frac{x^2}{6} +$

$+\frac{y'^2}{2}=1$. Указание. Так как центр кривой совпадает с началом координат, то для решения задачи достаточно изменить направление осей. Определяя угловые коэффициенты главных направлений, вычисляя по найденным угловым коэффициентам углы наклонения главных осей к оси абсцисс и составляя формулы преобразования координат, мы должны помнить, что первоначальная система координат — косоугольная $\left(\omega=\frac{\pi}{3}\right)$. Окончательный вид формул преобразования следующий: $x=\frac{x'-y'\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ и $y=\frac{x'+y'\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. **620.** a) Эллипс $\frac{8}{3}x^2+4y^2=1$; b) окружность $x^2+y^2=16$. Указание. В задаче b) главные направления неопределённые; за главные оси можно выбрать любые взаимно перпендикулярные диаметры. **621.** a) Парабола проходит через начало координат; b) ось ординат параллельна оси параболы; c) ось ординат совпадает с диаметром, сопряжённым хордам, параллельным оси абсцисс; d) начало координат лежит на параболе, ось ординат совпадает с диаметром, проходящим через эту точку параболы, а ось абсцисс — с касательной, проведённой в конце диаметра; e) ось абсцисс совпадает с диаметром, сопряжённым хордам, параллельным оси ординат. **622.** $y^2=2x$. Указание. Находим угловой коэффициент главной оси: $k=-\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{3}{4}$. Уравнение главной оси получим из уравнения пучка диаметров: $9x+12y-20+k'(12x+16y+15)=0$, если положить $k'=-\frac{1}{k}=\frac{4}{3}$. Решая совместно уравнение параболы и уравнение главной оси, убеждаемся, что вершина параболы совпадает с началом координат, поэтому для приведения уравнения к простейшему виду достаточно повернуть оси координат на угол $\alpha=\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. Соответствующие формулы преобразования координат будут: $x=\frac{4x'+3y'}{5}$, $y=\frac{-3x'+4y'}{5}$. **623.** a) $y^2=2\sqrt{2}\,x$; b) $y^2=6x$; c) $y^2=\frac{3}{4}x$. Указание. a) Находим уравнение главной оси: $x+y-2=0$; определяем вершину $(+1;\ +1)$. После перенесения начала координат в вершину уравнение параболы будет: $x^2+2xy+y^2-4x+4y=0$. Дальнейшее преобразование заключается в повороте осей; соответствующие формулы $x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}$. Примеры b) и c) решаются по тому же плану, но принимается во внимание, что первоначальная система координат — косоугольная. **624.** a) $y^2=x^2+\sqrt{2}\,x$; b) $x^2+2y^2-8x=0$; c) $y^2=2\frac{b^2}{a}x+\frac{b^2}{a^2}x^2$. Указание.

а) Данная кривая — гипербола. Её главные оси имеют уравнения: $x+y+1=0$ и $x-y-2=0$. На второй оси имеем две действительные вершины $(0;\ -2)$ и $(+1;\ -1)$. Переносим начало координат во вторую из этих вершин и поворачиваем оси координат на угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **625.** a) $6x-2y+19=0$ и $2x+2y-1=0$; b) $6x+$ $+14y+11=0$ и $2x+2y-1=0$; c) $5y+3=0$ и $25x-5y+13=0$; d) $2x-3y+1=0$ и $x-1=0$. Указание. Уравнение асимптоты кривой мы получим из уравнения пучка её диаметров $F_x+kF_y=0$, вставляя вместо углового коэффициента сопряжённых хорд ($k$) угловой коэффициент самой асимптоты, определённый из уравнения $a_{11}+2a_{12}k+a_{22}k^2=0$. **626.** $2x-y+5=0$ и $x+2y-1=0$ (при всех значениях $\lambda$). **627.** Указание. Пропорциональность коэффициентов при старших членах вытекает из условия параллельности асимптот обеих кривых; пропорциональность коэффициентов при членах первой степени вытекает из условия совпадения асимптот. **628.** $(Ax+By+C)\cdot(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda=0$, где $\lambda$ — произвольный параметр. Указание. При решении этой задачи мы пользуемся, во-первых, тем, что уравнения кривых, имеющих общие асимптоты, отличаются только свободными членами (после умножения на некоторые постоянные множители; см. задачу 627) и, во-вторых, тем, что совокупность двух прямых есть частный вид кривой второго порядка (распавшаяся кривая), имеющей эти две прямые своими асимптотами. **629.** $10x^2+21xy+9y^2-41x-39y+4=0$. Указание. Удобно воспользоваться решением задачи 628. **630.** $2x^2-xy-x+y+5=0$. **630*.** $a_{11}-2a_{12}\cos\omega+a_{22}=0$. Указание. У равносторонней гиперболы асимптоты взаимно перпендикулярны. **631.** Отсутствует или один член с квадратом одной из координат ($a_{11}=0$ или $a_{22}=0$) или отсутствуют оба члена с квадратами координат ($a_{11}=a_{22}=0$). **632.** $35xy-34y^2-34y-2=0$. **633.** $xy=\frac{a^2+b^2}{4}$. Указание. Так как центр гиперболы совпадает с началом координат, то преобразование заключается в изменении направления осей координат; за новые оси выбираем асимптоты, т. е. прямые, которые образуют с осью абсцисс углы $\alpha=\operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right)$ и $\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$. Соответствующие формулы преобразования будут следующие: $x=\frac{a(x'+y')}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $y=\frac{-b(x'-y')}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **634.** $2xy+11=0$. Указание. Так как в данном уравнении отсутствуют члены с квадратами координат, то оси координат параллельны асимптотам, и для выполнения указанного преобразования достаточно перенести начало координат в центр гиперболы, не меняя направления осей. **635.** $xy=\frac{3}{40}$. Указание. Так как формулы преобразования координат при переходе к асимптотам получаются довольно сложные, то можно сначала отнести гиперболу к её главным осям, а потом уже воспользоваться решением задачи 633. **636.** а) В уравнение эллипса могут войти или все три члена второй степени, или два члена с квадратами координат (когда эллипс отнесён к сопряжённым направлениям). Уравнения эллипса с одним старшим членом быть не может. b) В уравнение гиперболы могут войти или все три старших члена, или два из них в любой комбинации: оба члена с квадратами координат, если гипербола отнесена к сопряжённым направлениям, или один член с квадратом, а другой — с произведением координат, если одна из осей координат параллельна асимптоте гиперболы. Наконец, уравнение гиперболы может содержать один старший член, а именно, произведение координат, когда обе оси координат параллельны асимптотам. c) Уравнение параболы содержит или все три старших члена, или только один член с квадратом одной из координат, когда одна из осей координат параллельна оси параболы. **637.** $13x^2 + 52y^2 = 1$. **638.** a) $x^2 - y^2 = 11\sqrt{2}$; $I_1 = 0$; $I_2 = -2$; $I_3 = 44$; b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; $I_1 = 7$; $I_2 = -144$; $I_3 = -144^2$; c) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$; $I_1 = 10$; $I_2 = 9$; $I_3 = -81$; d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; $I_1 = 5$; $I_2 = -36$; $I_3 = 36^2$; e) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$; $I_1 = 8$; $I_2 = -9$; $I_3 = 81$. Указание. Как мы видели при решении задачи 637, $a'_{11} + a'_{22} = I_1$; $a'_{11} \cdot a'_{22} = I_2$ и $a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_{33} = I_3$; поэтому коэффициенты при квадратах текущих координат в упрощённом уравнении центральной кривой могут быть определены как корни следующего уравнения: $z^2 - I_1 z + I_2 = 0$ (характеристическое уравнение), а свободный член $a'_{33} = \frac{I_3}{I_2}$. **639.** a) $y^2 = 4\sqrt{2}\,x$; b) $y^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}\,x$; c) $y^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\,x$; d) $y^2 = \frac{1}{5\sqrt{5}}\,x$. Указание. Искомое уравнение имеет вид: $a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x = 0$ при $\omega' = \frac{\pi}{2}$. Для определения двух неизвестных коэффициентов $a'_{22}$ и $a'_{13}$ пользуемся первым и третьим инвариантами, так как второй инвариант равен нулю (для параболы $\delta = 0$). Легко составить и общие формулы, которые облегчают вычисления, а именно: $a'_{22} = I_1$ и $a'_{13} = \pm\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}$. Таким образом, упрощённое уравнение параболы имеет вид: $I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\,x = 0$.

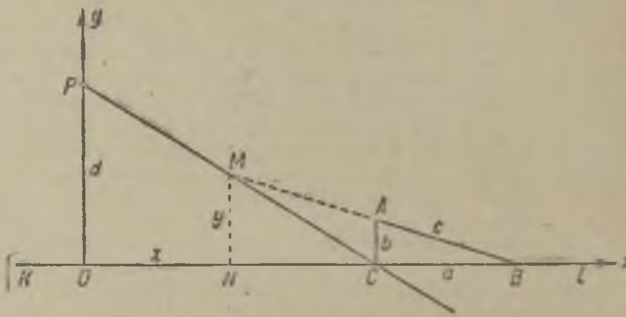
**640.** a) $15x^2 - y^2 + 3 = 0$; b) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$; c) $y^2 = \sqrt{3}x$. **640*.** $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. **641.** $xy = 5/2$. **642.** a) $xy = 1{,}2$; b) $xy = \frac{\sqrt{29}}{25}$; c) $xy = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

**643.** $9x^2 - 4y^2 \pm 36x = 0$. Указание. Знак перед последним членом находится в зависимости от того, в которую из двух вершин гиперболы перенесено начало координат. **644.** $x + 3y + 2 = 0$. **645.** 1) $4x + 7y + 1 = 0$; 2) $x - 4 = 0$; 3) $x - 6y + 1 = 0$; 4) центр кривой поляры не имеет; 5) $2x + 3y - 3 = 0$; 6) $a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$; 7) $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$; 8) $\frac{5x}{9} - \frac{3y}{4} = 1$; 9) $3x - y - 9 = 0$; 10) поляра неопределённая, так как кривая распадается на две прямые: $x - y = 0$ и $x - 3y + 2 = 0$ и точка $(+1;\ +1)$ есть точка их пересечения. **646.** $(+1;\ 0)$. Указание. Координаты полюса мы находим из условия пропорциональности коэффициентов в уравнении поляры точки $(x_1,\ y_1)$ относительно данной кривой, а именно: $(3x_1 - 3y_1 - 2)x - (3x_1 - 5y_1 + 3)y - (2x_1 + 3y_1 - 10) = 0$, и в уравнении прямой $x - 6y + 8 = 0$. **647.** 1) $(+5;\ +1)$; 2) $(+{}^3/_2;\ -{}^1/_2)$. Координаты полюса в данном случае определяются из уравнений: $a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} = 0$ и $a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} = 0$, потому что в уравнение поляры (оси $x$) не входят свободный член и член, содержащий абсциссу; 3) $(-2;\ 0)$; 4) прямая служит диаметром кривой и полюса не имеет; 5) полюс неопределённый; за полюс можно принять любую точку прямой $9x - y + 19 = 0$. Кривая распадается на пару прямых, которые вместе с данной и найденной прямой образуют четыре гармонических луча; 6) $(+4;\ -3)$; 7) $(-5;\ -7{,}5)$. **648.** $(-3;\ +1)$. Указание. Искомая точка — полюс данной прямой. **649.** $5x + y + 2 = 0$. Указание. Искомая хорда есть поляра точки $M$. **650.** $(+{}^3/_2;\ 2)$. Указание. Искомая точка есть точка пересечения данной прямой с полярой начала координат. **651.** Каждая точка прямой $4x - y + 30 = 0$ сопряжена с точкой $(+5;\ +1)$, так как эта прямая служит полярой данной точки. **652.** $x + 5y - 15 = 0$. Указание. Искомая прямая проходит через точки $M(0;\ +3)$ и через полюс $P(-5;\ +4)$ данной прямой $x - 3y + 22 = 0$. **653.**
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Для эллипса, данного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, это условие принимает вид: $AA_1a^2 + BB_1b^2 = CC_1$. Указание. Координаты полюса первой прямой должны удовлетворять уравнениям:
$$\frac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}{A} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}{B} = \frac{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}}{C} \quad \text{или,}$$
обозначая через $\lambda$ величину этих отношений: $a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} - A\lambda = 0$; $a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} - B\lambda = 0$; $a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} - C\lambda = 0$. Кроме того, согласно условию задачи, полюс первой прямой должен лежать на второй прямой, т. е. те же координаты $(x_1,\ y_1)$ должны ещё удовлетворять четвёртому уравнению: $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$. Условие совместности этих четырёх уравнений и будет искомым условием. **654.** Указание. Чтобы упростить доказательство, вы-

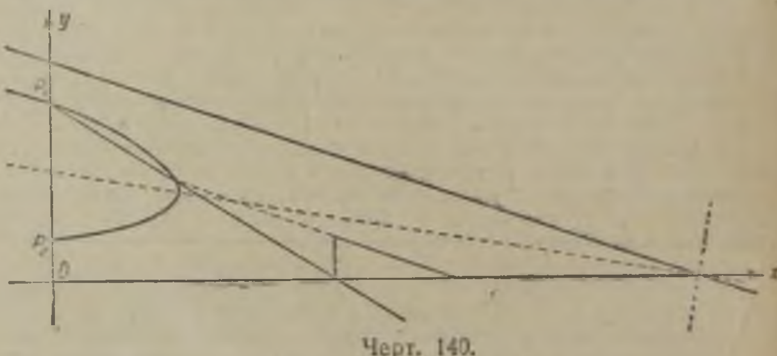
бираем прямоугольные координаты и помещаем начало координат в центре круга. **660.** Прямоугольник, составленный из двух касательных в вершинах малой оси ($y = \pm 4$) и двух директрис эллипса ($x = \pm 10$). **661.** Треугольник, составленный из трёх касательных к гиперболе $2x - y - 2 = 0$, $2x + y - 2 = 0$ и $x + 2 = 0$. **662.** Эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Решение. Обозначим через $x'$ и $y'$ координаты любой точки окружности; тогда касательная к окружности в этой точке имеет уравнение $xx' + yy' - 9 = 0$. Ищем полюс ($x_1$, $y_1$) этой прямой относительно эллипса. Уравнение поляры точки ($x_1$, $y_1$) относительно данного эллипса должно иметь следующий вид: $6x_1x + 9y_1y - 54 = 0$. Таким образом, для одной и той же прямой (поляры точки $x_1$, $y_1$) получили два уравнения; поэтому коэффициенты этих уравнений будут пропорциональны: $\frac{6x_1}{x'} = \frac{9y_1}{y'} = \frac{54}{9}$, откуда $x_1 = x'$ и $y_1 = {}^2/_3\, y'$. Координаты полюса ($x_1$, $y_1$) выражены через координаты ($x'$, $y'$) точки прикосновения поляры к окружности. Чтобы исключить эти вспомогательные координаты ($x'$, $y'$), воспользуемся тем, что они удовлетворяют уравнению окружности $x'^2 + y'^2 = 9$. Вставляя в это уравнение $x'^2 = x_1^2$ и $y'^2 = \frac{9}{4}\, y_1^2$, получим окончательно $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$. Это и есть уравнение искомого геометрического места полюсов. **663.** Тот же эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, причём полюсом любой касательной к эллипсу служит точка того же эллипса, симметричная с точкой прикосновения относительно оси абсцисс. **665.** $x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$. Указание. Из условия, что начало координат служит полюсом прямой $2x + 3y - 1 = 0$, следует, что $\frac{a_{13}}{2} = \frac{a_{23}}{3} = \frac{a_{33}}{-1}$; условие, что точка ($-1$; $+1$) служит полюсом прямой $2x + y = 0$, даст только одно новое уравнение: $\frac{-a_{11} + a_{12} + a_{13}}{2} = \frac{-a_{12} + a_{22} + a_{23}}{1}$; кроме того, координаты центра ($+{}^3/_2$; $+{}^1/_2$) должны удовлетворять уравнениям $F_x = 0$ и $F_y = 0$, поэтому $3a_{11} + a_{12} + 2a_{13} = 0$ и $3a_{12} + a_{22} + 2a_{23} = 0$. Из полученных пяти однородных уравнений мы можем определить отношения шести коэффициентов уравнения искомой кривой. **666.** $7x^2 + 2xy - 6x - 10y + 15 = 0$. **667.** $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$. Указание. Парабола есть геометрическое место точек $M(x, y)$, расстояния которых от фокуса ($-{}^1/_3$; $-{}^2/_3$) и от директрисы ($3x - 3y + 8 = 0$) равны между собой, т. е. $(x + {}^1/_3)^2 + (y + {}^2/_3)^2 = \frac{(3x - 3y + 8)^2}{18}$. Преобразовав это уравнение, мы получим искомое уравнение параболы. **668.** Условиям задачи удовлетворяют две параболы: $x^2 + 4xy +$

$+4y^2-14x+22y+24=0$, $x^2+4xy+4y^2-14x-18y+24=0$. **669.** $4xy+3y^2-2y-1=0$. Указание. Пользуемся следующим свойством кривых второго порядка: $r:d=e$. **670.** $x^2+2xy+y^2-6x+2y-7=0$. **671.** $xy=1/2$. Указание. Эксцентриситет равносторонней гиперболы $e=\sqrt{2}$. **672.** $F_1(+4;\ +3)$, $F_2(0;-1)$; $2x+2y-15=0$ и $2x+2y+3=0$. **673.** $F(0;\ 0)$; $4x+3y+2=0$. **674.** $3x^2-6xy-5y^2+24y-12=0$. Указание. Воспользуемся тем, что разность фокальных радиусов-векторов любой точки гиперболы равна её действительной оси. **675.** $5x^2-4xy+8y^2+10x-40y+41=0$. Указание. Найдём прежде всего точку прикосновения данной касательной к искомому эллипсу. С этой целью можно воспользоваться тем, что фокальные радиусы-векторы, проведённые к точке прикосновения, образуют равные углы с касательной, или, иначе говоря, тем, что радиус-вектор, проведённый в точку прикосновения из одного фокуса, проходит через точку, симметричную с другим фокусом относительно касательной. **676.** Нельзя, так как оба фокуса $F_1(+1;\ +3)$ и $F_2(-1;\ +2)$ лежат по одну сторону от касательной $x-y+4=0$, что возможно только у эллипса. **677.** $x^2-6xy+y^2-2x-2y+5=0$. Указание. Вычисляем расстояния фокусов от данной директрисы $\delta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\delta_2=-\frac{5}{\sqrt{2}}$. Так как эти расстояния имеют разные знаки, то фокусы расположены по разные стороны от директрисы; следовательно, искомая кривая — гипербола. Учитывая, что $|\delta_1|<|\delta_2|$, заключаем, что данная директриса сопряжена первому фокусу $F_1(+1;\ +1)$. Для составления уравнения кривой надо ещё знать или её эксцентриситет, или действительную ось; но обе эти величины можно вычислить, зная расстояние между фокусами и расстояние от фокуса до соответствующей директрисы. **678.** $9x^2+4xy+6y^2+2x-4y-1=0$. Указание. Искомая кривая — эллипс ($e<1$). Её уравнение можно составить, воспользовавшись тем, что сумма фокальных радиусов-векторов любой её точки равна большей оси. Большую ось можно вычислить, зная расстояние между фокусами и эксцентриситет. **679.** $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$. **680.** Условию задачи удовлетворяют две параболы: $4x^2+4xy+y^2-10y-15=0$ и $4x^2+4xy+y^2+12x-34y-15=0$. **681.** $11x^2-20xy-4y^2+18x+36y=0$. Указание. Искомая кривая — гипербола; это видно из того, что центр и точка кривой лежат по разные стороны от данной директрисы. Написав уравнение действительной оси, убеждаемся, что она проходит через начало координат, т. е. начало координат служит одной из вершин искомой гиперболы. **682.** $4x^2+6xy-4y^2-26x+18y-39=0$. Указание. Центр кривой, уравнение действительной оси и расстояние $c$ от центра до фокуса находим непосредственно из условий задачи. Для вычисления эксцентриситета можно воспользоваться тем, что расстояние фокуса до асимптоты равно мнимой полуоси $b$, а чтобы составить уравнение директрисы, воспользуемся тем, что директриса отсекает на асимптотах отрезки, равные действительной полуоси $a$. Задачу можно решить проще, заметив, что данные асимптоты взаимно перпендикулярны, и следовательно, $e=\sqrt{2}$. Кроме того, легко показать, что директриса проходит через основание перпендикуляра, опущен-




Черт. 139.

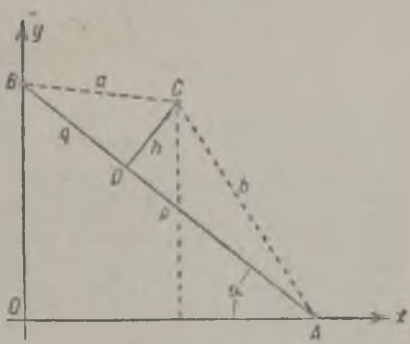
ного из фокуса гиперболы на её асимптоту. Вычислять координаты центра и других точек нет надобности, если будем пользоваться уравнением пучка прямых. **683.** $3x^2+4xy-8x-4y+4=0$. **684.** $xy-y_1x-x_1y=0$, где $(x_1, y_1)$ — центр пучка прямых. Это — гипербола, центр которой совпадает с центром пучка, а асимптоты параллельны осям координат. **684*.** $ay^2+bxy-a(b+d)y+abd=0$.




Черт. 140.

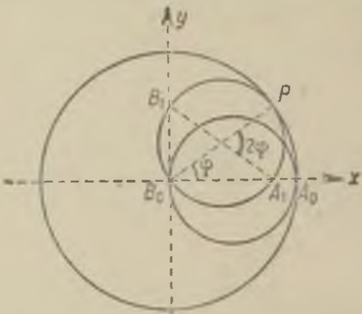
Указание. За оси координат принимаем прямую $KL$ и перпендикуляр, опущенный на неё из точки $P$. Расстояние точки $P$ от $KL$ обозначаем через $d$. Для составления искомого уравнения рассматриваем две пары подобных треугольников (черт. 139), а именно: $\triangle OPC \sim \triangle NMC$ и $\triangle ABC \sim \triangle MNB$. Исследование. Искомая кривая есть гипербола (черт. 140). Ось абсцисс служит одной из её асимптот. Другая асимптота параллельна гипотенузе подвижного треугольника $\left(k_2 = -\frac{b}{a}\right)$. Гипербола пересекает ось ординат в двух точках: $P(0; d)$ и $P_1(0; b)$. Центр кривой имеет координаты $x_0 = \frac{a(b+d)}{b}$; $y_0 = 0$. Если отнести гиперболу к осям, то уравнение её будет: $(c-a)x^2 - (c+a)y^2 - 2abd = 0$; если отнести гиперболу к асимптотам, то уравнение её преобразуется в следующее: $xy = -\frac{acd}{b}$.

**685.** $b^2x^2 + a^2y^2 - 2ch\cdot xy = (pq - h^2)^2$. Указание. За оси координат выбираем перпендикулярные прямые неподвижной плоскости. Параметрами кривой могут служить: расстояние $h$ точки $C$ от прямой $AB$ и отрезки $p$ и $q$, отсекаемые перпендикуляром $CD$ на этой прямой (черт. 141). Искомая траектория имеет такое уравнение $(p^2+h^2)x^2 + (q^2+h^2)y^2 - 2h(p+q)xy = (pq-h^2)^2$, или, обозначая через $a$, $b$ и $c$ стороны треугольника $ABC$, получим более простое уравнение, приведённое в ответе. Исследование. Всякая точка подвижной плоскости $(C)$ описывает эллипс с центром в начале координат, за исключением точек окружности, для которой отрезок $AB$ служит

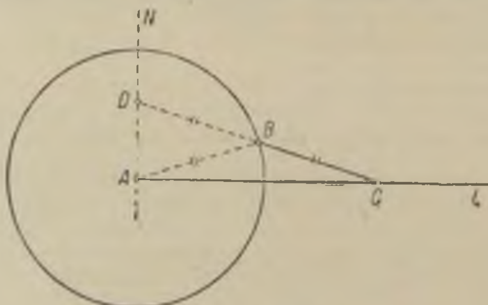



Черт. 141.

диаметром: эти точки перемещаются по прямым, проходящим через начало координат. Если точка $C$ лежит на одной прямой с точками $A$ и $B$ ($h = 0$, $a = q$ и $b = p$), то оси соответствующего эллипса совпадают с осями координат, а полуоси его по величине равны расстояниям образующей точки от основных точек $B$ и $A$ (см. задачу 427). Рассматриваемое движение плоскости называется эллиптическим; механическое его осуществление возможно при посредстве эллиптического циркуля (см. задачу 429). **686.** Большая полуось равна $\frac{c}{2} + m$, а меньшая равна $\frac{c}{2} - m$, где $m$ — расстояние точки $C$ от середины отрезка $AB$. Точки, расположенные на одной и той же прямой, проходящей через середину отрезка $AB$, описывают эллипсы с совпадающими осями. Точки, одинаково удалённые от середины отрезка $AB$, описывают эллипсы с соответственно равными осями. Указание. При эллиптическом движении плоскости точки $A'$ и $B'$ скользят по прямым $OA'$ и $OB'$, и траекторию точки $C$ можно рассматривать как траекторию точки отрезка $A'B'$, концы которого скользят по двум перпендикулярным прямым. **686*.** Все точки описывают эллипсы, за исключением точек катящейся окружности, которые перемещаются по диаметрам неподвижного круга. Указание. Указанным качением одной окружности по другой осуществляется эллиптическое движение плоскости. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что диаметр $A_0B_0$ катящегося круга (черт. 142) скользит своими концами по двум перпендикулярным диаметрам неподвижного круга ($\operatorname{arc} A_0P = \operatorname{arc} A_1P$). **687.** $b^2x^2 + a^2y^2 + abxy - 2ab^2x - 2a^2by + a^2b^2 = 0$, если за оси координат приняты стороны $CB$ и $CA$. Искомое геометрическое место — эллипс, касающийся сторон треугольника $CB$ и $AB$ в его вершинах $B$ и $A$. **687*.** Парабола $4x^2 - 8hy + (4h^2 - a^2) = 0$, где $a$ — основание, $h$ — высота треугольника. Указание. За ось абсцисс прямоугольной системы координат принята прямая, по которой скользит основание треугольника; ось ординат проходит через неподвижную вершину. **688.** Дуга эллипса, имеющего центр в точке $A$; одна из осей направлена по прямой $AL$. Величина полуосей: $MC$ и $|MC - 2AB|$. Указание. Часть стержня $CD$, заключённая между неподвижной линейкой $AL$ и прямой $AN$ (черт. 143), к ней перпендикулярной, имеет постоянную




Черт. 142.

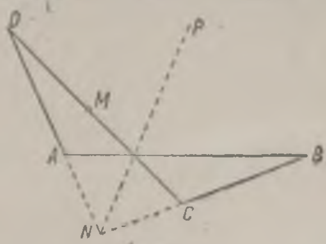



Черт. 143.

длину, равную $2AB$. Таким образом, эллиптическое движение плоскости осуществляется, если отрезок $BC$ постоянной длины скользит одним концом по прямой, а другим — по окружности, центр которой лежит на той же прямой, а радиус равен скользящему отрезку. **689.** Кривая четвёртого порядка:

$$[(x^2 - r^2 - d^2)(l - d)^2 + y^2(l^2 + d^2)]^2 - 4d^2[(l - d)^2r^2 - y^2l^2][(l - d)^2 - y^2] = 0,$$

где $r$ — длина кривошипа, $l$ — длина шатуна, $d$ — расстояние образующей точки $M$ от конца шатуна $B$. Указание. Для составления уравнения удобно выразить координаты образующей точки как проекции ломаной $ABM$ на оси координат. Чтобы исключить из полученных равенств вспомогательные углы, пользуемся тем, что в треугольнике $ABC$ стороны $r$ и $l$ пропорциональны синусам противолежащих углов. **690.** $(x^2+y^2)^2=4(a^2x^2+b^2y^2)$. Сделать чертёж. **691.** Указание. Исследовать траектории точек $N$, $C$, $D$ и ввести в рассмотрение ось симметрии антипараллелограмма. **692.** $(x^2+y^2)^2=4(a^2x^2-b^2y^2)$. Сделать чертёж. **693.** Указание. Точка $N$ (черт. 144) описывает дугу гиперболы, фокусами которой служат точки $A$ и $B$. Ось симметрии $NP$ антипараллелограмма служит касательной к гиперболе в точке $N$; по отношению к ней образующая точка $M$ и центр гиперболы (середина $AB$) суть точки симметричные. **694.** Решение. Так как равнобедренные треугольники $AOC$, $ADC$ и $ABC$ имеют общее основание $AC$, то три вершины их $O$, $D$ и $B$ лежат всё время на одной прямой. Далее, замечаем, что $OD \cdot OB = l^2 - a^2 = \text{const}$ как степень точки $O$ относительно круга с центром в $A$ и радиусом $a$. Точка $D$ описывает окружность, центр которой $M$ и радиус $MD=b$; её уравнение в полярных координатах (приняв $O$ за полюс и $OM$ за полярную ось) будет: $\rho=2b\cdot\cos\varphi$. Траектория точки $B$ изобразится в полярных координатах следующим уравнением: $\rho=\dfrac{l^2-a^2}{2b\cdot\cos\varphi}$ $\left(\text{из равенства } OB=\dfrac{l^2-a^2}{OD}\right)$, или в декартовых координатах (так как $\rho\cos\varphi=x$) будем иметь $x=\dfrac{l^2-a^2}{2b}$; т. е. абсцисса есть величина постоянная; соответствующая линия есть прямая, перпендикулярная к полярной оси.



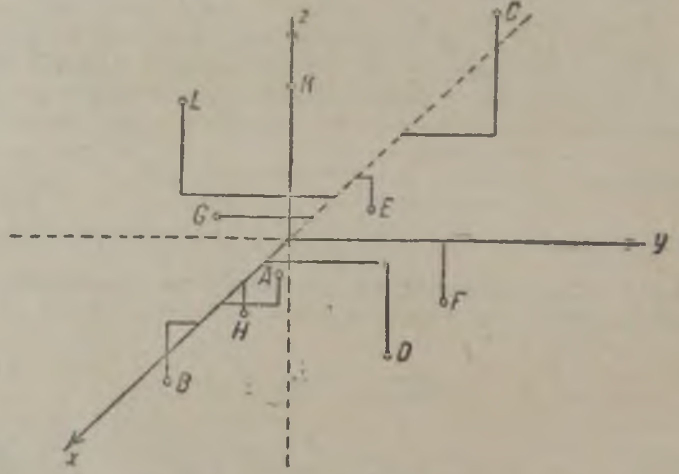

Черт. 144.

# ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

**695.** См. черт. 145. **696.** $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;\ 0\right)$, $\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;\ 0\right)$, $\left(0;\ -\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;\ a\right)$, $\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ a\right)$, $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;\ a\right)$, $\left(0;\ -\frac{a\sqrt{2}}{2};\ a\right)$. **697.** Симметричные относительно начала координат: $(-3;\ +1;\ -2)$ и $(-a,\ -b,\ -c)$.

| Симметричные относительно плоскости | Для точки $P$ | Для точки $M$ | Симметричные относительно оси | Для точки $P$ | Для точки $M$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(xy)$ | $+3; -1; -2$ | $a, \quad b, -c$ | $x$ | $+3; +1; -2$ | $a, -b, -c$ |
| $(yz)$ | $-3; -1; +2$ | $-a, \quad b, \quad c$ | $y$ | $-3; -1; -2$ | $-a, \quad b, -c$ |
| $(zx)$ | $+3; +1; +2$ | $a, -b, \quad c$ | $z$ | $-3; +1; +2$ | $-a, -b, \quad c$ |

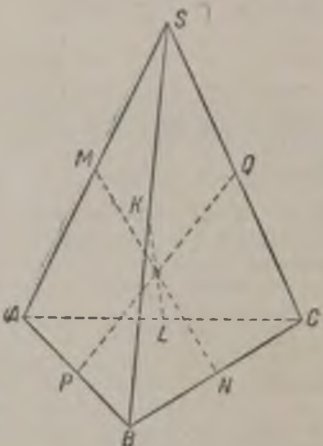
**698.** a) На плоскости, которая делит пополам двугранный угол между плоскостями координат $xOz$ и $zOy$; b) на пересечении плоскостей, делящих пополам двугранные углы между $(xz)$ и $(zy)$ и между $(xy)$ и $(xz)$. **699.** Апликаты точек поверхности вычисляются по формуле: $z = xy$. Плоскости, параллельные плоскости $(yz)$, пересекают поверхность по прямым линиям, пересекающим ось $x$. В начальном положении, когда секущая плоскость совпадает с пло-




Черт. 145.

скостью $(yz)$, линия пересечения совпадает с осью ординат; потом, по мере удаления плоскости от начала координат, прямая постепенно меняет своё направление и поворачивается на прямой угол, пока $x$ изменяется от нуля до бесконечности. Такую же серию прямых мы получаем, пересекая поверхность плоскостями, параллельными плоскости $(xz)$. Линии пересечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости $(xy)$, суть ветви равносторонних гипербол, асимптоты которых параллельны оси $x$ и оси $y$; оси этих гипербол возрастают по мере удаления секущей плоскости от плоскости $(xy)$. **700.** $OA=13$; $d_x=5$; $d_y=4\sqrt{10}$; $d_z=3\sqrt{17}$. **701.** $M(-6; -4; +3)$. **702.** $\cos\alpha={}^3/_7$; $\cos\beta={}^2/_7$; $\cos\gamma={}^6/_7$; $\cos\alpha_1=$ $=\cos\beta_1=\cos\gamma_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. **703.** $R=15$; $\alpha=\arccos{}^2/_3$; $\beta=\arccos{}^1/_3$; $\gamma=\arccos{}^2/_3$. **704.** $45^\circ$ или $135^\circ$. **705.** Условиям задачи удовлетворяют две точки: $M_1(+4\sqrt{2}; +4; +4)$ и $M_2(+4\sqrt{2}; -4; +4)$. **706.** $\cos\varphi_1=\frac{2\sqrt{10}}{11}$; $\cos\varphi_2=\frac{3\sqrt{13}}{11}$; $\cos\varphi_3=\frac{\sqrt{85}}{11}$, причём $\varphi_1=\frac{\pi}{2}-\gamma$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\varphi_3=\frac{\pi}{2}-\alpha$. **707.** $\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3=2$. Указание. Это соотношение равносильно следующему: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+$ $+\sin^2\gamma=2$. **708.** a) $\rho_x^2+\rho_y^2+\rho_z^2=\rho^2$; b) $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=2\rho^2$. **709.** $\cos\alpha'=$ $=\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$; $\cos\beta'=\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$; $\cos\gamma'=0$. **711.** $AB=3$; $\cos\alpha={}^2/_3$, $\cos\beta=-{}^2/_3$; $\cos\gamma=-{}^1/_3$. **712.** $X=\pm12$, $Y=\pm9$, $Z=0$. Конец вектора может оказаться при указанных условиях в четырёх различных точках: $B_1(+15; +11; +7)$, $B_2(+15; -7; +7)$, $B_3(-9; +11; +7)$, $B_4(-9; -7; +7)$. Решение. Определяем прежде всего косинусы углов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Согласно условию задачи мы имеем: $\sin\alpha=3\lambda$, $\sin\beta=4\lambda$ и $\sin\gamma=5\lambda$. Возвышаем эти равенства в квадрат и складываем их; тогда мы получим $2=50\lambda^2$ (см. задачу 707), откуда $\lambda=\pm{}^1/_5$. Так как положительное направление вращения в пространстве не установлено, то мы можем считать, что угол между двумя направленными прямыми не превышает $180^\circ$, а потому ограничимся рассмотрением только положительного значения $\lambda=+{}^1/_5$. Тогда мы получим: $\sin\alpha={}^3/_5$, $\sin\beta={}^4/_5$ и $\sin\gamma=1$, откуда находим, что $\cos\alpha=\pm{}^4/_5$, $\cos\beta=\pm{}^3/_5$ и $\cos\gamma=0$. Проектируя силу $R=15$ на оси координат, получим её составляющие: $X=$ $=15\cdot\cos\alpha=\pm12$, $Y=\pm9$ и $Z=0$. Но эти же составляющие равны разностям одноимённых координат концов вектора, изображающего силу $R$, т. е. $x_2-x_1=\pm12$, $y_2-y_1==\pm9$, $z_2-z_1=0$. Зная координаты начала вектора ($x_1=3$, $y_1=2$ и $z_1=7$), вычисляем координаты конца, причём при различных комбинациях знаков получим четыре решения. **713.** $\cos\alpha={}^7/_{11}$; $\cos\beta={}^6/_{11}$; $\cos\gamma=\pm{}^6/_{11}$; $Z=\pm6$; $B_1(+9; +5; +11)$, $B_2(+9; +5; -1)$. **714.** $(0; 0; +{}^{14}/_9)$. **715.** $M(0; +1; -2)$. **716.** $(+2; +1; -2)$; $r=3$. Указание. Определяем центр как точку, равноудалённую от указанных четырёх точек. **717.** $\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}; +\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0; +\frac{1}{\sqrt{2}}; +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, если тетраэдр расположен в первом октанте. **718.** $\cos\varphi=\cos\alpha\cdot\cos\alpha'$. **719.** $\varphi=60^\circ$. **720.** $\cos\varphi={}^{20}/_{21}$. **721.** $\cos\alpha={}^3/_5$; $\cos\beta={}^4/_5$; $\cos\gamma=0$. Указание. Вычисляем направляющие косинусы прямой $AB$: $\cos\alpha' = -{}^4/_5$; $\cos\beta' = {}^3/_5$; $\cos\gamma' = 0$; направляющие косинусы оси $z$ следующие: $\cos\alpha'' = \cos\beta'' = 0$, $\cos\gamma'' = 1$. Если мы обозначим через $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ углы, образованные искомой прямой с осями координат, то вследствие условий перпендикулярности их косинусы удовлетворяют двум условиям: $-{}^4/_5\cos\alpha + {}^3/_5\cos\beta = 0$ и $1\cdot\cos\gamma = 0$.

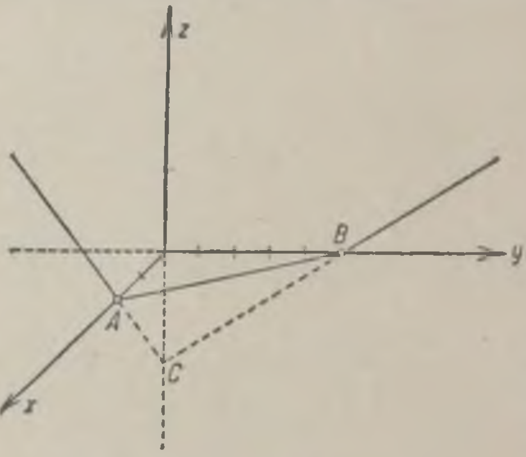
**723.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 \cos\beta_2 \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 \cos\beta_3 \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$ Указание. Искомое условие мы получим, выразив аналитически, что существует направление $(\alpha, \beta, \gamma)$, перпендикулярное к каждой из данных прямых (направление перпендикуляра к плоскости, их содержащей). Условие это выполняется и тогда, когда прямые лежат не в одной, а в параллельных плоскостях. **724.** $\pi ab$. Указание. Оси эллипса являются проекциями двух перпендикулярных диаметров круга, из которых один параллелен линии пересечения плоскости круга и плоскости эллипса (проектируется без изменения своей величины), а другой вместе со своей проекцией (малой осью эллипса) образует линейный угол $\varphi$, равный углу между указанными плоскостями. Отсюда $\cos\varphi = \frac{b}{a}$, и мы можем вычислить площадь эллипса как проекции данного круга. **725.** $S = 3{,}5$ кв. ед. Указание. Пользуемся проекциями искомой площади эллипса на три координатные плоскости.



Черт. 146.

**726.** $S = 9$ кв. ед. Указание. Предварительно вычисляем площади проекций данного треугольника на три координатные плоскости. **727.** Указание. Найти координаты середин сторон косого четырёхугольника и направление прямых, их соединяющих. **728.** Указание. Проверить, что середины отрезков $PQ$, $MN$ и $KL$ имеют одинаковые координаты, т. е. что они совпадают (черт. 146). **729.** $C(+4;\ -5;\ -2)$. **730.** $A(+{}^{14}/_3;\ -8;\ +12)$; $B({}^{11}/_3;\ +7;\ -13)$ и остальные точки деления: $D(+{}^4/_3;\ -2;\ +2)$; $E(-{}^1/_3;\ +1;\ -3)$. **731.** $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$; $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$; $\bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$. Указание. Центр тяжести тетраэдра лежит на прямой, соединяющей любую из вершин тетраэдра с центром тяжести противолежащей грани, и делит отрезок между этими точками в отношении 3:1. **732.** $\lambda_1 = {}^7/_2$; $\lambda_2 = {}^1/_5$; $\lambda_3 = -{}^1/_2$. **733.** Данные прямые пересекаются в точке $(-{}^8/_3;\ +{}^5/_2;\ +11)$. Решение. Если прямые $AB$ и $CD$ пересекаются, то существует точка, лежащая одновременно на обеих прямых. Обозначим через $\lambda$ отношение, в котором искомая точка делит отрезок $AB$, и через $\mu$ отношение, в котором она делит отрезок $CD$; тогда координаты этой точки могут быть выражены двояким образом, и, приравнивая эти выражения, мы получим: $-\frac{3}{1+\lambda}=\frac{2+4\mu}{1+\mu}$ (1); $\frac{5}{1+\lambda}=\frac{-1-3\mu}{1+\mu}$ (2) и $\frac{15+7\lambda}{1+\lambda}=\frac{4}{1+\mu}$ (3). Итак, если существует точка пересечения данных двух прямых, то должны существовать два числа $\lambda$ и $\mu$, удовлетворяющих этим трём уравнениям. Деля (1) на (2), исключаем $\lambda$ и получим: $\mu=-{}^{7}/_{11}$ и $\lambda=1$. Эти значения параметров удовлетворяют и последнему уравнению. Вставляя их в выражения искомых координат, вычисляем эти последние. **734.** Данные четыре точки лежат в одной плоскости; кроме того, точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой. Указание. Чтобы решить эту задачу, достаточно проверить, пересекаются ли прямые $AB$ и $CD$. **735.** (0; 0; 0), (+7; −1; +3), (+11; −4; +2) и (+6; −3; −1). Указание. Определяем первоначальное положение центра тяжести (см. задачу 731): $\bar{x}=-1$; $\bar{y}=1$; $\bar{z}=-1$. Задача сводится к такому перенесению начала координат, при котором точка, имевшая координаты (−1; +1; −1), получит новые координаты (+6; −2; +1). **736.** $x=-x'+a$; $y=-y'+a$; $z=-z'+a$, где $a$ — ребро куба. **737.** $3x^2+y^2-2zx+2=0$. **738.** $z=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$. Указание. Формулы преобразования имеют следующий вид: $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$; $y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ и $z=z'$. **739.** a) $x=z'$; $y=x'$, $z=y'$; b) $x={}^{2}/_{3}x'-{}^{1}/_{3}y'+{}^{2}/_{3}z'$; $y={}^{2}/_{3}x'+{}^{2}/_{3}y'-{}^{1}/_{3}z'$; $z=-{}^{1}/_{3}x'+{}^{2}/_{3}y'+{}^{2}/_{3}z'$. Указание. Поворот на 120° есть треть полного оборота; при таком повороте ось абсцисс перейдёт в ось ординат, ось ординат — в ось апликат, и эта последняя—в ось абсцисс. Поворот на 60° есть половина предыдущего поворота; ось $x'$ образует равные углы с осями $x$ и $y$ ($\alpha=\beta$) и лежит в одной плоскости с осью вращения и осью $z$; следовательно, $\gamma=2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$, где $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ есть угол между диагональю куба и его ребром. **740.** a) Сферическая поверхность с центром в начале координат и радиусом $R=1$; b) круглый цилиндр, ось которого совпадает с осью $z$; направляющая окружность имеет радиус $r=1$; c) две плоскости, параллельные плоскости $(yz)$ и проходящие по обе стороны от неё на расстоянии, равном единице; d) совокупность двух плоскостей: $x-y=0$ и $x+y=0$, делящих двугранный угол между плоскостями $(xz)$ и $(yz)$ пополам; e) поверхность, имеющая только одну действительную точку,— начало координат; f) все действительные точки этой поверхности лежат на одной прямой — на оси $z$; g) плоскость $(yz)$, дважды взятая; h) совокупность всех трёх координатных плоскостей: $x=0$, $y=0$ и $z=0$;

i) плоскость, проходящая через ось $x$ и наклонённая к плоскости $(xy)$ под углом $\frac{\pi}{6}$. (Цилиндрическая поверхность, имеющая прямолинейную направляющую.) **741.** a) Окружность, расположенная в плоскости, параллельной плоскости $(xz)$; центр её имеет координаты $(+1; -1; 0)$ и радиус $r=4$; b) гипербола, плоскость которой параллельна плоскости $(yz)$; центр гиперболы имеет координаты $(+2; 0; 0)$; действительная ось параллельна оси $y$ и равна 6; мнимая ось параллельна оси $z$ и равна 4; c) парабола, расположенная в плоскости, делящей двугранный угол между плоскостями $(xz)$ и $(yz)$ пополам; вершина параболы совпадает с началом координат, ось параболы совпадает с осью $z$, и параметр её $p=1$; d) две прямые, которые лежат в плоскости $(xy)$, проходят через начало координат и образуют с осью $x$ углы в $60^\circ$ и $120^\circ$. Указание. c) Исследование кривой затрудняется тем, что плоскость кривой $(x=y)$ не параллельна ни одной из координатных плоскостей. Устранить это неудобство можно, преобразовав систему координат, а именно, повернув плоскость $(xz)$ около оси $z$ на угол $45^\circ$ до совпадения с плоскостью кривой. **742.** Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Указание. Уравнение проектирующего цилиндра мы получим, исключив $z$ из двух данных уравнений. **743.** Эллипс: $\left\{\begin{aligned} {}^1/_4(x-1)^2+z^2&=1; \\ y&=0. \end{aligned}\right\}$ Указание. Проекцией кривой на плоскость служит линия пересечения этой плоскости с цилиндром, проходящим через эту кривую и имеющим образующие, перпендикулярные к плоскости проекции. **744.** $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-6)^2=49$. **745.** Окружность: $\left\{\begin{aligned} (x-5)^2+(y-2)^2+(z+1)^2&=9; \\ x&=4. \end{aligned}\right\}$ Указание. Точки искомого геометрического места обладают двумя независимыми друг от друга свойствами; поэтому это геометрическое место должно быть линией. **746.** $6x+10y-10z+5=0$. Указание. Искомая плоскость является геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных точек. **747.** Прямая линия: $\left\{\begin{aligned} 10x+2z&=35; \\ y&=0. \end{aligned}\right\}$ **748.** $2pz=x^2+y^2$. Эта поверхность получается от вращения параболы $x^2=2pz$ вокруг своей оси и называется параболоидом вращения. Указание. Расстояние данной точки от данной плоскости обозначаем через $p$. Перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, принимаем за ось $z$. Плоскость $(xy)$ проводим через середину этого перпендикуляра. **749.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$. Указание. Эта поверхность получается от вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг фокальной оси и называется эллипсоидом вращения. **750.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a=MA$, $b=MB$ и $c=MC$. Указание. Так как точка $A$ находится всё время на плоскости $(yz)$, то проекция постоянного отрезка $AM=a$ на ось обсцисс равна абсциссе точки $M$, т. е. $x = a \cdot \cos\alpha$. Точно так же проектируем отрезки $BM = b$ и $CM = c$ соответственно на оси $y$ и $z$. Для исключения из полученных равенств направляющих косинусов стержня пользуемся соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Полученная поверхность называется трёхосным эллипсоидом. **751.** Указание. Возьмём, например, плоскость, параллельную плоскости $(xy)$, т. е. положим $z = h$. Решая это уравнение совместно с уравнением эллипсоида, получим: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$. Приводим оба члена в правой части к общему знаменателю и делим всё уравнение на свободный член; тогда получим: $\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2-h^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2-h^2)}{c^2}} = 1$, или $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}\right)^2} = 1$. Если $|h| < c$, искомая линия пересечения есть действительный эллипс. Если $|h| = c$, эллипс распадается на две мнимые прямые с действительной точкой пересечения. Если $|h| > c$, эллипс — мнимый. **752.** $y(x + z - a) = xz$. Решение. Обозначим через $M(x, y, z)$ любую точку искомой поверхности. Эта точка обладает тем свойством, что она лежит на одной прямой с тремя точками, принадлежащими соответственно трём рёбрам куба, а именно: с точками $A(a, y_1, 0)$, $B(x_2, a, a)$ и $C(0, 0, z_3)$. Иначе условие можно выразить так: прямые $MA$, $MB$ и $MC$ имеют одно и то же направление, или аналитически: $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = (x - a) : (y - y_1) : z = (x - x_2) : (y - a) : (z - a) = x : y : (z - z_3)$. Из этих пропорций выпишем только те отношения, которые не содержат промежуточных параметров $x_2$, $y_1$ и $z_3$, а именно: $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{y-a}{z-a}$; $\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{z}{x-a}$ и $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{x}{y}$. Перемножив эти равенства, исключим направляющие косинусы стержня и получим уравнение, которому должны удовлетворять координаты любой точки поверхности: $\frac{x(y-a)z}{y(x-a)(z-a)} = 1$, или после упрощений получим уравнение, указанное в ответе. **753.** Плоскость проходит через точки $A$, $B$, $C$ и $F$. **754.** $(+5; +3; +2)$. Указание. Так как точка перемещается параллельно оси $y$, то её абсцисса и апликата остаются неизменными. Задача сводится к нахождению точки, лежащей на данной плоскости и имеющей $x = +5$ и $z = +2$. **755.** Указание. Если обозначить через $(x_1, y_1, z_1)$ и $(x_2, y_2, z_2)$ координаты точек прямой, удовлетворяющие данному уравнению, то координаты любой другой точки этой прямой могут быть выражены следующим образом: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ и $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$. **756.** a) Плоскость параллельна оси $y$; b) плоскость параллельна плоскости $(xz)$; c) плоскость параллельна оси $z$; d) плоскость проходит через начало координат; e) плоскость проходит через ось абсцисс. **757.** a) $y+5=0$; b) $x+3y=0$; c) $9v-z-2=0$. **758.** a) $-6$; $4$; $12$; b) $3$; $15$; $-5$; c) $1$; $-1$; $1$; d) $-6$; $\infty$; $^3/_2$ (плоскость параллельна оси $y$); e) $0$; $0$; $0$; f) $7$; $\infty$; $\infty$ [плоскость параллельна плоскости $(yz)$]. **759.** См. черт. 147. **760.** $a=3$. Указание. Так как данная плоскость отсекает на осях $x$ и $y$ положительные отрезки, а на оси $z$ — отрицательный, то куб помещается в пятом октанте, и вершина куба, лежащая на данной плоскости, имеет координаты $x=y=-z=a$, где $a$ — искомое ребро куба. **761.** $x+y+z-3=0$. **762.** $\frac{x}{4}-\frac{y}{2\sqrt{5}}+\frac{z}{3}=1$. **763.** a) $^2/_{11}x-{}^9/_{11}y+{}^6/_{11}z-2=0$; b) $-{}^2/_3x-{}^2/_{15}y+{}^{11}/_{15}z-4=0$; c) $-{}^6/_{11}x+{}^6/_{11}y+{}^7/_{11}z-3=0$. **764.** $p=10$. **765.** $6x+2y+3z\pm 42=0$. **766.** $\cos\alpha=-{}^2/_3$; $\cos\beta=+{}^1/_3$; $\cos\gamma=-{}^2/_3$. **767.** $\cos\alpha={}^{10}/_{15}$; $\cos\beta={}^2/_{15}$; $\cos\gamma={}^{11}/_{15}$. **768.** $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Указание. Искомый угол равен углу между перпендикуляром к данной плоскости и осью $x$. **769.** $P(-12; -4; +18)$. Указание. Искомую точку легко определить по радиусу-вектору ($\rho=2p$) и направляющим косинусам его, так как он перпендикулярен к данной плоскости. **770.** $3x-6y+2z-49=0$. **771.** a) $d={}^3/_2$; b) $d=0$, точка лежит на плоскости; c) $d=-4$. **772.** $h_s=3$. **773.** $6x-7y+6z-94=0$. **774.** $A'(+{}^9/_7; -{}^{13}/_7; +{}^{17}/_7)$. Указание. В этой задаче требуется найти точку $A'$, симметричную с точкой $A$ относительно данной плоскости. Вычисляем расстояние точки $A$ от этой плоскости; $d=3$; следовательно, $AA'=2d=6$. Направление отрезка $AA'$ противоположно направлению перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, так как $d>0$, т. е. точка $A$ и начало координат лежат по разные стороны от плоскости. Зная величину отрезка, его начало и направление, можно найти его конец. **775.** a) $\varphi=\arccos 0{,}7$; b) плоскости перпендикулярны друг к другу; c) плоскости параллельны между собой. **776.** $\varphi=\arccos{}^4/_{13}$. **777.** a) $x-4y+5z+15=0$; b) $2x-y-z=0$; c) $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$. **778.** $x+3y=0$ и $3x-y=0$.



Черт. 147.

**779.** $x=\frac{3\sqrt{5}x'+4\sqrt{5}y'+10z'+9}{15}$; $y=\frac{\sqrt{5}y'-2z'-2}{3}$; $z=\frac{-6\sqrt{5}x'+2\sqrt{5}y'+5z'+7}{15}$. Указание. Новые координаты $(x', y', z')$ любой точки $(x, y, z)$ равны расстояниям этой точки до данных плоскостей, т. е. $x' = \frac{3x - 6z + 1}{3\sqrt{5}}$; $y' = \frac{4x + 5y + 2z}{3\sqrt{5}}$ и $z' = \frac{2x - 2y + z - 3}{3}$, причём знаки выбраны согласно последнему условию. Разрешая эти уравнения относительно старых координат, получим искомые формулы. **780.** $x + 2y + 2z - 9 = 0$ или $y - 2 = 0$. Указание. Удобнее искать нормальное уравнение плоскости. Для определения четырёх параметров: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и $p$ имеем три известных расстояния и соотношение между направляющими косинусами прямой. **781.** $x + 2y - 6z + 3 = 0$ и $4x + y + z - 1 = 0$. Указание. Искомые плоскости представляют геометрическое место точек, равноудалённых от данных плоскостей. Для точек одной из искомых плоскостей эти расстояния равны по величине и по знаку, для точек другой плоскости расстояния равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки. **782.** $M(0; 0; +3)$; Указание. Существует ещё одна точка, а именно $M_1(0; 0; -{}^5/_2)$, расстояния которой от двух данных плоскостей равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. **783.** $M(+{}^2/_9; +{}^2/_9; -{}^2/_9)$. Указание. В ответе дан центр той сферы, которая расположена внутри данного тетраэдра. Существуют другие сферы, которые тоже касаются граней данного тетраэдра, но расположены вне его. **784.** $d = 4$. Указание. Так как начало координат лежит между данными параллельными плоскостями, то искомое расстояние определяется как сумма расстояний каждой плоскости от начала координат: $d = p_1 + p_2 = 1 + 3 = 4$. Иначе искомое расстояние можно получить, вычислив расстояние любой точки одной из плоскостей от другой плоскости. **785.** $3x - 6y - 2z + 35 = 0$ и $3x - 6y - 2z - 7 = 0$. **786.** $4x - y - 14z = 0$. **787.** $x - 3y - z + 2 = 0$ $(ABC)$; $x - 4y - z + 2 = 0$ $(ABD)$; $2x - 8y - 3z + 6 = 0$ $(ACD)$; $2x - 11y - 3z + 9 = 0$ $(BCD)$. **788.** $V = {}^1/_2$ куб. ед. **789.** a) Нельзя; b) можно. **790.** a) $(+3; -1; 0)$; b) точки пересечения всех трёх плоскостей нет, так как I и III плоскости параллельны между собой; c) точка пересечения неопределённая: все три плоскости проходят через одну и ту же прямую. **791.** a) Все четыре плоскости проходят через одну и ту же точку; b) данные плоскости не имеют общей точки. **792.** a) $9x + 3y + 5z = 0$; b) $23x - 32y + 26z - 17 = 0$; c) $21x + 14z - 3 = 0$; d) $7x + 14y + 5 = 0$. Указание. Воспользоваться уравнением пучка плоскостей. **793.** $41x - 19y + 52z - 68 = 0$ и $33x + 4y - 5z - 63 = 0$. **794.** $3x + 4y - z + 1 = 0$ и $x - 2y - 5z + 3 = 0$. **795.** $15x - 3y - 26z - 6 = 0$. Указание. Искомая плоскость принадлежит пучку плоскостей, определяемому данной плоскостью и плоскостью $(xy)$. **796.** $3x - 4y - 5 = 0$ и $387x - 164y - 24z - 421 = 0$. Указание. Плоскости, касающиеся сферы, проходят на расстоянии, равном радиусу, от центра сферы. **797.** $2x + 2y - 2z - 1 = 0$. **797*.** Плоскость $(xz)$. **798.** $x + 20y + 7z - 12 = 0$ и $x - z + 4 = 0$. **799.** $A = {}^{13}/_3$; $D = {}^{23}/_3$. **800.** a) $2y - z = 0$; b) $y - 3 = 0$; c) $3x - y = 0$. **801.** a) Прямая проходит через начало координат; b) прямая параллельна оси $z$; c) прямая параллельна плоскости $(xz)$; d) прямая параллельна оси $x$; e) прямая совпадает с осью $y$; f) прямая перпендикулярна оси $x$ и пересекает её; g) прямая лежит на плоскости $(yz)$. **802.** $D=3$. Указание. Для выполнения условия задачи нужно, чтобы обе плоскости, определяющие прямую, пересекали ось $z$ в одной и той же точке. **803.** $B=-6$; $D=-27$. Указание. Если прямая лежит в плоскости $(xy)$, то она пересекает оси абсцисс и ординат (ср. задачу 802). Можно также воспользоваться тем, что плоскость $(xy)$ принадлежит пучку плоскостей: $x-2y+z-9+k(3x+By+z+D)=0$. **804.** a) $A=0$ и $A_1=0$, т. е. обе плоскости параллельны оси $x$; b) $\frac{B}{B_1}=\frac{D}{D_1}$, т. е. обе плоскости пересекают ось $y$ в одной и той же точке $x=0$, $y=-\frac{D}{B}=-\frac{D_1}{B_1}$, $z=0$; c) $C=D=0$ и $C_1=D_1=0$, т. е. обе плоскости проходят через ось $z$; d) $\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$. Если прямая параллельна плоскости $(yz)$, то в пучке проходящих через неё плоскостей $Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$ должна существовать плоскость, параллельная плоскости $(yz)$, т. е. $B+\lambda B_1=0$ и $C+\lambda C_1=0$ при одном и том же значении $\lambda$[1]; e) $\frac{A}{A_1}=\frac{C}{C_1}=\frac{D}{D_1}$, потому что пучок $Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$ содержит плоскость $(xz)$, т. е. при одном и том же значении $\lambda$ мы имеем: $A+\lambda A_1=0$, $C+\lambda C_1=0$ и $D+\lambda D_1=0$; f) $D=D_1=0$, т. е. обе плоскости проходят через начало координат. **805.** $11x-4y+6=0$; $9x-z+7=0$ и $36y-11z+23=0$. **806.** $\begin{cases} 2x+3y+4=0; \\ z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y+2z+2=0; \\ x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-3z+7=0; \\ y=0. \end{cases}$ **807.** $A(-1;\ +7{,}5;\ 0)$. $B(+2;\ 0;\ +3)$ и $C(0;\ +5;\ +1)$. **808.** $\begin{cases} 4x-3y+z-3=0; \\ 2x+3y+z-6=0. \end{cases}$ Указание. Искомая проекция — линия пересечения плоскости проекции $(2x+3y+z-6=0)$ с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через данную прямую (см. задачу 792, d). **809.** $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. **810.** $\frac{x}{4}=\frac{z-2}{3}$, $y=0$; $x-4=\frac{y}{3}=\frac{z-5}{-5}$; $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-2}$; $-x=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{-4}$; $\frac{x-4}{-5}=\frac{y}{4}=\frac{z-5}{-7}$; $\frac{x-5}{-6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-2}$. **811.** Данные три точки лежат на одной прямой линии $\frac{x-3}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$. **812.** $x_3=0$; $y_3=\frac{x_2y_1}{x_2-x_1}$;

---

[1]) Это же условие мы могли бы получить, пользуясь выражениями для угловых коэффициентов прямой, данными формулой (11).

$z_3 = -\frac{x_1 z_2}{x_2 - x_1}$. **813.** a) $\cos\alpha = {}^4/_{13}$; $\cos\beta = {}^3/_{13}$; $\cos\gamma = {}^{12}/_{13}$; b) $\cos\alpha = {}^{12}/_{25}$; $\cos\beta = {}^9/_{25}$; $\cos\gamma = {}^{20}/_{25}$. **814.** $x - 1 = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = -(z-3)$.

**815.** $\cos\varphi = {}^{72}/_{77}$. **816.** $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. **817.** $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}$. Указание. При составлении уравнений прямой мы воспользовались точкой (0; 0; —3), лежащей на этой прямой, но можно было бы взять и другую точку этой же прямой. Что касается угловых коэффициентов, то они должны быть пропорциональны указанным знаменателям $m:n:p = 9:5:1$. **818.** $\cos\alpha = {}^6/_{11}$; $\cos\beta = {}^7/_{11}$; $\cos\gamma = {}^6/_{11}$.

**819.** $\cos\varphi = {}^{98}/_{195}$. **820.** a) $\begin{cases} x - 2 = 0; \\ y + 5 = 0; \end{cases}$ b) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}$;

c) $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$. **821.** $\begin{cases} 3x + z = 0; \\ y = 0, \end{cases}$ или, сохраняя каноническую форму: $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}$. **822.** a) и b) пересекаются. Указание. В примере b) можно заменить данные системы уравнений каноническими уравнениями тех же прямых или применить признак прохождения четырёх плоскостей через одну точку:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**823.** $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$. Указание. Так как искомая прямая проходит через точку $A(+2;\ +3;\ +1)$, то её уравнения имеют вид: $\frac{x-2}{m} = \frac{y-3}{n} = \frac{z-1}{p}$. Угловые коэффициенты, или, вернее, их отношения, определяем из условия перпендикулярности к данной прямой $(2m - n + 3p = 0)$ и условия пересечения с данной прямой:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$

или $8m - 11n - 9p = 0$. **824.** $\frac{x}{33} = \frac{y}{-26} = \frac{z}{27}$. **825.** $\frac{x-4}{13} = \frac{y}{37} = \frac{z+1}{58}$. **826.** $\frac{x}{8} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+9}{1}$. Указание. Угловые коэффициенты прямой известны из условия параллельности: $m:n:p = 8:7:1$. Из условия пересечения искомой прямой с двумя данными прямыми нужно определить координаты $(a, b, c)$ какой-нибудь точки искомой прямой. Одну из этих координат можно взять произвольно; например, можно положить $a = 0$, т. е. выбрать точку пересечения прямой с плоскостью $(yz)$; тогда из двух условий пересечения можно определить две недостающие координаты $b$ и $c$. **827.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$. Указание. Уравнение искомой прямой содержит четыре неизвестных параметра: два отношения угловых коэффициентов и две координаты какой-нибудь точки на прямой (третьей координате можно дать произвольное значение). Для определения этих параметров имеем четыре уравнения: два выражают условие перпендикулярности искомой прямой к двум данным, два других выражают условие пересечения искомой прямой с двумя данными прямыми. **828.** (0; 0; — 2). Решение. Обозначим три равных отношения, входящих в уравнения данной прямой, через $\rho$, т. е. $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}=\rho$; тогда $x=4\rho+12$, $y=3\rho+9$ и $z=\rho+1$. Вставляя эти значения координат в уравнение плоскости, получим: $26\rho+78=0$, откуда $\rho=-3$, и окончательно, пользуясь найденными выражениями для координат, имеем: $x=0$; $y=0$; $z=-2$. **829.** a) Прямая параллельна плоскости; b) точка пересечения неопределённая: прямая лежит в плоскости; c) $(+2; +3; +1)$.

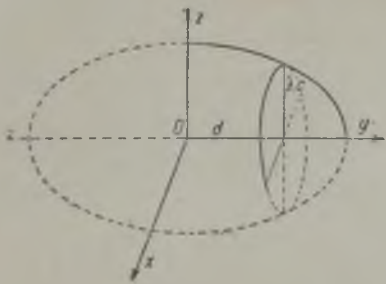
**830.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{-7}=\frac{z-2}{1}$. **831.** $A=-1$. **832.** $A=4$; $B=-8$.

**833.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$. **834.** $4x+5y-2z=0$. **835.** $(+5; -1; 0)$. Указание. Из точки $A$ опускаем перпендикуляр на данную плоскость; его уравнения будут: $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}$. Потом ищем точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью. Найденная таким образом точка и есть искомая проекция. **836.** a) Лежит; b) и c) не лежат. **837.** $8x-9y-22z-59=0$. **838.** $11x-17y-19z+10=0$. **839.** $\frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$. **840.** $8x-22y+z-48=0$. **841.** $5x+7y+9z-44=0$. **842.** $17x-13y-16z-10=0$. **843.** $16x-27y+14z-159=0$. **844.** $23x-16y+10z-153=0$. **845.** $x+y-z+3=0$. Указание. Задача возможна только потому, что данная прямая параллельна данной плоскости. **846.** Нельзя, так как данная прямая пересекает плоскость в конечной точке, а потому и всякая плоскость, через неё проходящая, пересечёт данную плоскость. **847.** $\frac{x-1}{68}=\frac{y}{70}=\frac{z-7}{-67}$.

**848.** $d=\sqrt{22}$. Указание. Через данную точку проводим плоскость, перпендикулярную к данной прямой (она изобразится уравнением: $4x+3y+2z-69=0$); затем ищем точку пересечения этой плоскости с данной прямой $(+10; +7; +4)$. Расстояние между найденной и данной точками и будет искомое расстояние точки от прямой. **849.** $M(+3; -1; 0)$. **850.** $M(+2; -3; +5)$. **851.** $(+2; +9; +6)$. Указание. Проводим через точку $P$ плоскость, перпендикулярную к данной прямой, и ищем точку её пересечения с этой прямой. Найденная точка есть середина отрезка между данной точкой $P$ и искомой точкой. **852.** $d=3$. Указание. Для решения задачи достаточно найти расстояние любой точки одной прямой от другой прямой, например расстояние точки $(+2; -1; 0)$ от второй из заданных прямых. **853.** $d=7$. Указание. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми, не лежащими в одной плоскости, измеряется длиной их общего перпендикуляра; но составлять уравнение общего перпендикуляра и находить точки его пересечения с обеими прямыми было бы довольно сложно. Мы достигнем цели проще, вычислив расстояние между двумя параллельными плоскостями, проведёнными через данные прямые. Достаточно провести через первую прямую плоскость, параллельную второй прямой, и вычислить расстояние от этой плоскости до точки, заданной на второй прямой. **854.** $d=13$. **855.** $\frac{x-2}{74}=\frac{y}{57}=\frac{z}{-110}$. **856.** $\frac{x-4}{32}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-5}$ и $\frac{x-4}{4}=\frac{y-1}{-13}=\frac{z+2}{23}$. **857.** $46x-22y+35z-92=0$. **858.** $d=\sqrt{2/3}$. **860.** a) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36$; b) $x^2+y^2+z^2=49$; c) $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=121$; d) $(x-6)^2+(y+8)^2+(z-3)^2=100$. **861.** $(x-1)^2+(y-5/2)^2+(z-3/2)^2=33/4$. Указание. В уравнение искомой сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ вставляем по очереди вместо текущих координат координаты вершин тетраэдра, так как сфера через них проходит. Получим таким образом четыре уравнения для определения неизвестных параметров $a$, $b$, $c$ и $R$. **862.** $(+1;\ +6;\ 0)$; $r=5$. Указание. Окружность дана как сечение шара плоскостью; центр этой окружности мы получим, опустив перпендикуляр из центра сферы на секущую плоскость и найдя их точку пересечения. Радиус окружности $(r)$ можно вычислить по формуле: $r=\sqrt{R^2-d^2}$, где $R$ — радиус сферы, а $d$ — расстояние центра сферы от секущей плоскости. **863.** $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. Указание. Центр искомой сферы должен лежать на оси $z$ (на перпендикуляре, проведённом через центр плоского сечения к плоскости этого сечения). Поэтому искомое уравнение имеет вид: $x^2+y^2+(z-c)^2=R^2$ и содержит только два параметра: $c$ и $R$. Положив в этом уравнении $z=0$, мы получим уравнение линии пересечения сферы с плоскостью $(xy)$: $\begin{cases} x^2+y^2+c^2=R^2; \\ z=0. \end{cases}$ Сопоставив эти уравнения с данными уравнениями той же линии, получим: $R^2=c^2+16$. Таким образом, уравнение сферы будет содержать только один неизвестный параметр $(c)$, который мы сможем определить из условия прохождения сферы через данную точку $(0;\ -3;\ +1)$. **864.** Эллипс: $\begin{cases} 5x^2+5z^2-8xz-74x+70z+274=0; \\ y=0. \end{cases}$ **865.** a) $(+3;\ -4;\ -1)$, $R=4$; b) $(-1;\ +2;\ 0)$, $R=3$; c) сфера мнимая, так как $R=\sqrt{-1}$; d) $R=0$; только одна действительная точка $(+2;\ -6;\ +1)$; e) $(+1/2;\ -1/3;\ +1)$, $R=2$. **866.** $x^2+y^2+z^2-14x-10y+2z+7=0$. Указание. Искомая сфера принадлежит пучку: $x^2+y^2+z^2-6x-8y-11+\lambda(4x+y-z-9)=0$. Значение параметра $\lambda$ определяем из условия прохождения сферы через данную точку. **867.** $A^2+B^2+C^2=\frac{D^2}{R^2}$. Указание. Искомое условие мы получим, выразив аналитически, что расстояние данной плоскости от центра шара равно радиусу этого шара. **868.** $x-y+2z-3=0$ и $x-y+2z-15=0$. Объяснить, почему эти две плоскости параллельны между собой. Указание. При совместном решении уравнений прямой и сферы удобно ввести параметр $\rho$, равный отношениям, взятым из уравнений прямой. Найдя точки прикосновения, можно воспользоваться общим уравнением касательной плоскости к сфере. **869.** $3y+4z=0$ и $5y-12z=0$. Указание. Уравнение всякой плоскости, проходящей через ось $x$, имеет вид: $By+Cz=0$. Надо найти коэффициенты $B$ и $C$ таким образом, чтобы расстояние этой плоскости от центра сферы $(-5;\ +8;\ -1)$ было равно радиусу (4), т. е. отношение этих коэффициентов определится из уравнения: $\frac{8B-C}{\sqrt{B^2+C^2}}=\pm 4$. **870.** $10x-11y-2z+189=0$; $10x-11y-2z-261=0$. Указание. Уравнение искомых плоскостей имеет вид $10x-11y-2z+D=0$. Свободный член определяется из условия, что касательная плоскость отстоит от центра сферы $(4;\ 0;\ 2)$ на расстоянии радиуса, т. е. из равенства $\frac{40-4+D}{\sqrt{10^2+11^2+2^2}}=\pm 15$. **871.** $(x+5)^2+(y-3)^2+z^2=121$. Указание. Центр искомой сферы находится на пересечении трёх плоскостей: двух плоскостей, перпендикулярных к касательным и проходящих через соответственные точки касания, и плоскости, перпендикулярной к хорде (соединяющей две точки прикосновения) и проходящей через её середину. **872.** $(x-4)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=25$. Указание. Радиус искомой поверхности равен радиусу данной сферы, сложенному с расстоянием между их центрами: $R=r+d$. **873.** Радикальная плоскость: $4x-6y+6z-11=0$. **874.** Радикальная ось: $\begin{cases} 5x-3y+3z+7=0; \\ 2x-4y-2z+1=0. \end{cases}$ Проверить, что радикальная ось трёх шаровых поверхностей перпендикулярна к плоскости их центров. **875.** $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=17$. Указание. Центром искомой сферы служит радикальный центр четырёх данных поверхностей, т. е. точка, обладающая тем свойством, что касательные, проведённые из неё ко всем четырём поверхностям, имеют одинаковую длину. Любая из этих касательных будет равна радиусу искомой сферы. **876.** $2x^2+2y^2-z^2=0$. Решение. Так как образующая искомого конуса проходит через начало координат, то она будет изображена следующими уравнениями: $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{1}$, или $x=mz$ и $y=nz$. Исключив $x$, $y$ и $z$ из этих двух уравнений и из уравнений направляющей, получим следующее соотношение между угловыми коэффициентами образующей: $m^2+n^2={}^1/_2$. В это равенство вставим вместо $m$ и $n$ их значения, заимствованные из уравнений образующей: $m=\frac{x}{z}$ и $n=\frac{y}{z}$; тогда получим искомое уравнение конуса: $\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2={}^1/_2$. **877.** $2y^2+xz-8x=0$. Указание. Направляющая будет дана уравнениями: $\begin{cases} y^2=4x, \\ z=0; \end{cases}$ уравнения

образующей примут следующий вид: $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = z - 8$. Зависимость между угловыми коэффициентами образующей следующая: $2n^2 = -m$. **878.** $18y^2 + 50z^2 + 75xz + 225x - 450 = 0$. Указание. Данный эллипс служит направляющей, данная точка — вершиной искомого конуса. **879.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. **880.** $3x^2 + 123y^2 + 23z^2 - 18xy - 22xz + 50yz + 18x - 54y - 66z + 27 = 0$. **881.** $(y-5x)^2 - 10(x^2+y^2+z^2) = 0$. Решение. Всякая прямая, проходящая через начало координат, изобразится уравнениями: $x = mz$ и $y = nz$. Нам нужно найти зависимость, существующую между угловыми коэффициентами $m$ и $n$ прямой, когда эта прямая касается данной сферы. В случае касания прямая и сфера имеют две слившиеся точки пересечения, а следовательно, при совместном решении их уравнений мы должны получить действительные и равные корни; другими словами, подкоренное количество, которое мы получим при решении квадратного уравнения, определяющего одну из координат точки пересечения после исключения двух других,— это подкоренное количество должно равняться нулю. Составляем его и приравниваем его нулю; тогда получим: $(n - 5m)^2 - 10(m^2 + n^2 + 1) = 0$; это и есть искомое ограничение, наложенное на угловые коэффициенты касательных. Вставляя в это уравнение вместо $m$ и $n$ их значения из уравнений образующей, получим искомое уравнение конуса. **882.** $xy + xz + yz = 0$. Указание. За направляющую искомого конуса можно принять окружность, пересекающую все три оси и расположенную в любой плоскости, образующей равные углы с осями координат. Такая окружность может быть изображена уравнениями: $\begin{cases} (x-a)^2+(y-a^2)+(z-a)^2=6a^2; \\ x + y + z = 3a. \end{cases}$
**883.** Конус $40(x-2)^2 - 9y^2 - 9z^2 = 0$. Указание. Данная прямая пересекает ось $x$ в точке $(+2;\ 0;\ 0)$; значит, искомая поверхность есть конус с вершиной в этой точке. Условие, связывающее угловые коэффициенты образующей, состоит в том, что образующая наклонена под постоянным углом к оси абсцисс. **884.** $(x-3)^2 + y^2 - (z-5)^2 = 0$. **885.** $(x - {}^5/_2 z)^2 + (y - {}^3/_2 z)^2 = 25$. Указание. Уравнения направляющей имеют вид: $\frac{x-a}{5} = \frac{y-b}{3} = \frac{z}{2}$. Соотношение, связывающее параметры $a$ и $b$, следующее: $a^2 + b^2 = 25$. **886.** a) $2y^2 + 2z^2 - 2yz + 12y - 10z - 3 = 0$; b) $(x-y)^2 + 3z^2 - 8(x-y) - 8z - 26 = 0$. **887.** $(2x+z)^2 - 10(2x+z) + 25y^2 = 0$. **888.** $3[(x-z)^2 + (y-z)^2 - 1] - (x+y-2z)^2 = 0$. **889.** $(10x - 5y - 5z + 2)^2 + (-5x + 10y - 5z + 11)^2 + (5x + 5y - 10z + 13)^2 = 294$. Указание. Направляющей цилиндра служит окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной к данным прямым, и проходящая через точки пересечения этой плоскости с данными прямыми. **890.** В плоскости $(xy)$ имеем эллипс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; в плоскости $(yz)$ имеем эллипс $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$; в плоскости $(zx)$ имеем эллипс $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$. Эллипсоид

имеет шесть действительных вершин: $A(+6;\ 0;\ 0)$; $A_1(-6;\ 0;\ 0)$; $B(0;\ +4;\ 0)$; $B_1(0;\ -4;\ 0)$; $C(0;\ 0;\ +3)$; $C_1(0;\ 0;\ -3)$. Длина осей: $2a=12$; $2b=8$; $2c=6$. **891.** Плоскости, параллельные плоскости $(xy)$, пересекают эллипсоид по окружностям; плоскости, параллельные другим координатным плоскостям, пересекают его по эллипсам. Действительные линии пересечения получаются, если секущие плоскости находятся от центра не далее соответствующих вершин. Каждая линия пересечения подобна параллельному главному сечению — оси их пропорциональны. Данная поверхность есть эллипсоид вращения; его ось вращения — ось $z$. **892.** $a:a_1=c:c_1=3:\sqrt{5}$. **893.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Указание. Подвижной эллипс (черт. 148) изображается уравнениями: $\left\{\begin{aligned}\frac{x^2}{(\lambda a)^2}+\frac{z^2}{(\lambda c)^2}&=1;\\ y&=d.\end{aligned}\right\}$ (1) Полуось $\lambda c$ равна значению $z$, вычисленному из уравнения неподвижного эллипса при $y=d$. Произведя вычисления, получим: $\lambda^2=\frac{b^2-d^2}{b^2}$. Исключив из этого равенства и из уравнений подвижного эллипса (1) промежуточные параметры $d$ и $\lambda$, получим уравнение искомой поверхности. **894.** Эллипс: $\left\{\begin{aligned}x^2+2y^2-4x&=0;\\ z&=0.\end{aligned}\right.$ **895.** $(+2;\ 0;\ +1/2)$. Указание. Центр кривой проектируется в центр её проекции. **896.** См. черт. 149, 150, 151 и соответствующие таблицы на стр. 331—332. **897.** Искомая линия состоит из пары прямых, пересекающихся в точке $(+6;\ -2;\ +2)$, т. е. данная плоскость касается поверхности в этой точке. **898.** Две плоскости, параллельные плоскости $(xz)$: $y=\pm\sqrt{18}$, и две плоскости, параллельные плоскости $(yz)$: $x=\pm\sqrt{24}$. Искать плоскости, удовлетворяющие условиям задачи, среди плоскостей, параллельных плоскости $(xy)$, не приходится, так как соответствующее главное сечение — мнимое. **899.** Круглые конусы, оси вращения которых совпадают в примере a) с осью $z$, в примере b) с осью $y$ и в примере c) с осью $x$. При этом в первом примере величина $a$ есть радиус поперечного сечения, проведённого на расстоянии $b$ от вершины ($z=\pm b$, $x^2+y^2=a^2$). **900.** $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Указание. Для решения задачи можно рассмотреть сечение плоскостью $(xz)$ или воспользоваться готовой формулой: $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. **903.** Эллиптический параболоид $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ или гиперболический параболоид $z=\frac{y^2}{2q}-\frac{x^2}{2p}$, в зависимости от того, совпадает ли направление оси подвижной параболы с положительным или отрицательным направлением оси




Черт. 148.

**896.** Сечения однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$.

I. Плоскостями, параллельными плоскости $xy$:

$z=0,\quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1;$

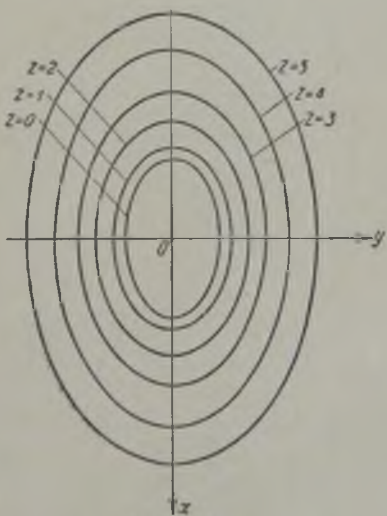
$z=\pm 1,\quad \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1;$

$z=\pm 2,\quad \frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{32}=1;$

$z=\pm 3,\quad \frac{x^2}{117}+\frac{y^2}{52}=1;$

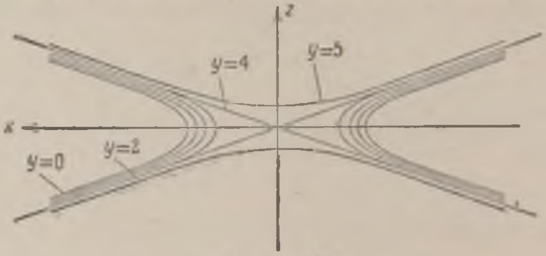
$z=\pm 4,\quad \frac{x^2}{180}+\frac{y^2}{80}=1;$

$z=\pm 5,\quad \frac{x^2}{261}+\frac{y^2}{116}=1.$




Черт. 149.

II. Плоскостями, параллельными плоскости $xz$:



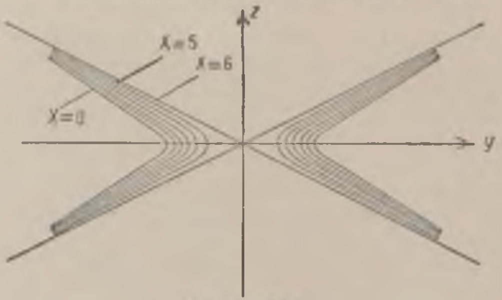

Черт 150.

$y=0,\quad \frac{x^2}{36}-\frac{z^2}{4}=1;$ $\qquad y=\pm 3,\ \frac{x^2}{{}^{63}/_4}-\frac{z^2}{{}^{7}/_4}=1;$

$y=\pm 1,\ \frac{x^2}{{}^{135}/_4}-\frac{z^2}{{}^{15}/_4}=1;$ $\qquad y=\pm 4,\ \frac{x^2}{36}-\frac{z^2}{4}=0;$

$y=\pm 2,\ \frac{x^2}{27}-\frac{z^2}{3}=1;$ $\qquad y=\pm 5-\frac{x^2}{{}^{81}/_4}+\frac{z^2}{{}^{9}/_4}=1.$

III. Плоскостями, параллельными $zy$:




Черт. 151.

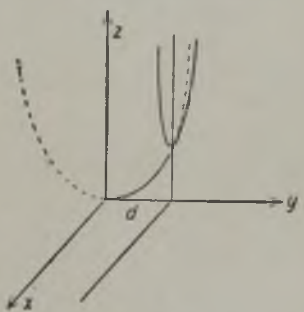
$x=0,\quad \frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1;$ $\qquad x=\pm 4,\ \frac{y^2}{{}^{80}/_9}-\frac{z^2}{{}^{20}/_9}=1;$

$x=\pm 1\ \frac{y^2}{{}^{140}/_9}-\frac{z^2}{{}^{35}/_9}=1;$ $\qquad x=\pm 5,\ \frac{y^2}{{}^{44}/_9}-\frac{z^2}{{}^{11}/_9}=1;$

$x=\pm 2,\ \frac{y^2}{{}^{128}/_9}-\frac{z^2}{{}^{32}/_9}=1;$ $\qquad x=\pm 6,\ \frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=0.$

$x=\pm 3,\ \frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{3}=1;$

неподвижной параболы. Указание. Составляем уравнение подвижной параболы: с этой целью вводим вспомогательный параметр $d$—расстояние плоскости подвижной параболы от плоскости $(xz)$. Вершина параболы будет иметь координаты $\left(0;\ d;\ \frac{d^2}{2q}\right)$ (черт. 152) и уравнения самой параболы: $y = d$ и $x^2 = \pm 2p\left(z - \frac{d^2}{2q}\right)$. Исключив из этих уравнений вспомогательный параметр $d$, получим уравнение искомой поверхности. **904.** a) $M_1(+2;\ -3;\ 0)$ и $M_2(0;\ 0;\ +2)$; b) $M(+4;\ +2;\ +9)$ — прямая касается поверхности; c) прямая лежит целиком на поверхности; d) $M_1(+4;\ +1;\ +3)$; прямая параллельна одной из асимптот. **905.** $2l = 22$. **906.** Таких хорд можно провести бесчисленное множество; все они лежат в плоскости $288x + 225y - 400z - 1201 = 0$. Указание. Искомая прямая изобразится системой уравнений: $\frac{x-2}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z+1}{1}$. Решая их совместно с уравнением данной поверхности (исключаем координаты $x$ и $y$) и считаясь с условием задачи, которое можно выразить равенством $\frac{z_1 + z_2}{2} = -1$, получим только одно соотношение: $228m + 225n - 400 = 0$, которому должны удовлетворять угловые коэффициенты искомой прямой. Исключив эти коэффициенты из полученного равенства и из уравнений прямой, получим уравнение геометрического места искомых прямых. **907.** Таких прямых можно провести бесчисленное множество; их геометрическое место есть конус $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} - (z-2)^2 = 0$. **908.** Для эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ мы получим мнимый конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, т. е. действительных прямых, удовлетворяющих условиям задачи, нет. Для обоих гиперболоидов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ получим один и тот же конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, причём образующие этого конуса служат асимптотами поверхности. Этот конус называется асимптотическим. Указание. Из разбора этой задачи следует, что эллипсоид не имеет действительных асимптот, а гиперболоиды имеют бесчисленное множество асимптот,—целый асимптотический конус, с вершиной



Черт. 152.

в центре поверхности. **909.** Единственной вершиной обоих параболоидов является начало координат. Геометрическое место искомых прямых определяется уравнением: $\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = 0$. Для эллиптического параболоида мы имеем две мнимые плоскости, пересекающиеся по оси $z$, т. е. ось $z$ есть единственная действительная прямая, удовлетворяющая условиям задачи. В случае гиперболического параболоида мы имеем две действительные плоскости, тоже пересекающиеся по оси $z$; каждая из этих плоскостей содержит одну из прямолинейных образующих, расположенных в плоскости $xy$, а именно: $\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}} = 0$ или $\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}} = 0$. **910.** Конус: $10(x-5)^2 + 20(x-5)(y-1) - 34(y-1)^2 - 55z^2 = 0$. **911.** Цилиндр: $2(x-z)^2 + 2(x-z)(y-z) + 4(y-z)^2 - 7 = 0$. **912.** $\frac{x-6}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-8}{4}$ и $\frac{x-6}{9} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-8}{20}$. Указание. Эту задачу можно решить или непосредственно, т. е. решая совместно уравнение поверхности с уравнениями прямой, проходящей через данную точку, и приравнивая нулю все коэффициенты в уравнении, полученном после исключения двух координат, или пользуясь общими уравнениями прямолинейных образующих. **913.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Указание. Прямолинейные образующие одной серии определяются уравнениями: $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = k, \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = \frac{z}{k}; \end{cases}$ приводим их к каноническому виду: $\frac{x-2k}{2} = \frac{y-k}{-1} = \frac{z}{k}$. Параметр $k$ определяем из условия параллельности с плоскостью $3x + 2y - 4z = 0$. **914.** Удобно, написав уравнения этих проекций, воспользоваться условием прикосновения прямой и кривой второго порядка. **915.** Проекции прямолинейных образующих касаются параболических сечений в плоскостях $(xz)$ и $(yz)$, а в плоскости $(xy)$ они составляют пучки прямых, параллельных тем двум прямым, на которые распадается линия пересечения поверхности и плоскости $(xy)$. **916.** Указание. Для доказательства достаточно показать, что все прямолинейные образующие гиперболоида вращения составляют равные углы с осью вращения (с осью $z$), что кратчайшее расстояние всякой прямолинейной образующей до оси $z$ измеряется по соответствующему радиусу горлового круга ($x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$) и по величине равно этому радиусу. Можно и непосредственно вывести уравнение поверхности, получающейся от вращения прямой вокруг оси, не лежащей с ней в одной плоскости. **917.** Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$. Указание. Образующая прямая изображается системой уравнений: $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z}{1}$. Условие пересечения этой прямой с тремя данными даст три равенства, связывающих параметры $a$, $b$, $m$ и $n$. Исключая четыре параметра из этих трёх равенств и двух уравнений образующей, получим искомую поверхность. **918.** Гиперболический параболоид: $z=\frac{x^2}{4}-y^2$. Указание. Найдём точки пересечения обеих траекторий с плоскостью $(xy)$: $(+1;\ -1/_2;\ 0)$ и $(-1;\ +1/_2;\ 0)$, и примем их за положение подвижных точек в начальный момент движения. Пусть, далее, по первой прямой точка поднимается (движение точки совпадает с положительным направлением прямой), а по второй прямой соответствующая точка опускается вниз (чтобы направление движения совпало с направлением прямой, переменим знаки угловых коэффициентов у второй прямой на обратные). Тогда уравнения траекторий удобнее будет переписать так: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1/_2}{1}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1/_2}{1}=\frac{z}{-2}$, или в параметрической форме: $\left\{\begin{array}{l} x=2\rho+1, \\ y=\rho-1/_2, \\ z=2\rho \end{array}\right\}$ (1) и $\left\{\begin{array}{l} x=2\rho_1-1, \\ y=\rho_1+1/_2, \\ z=-2\rho_1 \end{array}\right\}$ (2). В этих уравнениях $\rho$ и $\rho_1$ изображают величины, пропорциональные расстояниям подвижных точек от их начальных положений. По условию задачи эти расстояния должны быть равны между собой в любой момент движения; кроме того, множители пропорциональности для обеих прямых одинаковы $\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{1}{3}\right.$ и $\left.\frac{1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}=\frac{1}{3}\right)$; поэтому можно прямо положить $\rho=\rho_1$. Пишем теперь уравнения прямой, проходящей через обе подвижные точки [координаты этих точек даны равенствами (1) и (2)]: $\frac{x-2\rho-1}{2}=\frac{y-\rho+1/_2}{-1}=\frac{z-2\rho}{4\rho}$. Исключим параметр $\rho$ из этих двух уравнений и тогда получим уравнение искомой поверхности. **919.** Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=z$. Указание. На образующую прямую $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ наложено три условия: пересечение с двумя прямыми и параллельность с данной плоскостью. Выразим эти условия аналитически и из полученных трёх уравнений исключим отношения угловых коэффициентов; тогда мы получим одно соотношение, связывающее координаты ($a$, $b$, $c$) любой точки образующей прямой, это и даст нам уравнение искомой поверхности, если заменить $a, b$ и $c$ текущими координатами. **920.** $4x-12y+9z-6=0$. **921.** $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1/2}{2}$. **922.** $2x+2y-3z\pm 12=0$. Указание. Определяем координаты точки прикосновения из условия пропорциональности коэффициентов двух уравнений: $\frac{x_1x}{21}+\frac{y_1y}{6}+\frac{z_1z}{4}=1$ и $2x+2y-3z+D=0$ и из условия, что эти координаты удовлетворяют уравнению эллипсоида. **923.** $x-y-2z-2=0$. Указание. Решив задачу для параболоида в общем виде, убедиться, что условиям её может удовлетворять не более одной плоскости. **924.** $x-2y-4z=0$. Указание. Эта плоскость касается конуса вдоль всей образующей конуса, проходящей через данную точку. **925.** Указание. Уравнения нормали в любой точке ($x'$, $y'$, $z'$) конуса могут быть написаны следующим образом: $\frac{x-x'}{x'/a^2}=\frac{y-y'}{y'/b^2}=\frac{z-z'}{-z'/c^2}$; осью конуса служит ось $z$, т. е. прямая $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$. Пересечение этих двух прямых проверяется по формуле (13) § 1 гл. X. **926.** $a^2=b^2=c^2$, т. е. все три оси эллипсоида равны между собой, и мы имеем шаровую поверхность. **927.** Все точки двух главных сечений: $\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} y=0, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$ **928.** $4x+5y\pm 40=0$. Указание. Все касательные плоскости данного цилиндра должны быть параллельны оси $z$. **929.** Указание. Показать, что все нормали цилиндра перпендикулярны к его образующим и, следовательно, параллельны плоскости, к ним перпендикулярной. **931.** a) $A^2a^2+B^2b^2\pm C^2c^2=\pm D^2$; b) $A^2p+B^2q=2CD$. **932.** a) $x-3z=0$ и $3x-2y-3z-18=0$; прямая пересекает поверхность в двух действительных точках; b) действительных касательных плоскостей провести нельзя; прямая не имеет действительных точек пересечения с поверхностью; c) $x-2y-3z-6=0$; прямая касается поверхности и через неё можно провести только одну касательную плоскость. **933.** $\sqrt{15}\cdot y-2z+2=0$ и $\sqrt{15}\cdot y+2z-2=0$, $(0; +2\sqrt{15}; +16)$ и $(0; -2\sqrt{15}; +16)$. **934.** В случае эллипсоида, двуполостного гиперболоида и эллиптического параболоида прямая не должна пересекать поверхности в действительных точках. В случае однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида прямая должна пересечь поверхность в двух действительных различных точках. **935.** $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-21}{6}$ и $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{-2}=$

$=\frac{z-21}{14}$. Указание. Можно найти проекцию линии их пересечения на плоскость $(xy)$: $4x^2-y^2-40x+8y+84=0$ и найти уравнение каждой из тех прямых, на которые эта линия распадается: $2x-y-6=0$ и $2x+y-14=0$. Каждое из этих уравнений даст плоскость, проектирующую искомую прямую на плоскость $(xy)$. Каждая из искомых прямых изобразится одним из этих уравнений и уравнением касательной плоскости. Иначе можно решить эту задачу, найдя точку прикосновения данной плоскости и поверхности и составив уравнения прямолинейных образующих, проходящих через найденную точку. **936.** $16x\pm 13z=0$. **937.** $r=\frac{6\sqrt{10}}{5}$. Указание. Плоскости круговых сечений даны уравнениями: $y\pm 3z=k$. Плоскости эти параллельны оси абсцисс. Круговое сечение может касаться горлового эллипса только тогда, когда оно проходит через одну из его вершин, лежащих на оси $y$, т. е. через точку $(0;\ +2;\ 0)$ или $(0;\ -2;\ 0)$. Соответствующие значения параметра будут: $k=\pm 2$. Все четыре круга, удовлетворяющих условиям задачи, лежат в плоскостях $y\pm 3z=\pm 2$ и имеют одинаковые радиусы. Мы вычислим этот радиус, найдя центр соответствующего сечения [проектируем его на плоскость $(xz)$]. **938.** $(0;\ -1;\ +{}^1/_2)$ и $(0;\ +1;\ +{}^1/_2)$. Указание. Плоскости круговых сечений даны уравнениями: $y\pm z=k$. Задача сводится к нахождению точек параболоида, в которых касательные плоскости параллельны этим плоскостям. **939.** $x^2+2y^2+z^2-4xy+6yz-2zx+20y+12z+12=0$. **940.** $x^2+5y^2+4z^2+4xy-2yz-4zx-1=0$. **941.** 1) $\left(-1;+\frac{3}{2};\ 0\right)$; центральная поверхность, $\Delta\neq 0$; 2) линия центров: $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$; $\Delta=0$; вершины в конечной части пространства нет; цилиндр; 3) центра в конечной части пространства нет, $\Delta\neq 0$, данная поверхность — параболоид; 4) $\left(+\frac{14}{3};\ +3;\ +\frac{1}{3}\right)$; $\Delta\neq 0$, центральная поверхность; 5) плоскость центров: $2x-y+3z+2=0$; система (9) содержит два независимых, но противоречивых уравнения; пара параллельных плоскостей; 6) поверхность не имеет центра в конечной части пространства, $\Delta\neq 0$, параболоид; 7) $(0;\ +2;\ -2)$, $\Delta=0$, конус; 8) центра нет; $\Delta=0$; уравнения, определяющие вершину, несовместны; данная поверхность — параболический цилиндр. **942.** $x^2-14y^2+10z^2-4xy-24yz+6zx-5=0$. **943.** 1) $x^2+2y^2+2z^2+2xy-4=0$; 2) $y^2+3xy+2yz+xz+0{,}8=0$; 3) $x^2+2y^2-z^2-1=0$. **944.** Дискриминант уравнения поверхности равен нулю; координаты вершины: $x=0$; $y=1$; $z=0$. Что конус действительный, видно, например, из того, что в пересечении с плоскостью $(xz)$ он даёт действительную гиперболу $\begin{cases}2x^2-z^2+8x+4=0,\\ y=0.\end{cases}$
**945.** $a=-2$. **946.** 1) Гиперболический цилиндр. Указание. $\Delta=0$; уравнения, из которых определяют координаты вершины конуса,

несовместны; с плоскостью $(xy)$ пересекается по гиперболе: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. 2) Мнимый конус. Указание. $\Delta = 0$, координаты вершины: $x = 0$; $y = 0$; $z = 1$; в пересечении с плоскостью $(xy)$ имеем мнимый эллипс: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ 3) Пара действительных пересекающихся плоскостей. Указание. $\Delta = 0$; вершиной служит любая точка прямой $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$; с плоскостью $(xy)$, не проходящей через эту прямую, пересекается по двум действительным прямым: $2x^2 + 4xy - 8x - 12y + 6 = 0$. 4) Действительный конус. Указание. $\Delta = 0$; вершина лежит в точке $(+2;\ +1;\ 0)$; с плоскостью $(yz)$ пересекается по нераспавшейся гиперболе. 5) Эллиптический цилиндр; $\Delta = 0$, уравнения, из которых определяют вершины конуса, несовместны; с плоскостью $(xz)$ пересекается по действительному эллипсу

$$\begin{cases} x^2 + 4z^2 + 2x - 4 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

6) Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$. В пересечении с любой плоскостью, не проходящей через указанную прямую, получим пару мнимых прямых. **947.** 1) Мнимый конус с вершиной в начале координат; 2) две действительные плоскости, пересекающиеся по прямой: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1}$; 3) действительный конус с вершиной в начале координат; 4) пара слившихся плоскостей; 5) пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой: $x = -y = -z$. **948.** Ось $x$ пересекает поверхность в точках $(+2;\ 0;\ 0)$ и $\left(+\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right)$; ось $y$ пересекает поверхность в мнимых точках; ось $z$ касается поверхности в точке $\left(0;\ 0;\ -\frac{3}{2}\right)$. **949.** a) $a_{14}^2 - a_{11}a_{44} = 0$; b) $a_{11} = 0$; c) $a_{11} = a_{14} = 0$; d) $a_{11} = a_{14} = a_{44} = 0$; e) $a_{14}^2 - a_{11}a_{44} < 0$. Указание. Задача сводится к исследованию квадратного уравнения $a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0$, которое мы получим, положив в общем уравнении поверхности второго порядка $y = 0$ и $z = 0$. **950.** a) $a_{12}xy + a_{23}yz + a_{31}zx = 0$; b) $2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + a_{44} = 0$. Указание. См. задачу 949, случаи d) и c). **951.** $M_1(+1;\ +2;\ +3)$ и $M_2(+2;\ -1;\ -4)$. Решение. Обозначим равные отношения, входящие в уравнения прямой, через $\rho$: $\frac{x}{-1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-10}{7} = \rho$; тогда будем иметь: $x = -\rho$; $y = 3\rho + 5$; $z = 7\rho + 10$. Вставляя эти значения координат в уравнение поверхности и произведя возможные упрощения, по-

лучим: $\rho^3+3\rho+2=0$, откуда $\rho_1=-1$ и $\rho_2=-2$. Зная значения $\rho$, соответствующие искомым точкам пересечения, вычисляем координаты этих точек. **952.** a) Прямая целиком лежит на поверхности; b) прямая касается поверхности в точке $(-3; 0; 0)$. **953.** Ось $z$ и прямая $\frac{x}{-16}=\frac{y}{24}=\frac{z}{9}$. Указание. Всякую прямую, проходящую через начало координат, можно представить уравнениями: $x=mz$, $y=nz$. Если прямая целиком лежит на поверхности, то, исключая из этих уравнений и из уравнения поверхности две координаты $x$ и $y$, мы должны получить квадратное уравнение относительно $z$, которое удовлетворяется любыми значениями $z$, т. е. все коэффициенты этого уравнения должны быть равны нулю. Приравняв нулю все коэффициенты этого уравнения, мы и получим те равенства, из которых определяются угловые коэффициенты искомой прямой. **954.** $\frac{x+\sqrt{12}}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$ и $\frac{x-\sqrt{12}}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$. Указание. Искомую прямую можно представить уравнениями $\frac{x-a}{2}=\frac{y-b}{1}=\frac{z}{-1}$ или иначе: $x=a-2z$, $y=b-z$. Вставляя эти значения $x$ и $y$ в уравнение поверхности, мы должны получить тождество. Из условия, что все коэффициенты полученного равенства должны быть равны нулю, определяем неизвестные параметры $a$ и $b$. **955.** a) $a_{11}m^2+a_{22}n^2+a_{33}p^2+2a_{12}mn+2a_{23}np+2a_{31}pm=0$; b) $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{p^2}{c^2}=0$; c) $\frac{m}{n}=\pm\sqrt{\frac{p_1}{q_1}}$. **956.** 1), 4), 5) имеют асимптотические направления; 2) и 3) — не имеют. **957.** Все прямые, для которых $m:n:p=2:1:0$. Прямолинейные образующие: $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}$ и $\frac{x-4{,}5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}$. **958.** $xz+yz-2y=0$. **959.** Действительный конус $2xy+yz-xz=0$. **960.** Одна единственная прямая: $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$. Указание. Соответствующий конус распался на пару мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой. **961.** Существует одна действительная прямая, удовлетворяющая условиям задачи: $x=1$; $y=-1$. **962.** Пара плоскостей: $2x+y-3z=0$ и $x-y+z=0$. **963.** Действительный нераспадающийся конус второго порядка. **964.** 1) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2+2(x-1)(y-1)-2(y-1)(z+1)+6(x-1)(z+1)=0$; действительный конус; 2) мнимый конус: $9(x-4)^2+36y^2+4(z+3)^2=0$; 3) действительный конус:

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\left(z-\frac{2}{3}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{2}{3}\right)=0.$$

**965.** a) эллипс $\begin{cases} 3x^2+4y^2+2xy+5x-8=0, \\ z=0; \end{cases}$

b) гипербола $\begin{cases} 3z^2+2yz-z-1=0, \\ x=0; \end{cases}$

c) две прямые $\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-1=0 \\ y=0. \end{cases}$

**965*.** $x^2+3z^2-4xy+6z-1=0.$

**966.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}=0.$

Указание. Искомое условие равносильно условию распадения на пару прямых линии пересечения поверхности с плоскостью $(xy)$. **967.** Действительный эллипс. Указание. Составляем уравнение цилиндра, проектирующего изучаемую кривую на плоскость $(yz)$. С этой целью нужно исключить $x$ из уравнения поверхности и секущей плоскости (см. задачу 742). Уравнение цилиндра будет:

$$3y^2+4z^2+36y-96z+384=0.$$

Это же уравнение даст нам направляющую цилиндра в плоскости $(yz)$, если рассматривать $y$ и $z$ как координаты точки на плоскости $(yz)$. Исследование уравнения обнаружит, что направляющая есть действительный эллипс; следовательно, цилиндр — эллиптический и изучаемая линия, которую он проектирует, тоже эллипс. **968.** Гипербола. Указание. Цилиндр, проектирующий кривую на плоскость $(xz)$, — гиперболический; его уравнение: $25x^2+8z^2+32xz+10x+8z=0$ **969.** a) Пара действительных пересекающихся прямых; b) мнимая кривая второго порядка. Указание. a) Уравнение проектирующего цилиндра следующее: $5x^2-14xy+10x-14y+5=0$; его направляющая распадается на пару действительных пересекающихся прямых ($\Delta=0$; $\delta<0$); b) направляющая проектирующего цилиндра—мнимый эллипс; задача может быть упрощена, если заметить, что данная поверхность — шаровая и секущая плоскость находится от центра на расстоянии, большем, чем радиус. **970.** $x-4y+2z=0$. Указание Искомая плоскость есть геометрическое место хорд поверхности проходящих через начало координат и делящихся в нём пополам

**971.** $5x+6y+7z-4=0$; $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z-4}{7}$. Указание. Пользуемся уравнением касательной плоскости (10), данным в тексте **972.** $3z+2=0$. Линия пересечения — пара мнимых прямых. **973** $x+2y-2=0$ и $x+2y=0$. Указание. Всякую касательную плоскость к данной поверхности можно представить уравнением $(4x'+2z')x+(6y'-4)y+(2x'+4z'-2)z+(-4y'-2z'+3)=0$ Координаты точки прикосновения определяем из условия параллельности этой плоскости и данной плоскости $x+2y+7=0$, т. е. из условия пропорциональности коэффициентов их уравнений: $\dfrac{4x'+2z'}{1}=$

$=\frac{6y'-4}{2}$; $2x'+4z'-2=0$. Кроме того, эти же координаты удовлетворяют уравнению поверхности. **974.** $M_1(-1;\ 2+\sqrt{5};\ +1)$ и $M_2(-1;\ 2-\sqrt{5};\ +1)$. **975.** $4x-5y-2z+2=0$. Указание. Всякую плоскость, проходящую через данную прямую, можно представить уравнением: $4x-5y+\lambda(z-1)=0$; для решения задачи нужно только найти значение параметра $\lambda$, при котором эта плоскость касается поверхности, т. е. при котором коэффициенты её уравнения пропорциональны коэффициентам общего уравнения касательной плоскости. Примечание. Через данную прямую можно провести только одну касательную плоскость к поверхности, потому что сама эта прямая является касательной прямой к поверхности. **976.** $2x-z=0$. Указание. Если касательная плоскость проходит через ось ординат, то в её уравнении свободный член и коэффициент при $y$ должны равняться нулю ($-8y'=0$ и $2x'-z'=0$). Из этих условий и из уравнения данной поверхности определяем координаты точки прикосновения искомой плоскости. **977.** Конус: $x^2-4xz-8yz=0$. Указание. Всякая прямая, проходящая через начало координат, может быть представлена уравнениями: $x=mz$ и $y=nz$; решая их совместно с уравнением данной поверхности, получим:

$$(m^2+2n^2+2mn+2)\,z^2-2\,(m+2n+2)\,z+2=0.$$

Для всех прямых, касающихся поверхности, это уравнение должно иметь вещественные и равные корни, т. е. подкоренное количество, полученное при решении уравнения, должно равняться нулю: $-m^2+4m+8n=0$. Исключая угловые коэффициенты $m$ и $n$ из этого соотношения и из уравнений прямой, получим уравнение искомого геометрического места. **978.** Эллипс:

$$\begin{cases} 3x^2+8xy+8y^2-4x-8y=0, \\ x+2y+2z-2=0. \end{cases}$$

Указание. Чтобы найти геометрическое место точек прикосновения конуса к поверхности, решаем совместно уравнения образующей конуса ($x=mz$ и $y=nz$) и уравнение поверхности. Для определения апликаты точки прикосновения получим уравнение:

$$(m^2+2n^2+2mn+2)\,z^2-2\,(m+2n+2)\,z+2=0$$

откуда вследствие равенства корней этого уравнения имеем: $z=\frac{m+2n+2}{m^2+2n^2+2mn+2}$. Исключив из этого уравнения и из уравнений образующей оба параметра $m$ и $n$, получим соотношение, связывающее координаты точек прикосновения: $x^2+2y^2+2xy+2z^2-x-2y-2z=0$. Итак, искомая линия прикосновения лежит на первоначальной и на вновь полученной поверхностях, а так как уравнения этих поверхностей имеют одинаковые старшие члены, то, вычтя одно уравнение из другого, получим уравнение плоскости $x+2y+2z-2=0$, проходящей через ту же линию прикосновения. Таким образом, искомая линия — плоская, и её можно рассматривать, как пересечение конуса $x^2-4xz-8yz=0$ с плоскостью $x+2y+2z-2=0$ или как пересечение этой же плоскости с цилиндром, проектирующим изучаемую кривую на одну из плоскостей координат. **979.** Эллиптический цилиндр: $x^2+2y^2+2xy-2x-4y=0$. Указание. Прямые, параллельные оси $z$, изображаются уравнениями: $x=a$ и $y=b$. Решая их совместно с уравнением поверхности и пользуясь условием касания, получим соотношение, которому должны удовлетворять параметры $a$ и $b$, а именно:

$$a^2+2b^2+2ab-2a-4b=0.$$

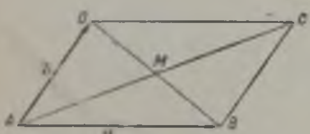
Исключив параметры $a$ и $b$ из полученного уравнения и из уравнений образующей, получим уравнение искомого геометрического места. **980.** a) $7x+17y+19z+19=0$; b) $2x+y+3z+4=0$; c) $x+5y+6z+7=0$; d) $3x+6y+8z+9=0$. Указание. Пользуемся уравнением (11), данным в тексте. Если хорды параллельны оси $x$, то их угловые коэффициенты следующие: $m=1$; $n=0$ и $p=0$, и уравнение сопряжённой им плоскости будет $F_x=0$. Уравнения $F_y=0$ и $F_z=0$ изображают диаметральные плоскости, сопряжённые хордам, параллельным оси $y$ и оси $z$. **981.** $x=y=z$; $x-2y+1=0$. Указание. Уравнение диаметра мы получим как уравнение прямой, проходящей через начало координат и через центр данной поверхности. **982.** $2x-2y+3z=0$; $m:n:p=1:-2:4$. Указание. Определяем координаты центра и, зная три точки искомой плоскости, пишем её уравнение. Угловые коэффициенты сопряжённых хорд определяем из условия пропорциональности коэффициентов полученного уравнения и общего уравнения диаметральной плоскости данной поверхности. При решении этой задачи можно воспользоваться уравнением связки диаметральных плоскостей и определить параметры из условия прохождения плоскости через две данные точки: тогда вычислять координаты центра не нужно. **983.** $x+3y-z-1=0$; $\frac{x+{}^1/_3}{2}=\frac{y-{}^2/_9}{-1}=\frac{z+{}^2/_3}{5}$. **984.** $27x-33y+37z+44=0$. **985.** $\cos\varphi=\frac{23}{\sqrt{37\cdot21}}$. Указание. Уравнение соответствующей диаметральной плоскости: $x-6z=0$; угловые коэффициенты сопряжённых хорд: $m:n:p=1:-2:4$. **986.** $2x+y+4z=0$. **987.** $7x-28y-14z-8=0$. Указание. Каждая диаметральная плоскость имеет бесчисленное множество сопряжённых диаметральных плоскостей — все плоскости, проходящие через сопряжённый ей диаметр. **988.** $3x-5y-6=0$; $x-z=0$ и $5x-y-10=0$; см. указание к задаче 987. **989.** $m_1=n_1=0$, $p_1=1$; $m_2=n_2$, $p_2=0$; $m_3=-n_3$, $p_3=0$. Указание. Корни решающего уравнения следующие: $s_1=-5$; $s_2=3$; $s_3=1$. Главные оси параллельны оси $z$ и биссектрисам угла $(xy)$. **990.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{0}$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$. Указание. Находим центр поверхности $(+1;\ -1;\ +1)$, главные направления и проводим через центр прямые имеющие главные направления. Корни решающего уравнения $s_1=-2$; $s_2=3$; $s_3=6$. **991.** $x-y=0$; $x+y-z=0$; $3x+3y+6z-2=0$. Указание. Находим главные направления: $m_1=-1$, $n_1=1$, $p_1=0$; $m_2:n_2:p_2=1:1:-1$; $m_3:n_3:p_3=1:1:2$ и пишем уравнения плоскостей, им сопряжённых. Корни решающего уравнения: $s_1=2$; $s_2=3$; $s_3=-6$. **992.** $x^2+2y^2+3z^2-2=0$. Указание. Чтобы составить искомые формулы преобразования координат, находим координаты центра: $x_0=1$; $y_0=2$; $z_0=-1$, т. е. координаты нового начала; затем находим направление новых осей, которые совпадают с главными направлениями поверхности. Предварительно находим корни решающего уравнения: $s_1=3$; $s_2=6$ и $s_3=9$; тогда определятся главные направления: $m_1:n_1:p_1=1:2:2$; $m_2:n_2:p_2=2:1:-2$ и $m_3:n_3:p_3=2:-2:1$ и углы, образованные новыми осями со старыми, будут тоже известны: $\cos\alpha=1/3$; $\cos\beta=2/3$; $\cos\gamma=2/3$; $\cos\alpha_1=2/3$; $\cos\beta_1=1/3$; $\cos\gamma_1=-2/3$; $\cos\alpha_2=2/3$; $\cos\beta_2=-2/3$; $\cos\gamma_2=1/3$. Искомые формулы преобразования координат будут: $x=\dfrac{x'+2y'+2z'+3}{3}$; $y=\dfrac{2x'+y'-2z'+6}{3}$; $z=\dfrac{2x'-2y'+z'-3}{3}$. Чтобы найти упрощённое уравнение, нет надобности пользоваться этими формулами. Уравнение центральной поверхности, отнесённой к главным осям, содержит только члены с квадратами координат и свободный член, а коэффициенты при старших членах—найденные уже корни решающего уравнения ($s_1=3$, $s_2=6$, $s_3=9$); свободный же член находится как отношение дискриминанта уравнения к дискриминанту старших членов. В данном случае, так как координаты центра уже определены, проще поставить их вместо текущих координат в левую часть первоначального уравнения, которая после этой замены будет равна искомому свободному члену ($2F'=-6$). Таким образом, искомое уравнение поверхности, отнесённой к главным осям, будет: $3x^2+6y^2+9z^2-6=0$, или, после сокращения на 3, получим: $x^2+2y^2+3z^2-2=0$. **993.** 1) $4x^2+8y^2-2z^2-5=0$ ($s_1=4$; $s_2=8$; $s_3=-2$; $x_0=-1$; $y_0=-1$; $z_0=+1$). 2) $x^2+y^2-2z^2=0$ ($s_1=s_2=-3$; $s_3=6$; $x_0=1$; $y_0=1$; $z_0=-1$). 3) $3x^2+6y^2-2z^2+6=0$ ($s_1=3$; $s_2=6$; $s_3=-2$; $\dfrac{\Delta}{\delta}=6$). 4) $2x^2+5y^2+8z^2-32=0$ ($s_1=2$; $s_2=5$; $s_3=8$; $x_0=-1$; $y_0=-1$; $z_0=0$). 5) $x^2+2y^2-2=0$ ($s_1=3$; $s_2=6$; $s_3=0$). Поверхность имеет целую линию центров: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$. Переносим начало координат в одну из её точек, например в точку (0; 1; 0); тогда $2F'=-6$. **994.** $x^2+y^2=3$. Указание. Так как данная поверхность есть поверхность вращения, то только одно главное направление определённое, а именно то, которое соответствует корню решающего уравнения $s=0$. Примем его за направление новой оси $z$; $m_3:n_3:p_3=2:-1:2$. Два других направления могут быть взяты произвольно, лишь бы они были перпендикулярны между собой и перпендикулярны к найденному направлению. Если, например, выбрать $m_1:n_1:p_1=1:0:-1$ и $m_2:n_2:p_2=1:4:1$, то формулы

преобразования примут вид: $x=\frac{3x'+y'+2\sqrt{2}z'}{3\sqrt{2}}$, $y=\frac{4y'-\sqrt{2}z'}{3\sqrt{2}}$ и $z=\frac{-3x'+y'+2\sqrt{2}z'}{3\sqrt{2}}$. Начало координат сохраняем, так как линия центров $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ проходит через начало координат (уравнение не содержит членов первой степени). **995.** $14x^2-4y^2-\frac{16z}{\sqrt{14}}=0$. Указание. Корни решающего уравнения: $s_1=14$; $s_2=4$; $s_3=0$. Главные направления: $m_1:n_1:p_1=2:4:1$; $m_2:n_2:p_2=1:-1:2$; $m_3:n_3:p_3=-3:1:2$. Формулы преобразования направлений осей: $x=\frac{2x'}{\sqrt{21}}+\frac{y'}{\sqrt{6}}-\frac{3z'}{\sqrt{14}}$; $y=\frac{4x'}{\sqrt{21}}-\frac{y'}{\sqrt{6}}+\frac{z'}{\sqrt{14}}$ и $z=\frac{x'}{\sqrt{21}}+\frac{2y'}{\sqrt{6}}+\frac{2z'}{\sqrt{14}}$. После преобразования координат уравнение поверхности примет вид: $14x^2-4y^2+\frac{48x}{\sqrt{21}}+\frac{24y}{\sqrt{6}}-\frac{16z}{\sqrt{14}}+1=0$. Далее, выбираем начало координат так, чтобы $F_{x'}=0$, $F_{y'}=0$ и $2F'=0$ $\left[F_{x'}=14x'+\frac{24}{\sqrt{21}};\ F_{y'}=-4y'+\frac{12}{\sqrt{6}}\right]$. После переноса начала координат уравнение поверхности будет: $14x^2-4y^2-\frac{16}{\sqrt{14}}=0$. Задачу можно решить и проще, зная, что простейшее уравнение параболоида имеет вид: $s_1x^2+s_2y^2\pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{s_1s_2}}\,z=0$.
**996.** $2x^2+5y^2-5\sqrt{2}z=0$. Указание. См. указание к задаче 995.
**997.** Двуполостный гиперболоид. Указание. Вычисляем прежде всего дискриминанты уравнения поверхности и старших членов: $\Delta=-16$, $\delta=+32$; оба они отличны от нуля, и, следовательно, данное уравнение изображает центральную поверхность, не вырождающуюся в конус. Чтобы определить тип поверхности, обращаемся к решающему уравнению: $s^3+s^2-22s-32=0$. Решать его нет надобности; достаточно определить знаки его корней. С этой целью можем воспользоваться следующим правилом: если левая часть кубического уравнения, имеющего только вещественные корни, расположена по убывающим степеням неизвестного, то число положительных корней уравнения равно числу перемен знаков в ряду его коэффициентов, а число отрицательных корней равно числу постоянств знаков в этом ряду. В нашем случае коэффициенты решающего уравнения имеют следующие знаки: $++--$, т. е. мы имеем одну перемену знаков (между вторым и третьим коэффициентами) и два постоянства (между первым и вторым и между третьим и четвёртым). Таким образом, решающее уравнение имеет один положительный и два

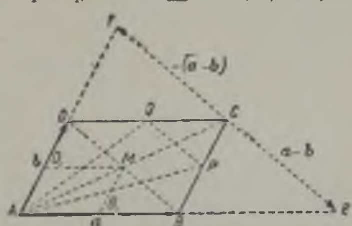
отрицательных корня; кроме того, отношение дискриминантов $\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)$ отрицательное, а потому данное уравнение, согласно таблице, приведённой в тексте, изображает двуполостный гиперболоид. **998.** 1) Однополостный гиперболоид. Указание. Поверхность центральная ($\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$). Решающее уравнение ($s^3 - 2s^2 - 3s + 4 = 0$) имеет два положительных и один отрицательный корень, кроме того, $\frac{\Delta}{\delta} < 0$. 2) Двуполостный гиперболоид. Указание. $\Delta \neq 0$; $\delta \neq 0$; $\frac{\Delta}{\delta} > 0$. Решающее уравнение ($s^3 - 6s^2 + 7s + 2 = 0$) имеет два положительных и один отрицательный корень. 3) Эллипсоид. Указание. $\Delta \neq 0$; $\delta \neq 0$; $\frac{\Delta}{\delta} < 0$. Все корни решающего уравнения ($s^3 - 6s^2 + 11s - 6 = 0$) положительные. 4) Гиперболический параболоид. Указание. $\Delta \neq 0$ $\delta = 0$; $s_1 = 0$; $s_2 > 0$; $s_3 < 0$. 5) Эллиптический цилиндр. Указание. $\Delta = 0$; $\delta = 0$; $s_1 = 0$; $s_2 > 0$; $s_3 > 0$. Можно также воспользоваться пересечением цилиндра с плоскостью $(xy)$, которое даёт действительный эллипс: $\begin{cases} 4x^2 + 2y^2 - 4xy - 2y - 4 = 0; \\ z = 0. \end{cases}$ **999.** $31x^2 - 51y^2 + 20z^2 - 26xy + 60xz + 20yz + 26x + 102y - 20z - 51 = 0$. Пара плоскостей, пересекающихся по общему перпендикуляру данных прямых, проведённому в точке их пересечения. **1000.** Гиперболический параболоид. $y^2 + 2yz - z^2 + 4x - 2 = 0$.

## ЧАСТЬ ЧЕТВЁРТАЯ

**1001.** См. черт. 153. $\overline{MA} = -\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$; $\overline{MB} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2}$; $\overline{MC} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{a}}{2}$; $\overline{MD} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2}$. **1002.** См. черт. 154. 1) из $\triangle ACE$; 2) из $\triangle ACF$; 3) из $\triangle ABD$; 4) из параллелограмма $AB_1MD_1$; 5) из $\triangle MBC$; 6) и 7) из $\triangle APQ$. **1003.** *a*) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$; $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ можно изобразить диагоналями параллелограмма,

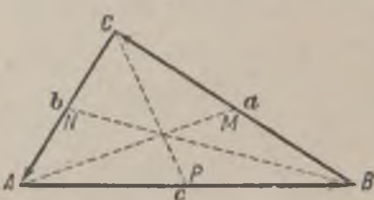


Черт. 153.



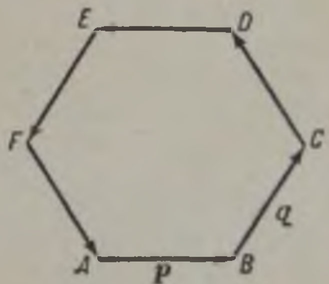
Черт. 154.

построенного на векторах **a** и **b**. Из равенства длин диагоналей параллелограмма следует, что он прямоугольный. b) **a** и **b** коллинеарны. Диагонали параллелограмма могут быть коллинеарными лишь тогда, когда его стороны коллинеарны. c) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют одинаковое направление, так как равны единичные векторы их направлений. d) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны и имеют одинаковое направление. e) и f) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, но имеют противоположные направления. **1004.** $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$, так как диагональ делит угол параллелограмма пополам только в случае ромба. **1005.** a) $\alpha = \beta = 0$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны; b) $\alpha = \beta$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны и имеют противоположные направления; c) $\alpha = -\beta$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют одинаковое направление. **1006.** См. черт. 155. $\overline{AM} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}$ или $\overline{AM} = \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{2}$; $\overline{BN} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}$ или $\overline{BN} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{2}$; $\overline{CP} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2}$ или $\overline{CP} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2}$. **1007.** $\overline{AM} = -\left(\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}}{2}\right)$; $\overline{BN} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}$; $\overline{CP} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2}$. **1008.** $\overline{D_1A} = -(\mathbf{c} + {}^1/_5\mathbf{a})$; $\overline{D_2A} = -(\mathbf{c} + {}^2/_5\mathbf{a})$; $\overline{D_3A} = -(\mathbf{c} + {}^3/_5\mathbf{a})$; $\overline{D_4A} = -(\mathbf{c} + {}^4/_5\mathbf{a})$. **1009.** Указание. Чтобы три вектора $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ и $\overline{CP}$ (черт. 155) могли служить сторонами треугольника, необходимо, чтобы $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = 0$. Справедливость этого равенства проверим, выразив каждую из медиан через стороны основного треугольника $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, помня, что $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$. **1010.** $\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{c}}{c} - \frac{\mathbf{b}}{b}$; $\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}$; $\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{b}}{b} - \frac{\mathbf{a}}{a}$; $\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{c}}{c} + \frac{\mathbf{b}}{b}$; $\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{c}}{c}$; $\mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{b}}{b} + \frac{\mathbf{a}}{a}$; $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{r}_1$ имеют направления биссектрис внутренних углов $A$, $B$ и $C$; $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{r}_2$ имеют направления биссектрис одноимённых внешних углов треугольника (см. задачу 1004). **1011.** Абсолютная величина суммы не изменится, но вектор-сумма окажется повёрнутым на тот же угол. Указанный поворот всех слагаемых не повлияет на сумму лишь в двух случаях: 1) когда угол поворота $\omega = 2\pi n$ (где $n$ — любое целое число) и 2) когда сумма равна нулю. **1012.** Указание. Каждое парное произведение — длины стороны треугольника на единичный перпендикулярный вектор — есть вектор, длина которого равна длине соответствующей стороны, а направление — ей перпендикулярно. Таким образом, этот вектор может быть получен из вектора, совпадающего со стороной треугольника после поворота на прямой угол (см. задачу 1011.) **1013.** Указание. Равенство нулю рассматриваемой суммы вытекает проще всего из того факта, что поворот всех слагаемых на угол 120° (или 240°) не изменит суммы (см. задачу 1011). **1014.** Сумма векторов, соединяющих центр правильного $n$-угольника с его вершинами, равна нулю, так



Черт. 155.

как не изменится от поворота всех слагаемых векторов на угол $\omega = \frac{2\pi}{n}$ (или на угол, ему кратный). **1015.** См. черт. 156. a) $\overline{CD} = -\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $\overline{DE} = -\mathbf{p}$; $\overline{EF} = -\mathbf{q}$; $\overline{FA} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$; $\overline{AC} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$; $\overline{AD} = 2\mathbf{q}$; $\overline{AE} = 2\mathbf{q} - \mathbf{p}$; b) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$; $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = -1$; $\frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} = -2$. Отношение $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ смысла не имеет, так как эти два вектора неколлинеарны. **1016.** $\overline{AC} = {}^3/_2\mathbf{m} + {}^1/_2\mathbf{n}$; $\overline{AD} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$; $\overline{AF} = -{}^1/_2\mathbf{m} + {}^1/_2\mathbf{n}$; $\overline{EF} = -{}^1/_2\mathbf{m} - {}^1/_2\mathbf{n}$. **1017.** $\overline{AB} = {}^1/_2\mathbf{a} - {}^1/_2\mathbf{b}$. $\overline{BC} = {}^1/_2\mathbf{a} + {}^1/_2\mathbf{b}$; $\overline{CD} = -{}^1/_2\mathbf{a} + {}^1/_2\mathbf{b}$; $\overline{DA} = -{}^1/_2\mathbf{a} - {}^1/_2\mathbf{b}$. **1018.** $\overline{BC} = -\frac{b}{a}\mathbf{a} + \mathbf{b}$; $\overline{CD} = \frac{b-a}{a}\mathbf{a}$; $\overline{AC} = \frac{a-b}{a}\mathbf{a} + \mathbf{b}$; $\overline{BD} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$. **1019.** $\overline{AD} = \frac{m}{m+n}\mathbf{b} + \frac{n}{m+n}\mathbf{c}$. **1020.** a) и b) разложение всегда возможно и имеет единственное решение; c) и d) решений может быть два, одно или ни одного в зависимости от модулей данных слагаемых. **1021.** $\overline{BC} = \overline{B'C'} = \mathbf{q}$; $\overline{CD} = \overline{C'D'} = -\mathbf{p}$; $\overline{AB'} = \overline{DC'} = \mathbf{p} + \mathbf{r}$; $\overline{AD'} = \overline{BC'} = \mathbf{q} + \mathbf{r}$; $\overline{AC} = \overline{A'C'} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$; $\overline{AC'} = \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}$; $\overline{CA'} = -\mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{r}$; $\overline{D'A'} = -\mathbf{q}$; $\overline{A'B'} = \mathbf{p}$; $\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \mathbf{r}$; $\overline{BA'} = \overline{CD'} = -\mathbf{p} + \mathbf{r}$; $\overline{DA'} = \overline{CB'} = -\mathbf{q} + \mathbf{r}$; $\overline{BD} = \overline{B'D'} = -\mathbf{p} + \mathbf{q}$; $\overline{BD'} = -\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}$; $\overline{DB'} = \mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{r}$. **1022.** $\overline{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$; $\overline{CD} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$; $\overline{DB} = \mathbf{b} - \mathbf{d}$; $\overline{DM} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} - \mathbf{d}$; $\overline{AQ} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{3}$. **1023.** a) $\mathbf{l} + \mathbf{m} + \mathbf{n} = 0$; b) $2\mathbf{l} + \mathbf{m} - \mathbf{n} = 0$; c) $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$,—некомпланарны. Указание. Чтобы найти линейную зависимость между $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, надо из трёх равенств, их определяющих, исключить вспомогательные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$; если же этого сделать нельзя, векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ некомпланарны и тогда из данных равенств можно получить разложения $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ по векторам $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$. Так, в случае c) мы получим $\mathbf{a} = \mathbf{l} - \mathbf{m}$; $\mathbf{b} = -\mathbf{l} + 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{l} - \mathbf{m} + \mathbf{n}$. **1024.** a) $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$; b) $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$. Указание. Пользуемся условием компланарности векторов: $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{q}$; c) соотношения между коэффициентами, не зависящего от выбора основных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, не существует. **1025.** $3\mathbf{m} + 2\mathbf{n} - 3\mathbf{p} + 4\mathbf{q} = 0$. Указание. Искомая линейная зависимость получается путём исключения $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ из данных четырёх равенств. **1026.** $s = {}^2/_5\mathbf{m} +$




Черт. 156.

$+{}^3/_5\mathbf{n}+{}^3/_5\mathbf{p}$. Указание. См. задачу 1025. **1027.** a) Могут быть четыре вектора, из которых никакие два не являются коллинеарными и никакие три не являются компланарными; если два из данных векторов коллинеарны, то все четыре компланарны; если три из них коллинеарны, то коллинеарны все четыре; если три из них компланарны, то компланарны все четыре; b) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ компланарны; c) $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ коллинеарны; d) $\mathbf{d}=0$ — ему можно приписать любое направление. **1028.** $\lambda=\mu=0$, если $\mathbf{c}=0$, $\lambda=0$, и $\mu\neq 0$, если $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны; $\lambda\neq 0$ и $\mu=0$, если $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны. **1029.** Нет. Из условия задачи следует, что вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}$ перпендикулярен к оси проекции. **1030.** 1) Несправедливо; произведение вектора $\mathbf{a}$ на скаляр $a$ не может равняться скаляру, а представляет вектор, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$; 2) справедливо — на основании правила умножения скаляров; 3) несправедливо (см. случай 1); 4) несправедливо, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны; 5) справедливо; 6) и 7) справедливы на основании свойств переместительности и распределительности скалярного умножения; 8) справедливо только для коллинеарных векторов. **1031.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. **1032.** Скалярного произведения трёх векторов быть не может, так как скалярное произведение двух векторов есть скаляр, помножив который на третий вектор, получим вектор, коллинеарный этому последнему; поэтому и скалярный куб вектора рассматривать нет смысла. Куб скаляра вектора, как и всякого скаляра, имеет определённый смысл. **1034.** $\mathbf{ab}=-5$. Решение. $\mathbf{ab}=(3\mathbf{p}-2\mathbf{q})(\mathbf{p}+4\mathbf{q})=3\mathbf{pp}+12\mathbf{pq}-2\mathbf{qp}-8\mathbf{qq}=3-8=-5$, так как по условию $p^2=q^2=1$ и $\mathbf{pq}=\mathbf{qp}=0$. **1035.** 143. **1036.** 104. **1037.** $\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{ca}=-{}^3/_2$. Указание. Благодаря условию $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$ мы можем рассматривать эти три вектора как стороны правильного треугольника, а потому угол между каждыми двумя последовательными векторами равен 120°. **1038.** $\mathbf{pq}=9$. **1040.** $|\mathbf{a}|=5$. Решение. $a=\sqrt{\mathbf{a}^2}=\sqrt{(3\mathbf{m}-4\mathbf{n})^2}=\sqrt{9m^2-24(\mathbf{mn})+16n^2}=\sqrt{9+16}=5$. **1041.** $|\mathbf{P}|=\sqrt{\alpha^2a^2+\beta^2b^2+\gamma^2c^2}$. **1042.** $|\mathbf{c}|=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$. Примечание. Угол $(\widehat{\mathbf{ab}})$ есть внешний угол треугольника; смежный с ним внутренний угол обозначен $C$. **1043.** $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=15$; $|\mathbf{A}-\mathbf{B}|=\sqrt{593}\approx 24{,}35$. **1044.** $|\mathbf{R}|=\sqrt{37}$. **1045.** Равнодействующая равна нулю (см. задачу 1011). **1046.** $(\widehat{\mathbf{ab}})=\frac{\pi}{4}$. Решение. $\cos(\widehat{\mathbf{ab}})=\frac{\mathbf{ab}}{ab}=$

$$=\frac{(3\mathbf{p}+2\mathbf{q})(\mathbf{p}+5\mathbf{q})}{\sqrt{(3\mathbf{p}+2\mathbf{q})^2}\cdot\sqrt{(\mathbf{p}+5\mathbf{q})^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

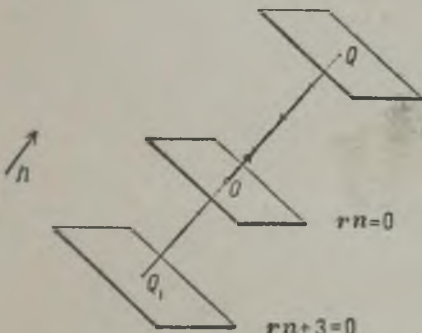
**1047.** $\cos\varphi={}^4/_5$. Указание. Выразить предварительно медианы через катеты. **1048.** $A=\frac{\pi}{2}$; $B=\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$ и $C=\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **1049.** $Q=7$, $\cos(\widehat{\mathbf{Qm}})={}^6/_7$; $\cos(\widehat{\mathbf{Qn}})=-{}^2/_7$; $\cos(\widehat{\mathbf{Qp}})={}^3/_7$. **1050.** Указание. Достаточно показать, что в случае ромба, т. е. когда $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$, скалярное произведение диагоналей равно нулю. **1051.** Указание. Вычислить скалярное произведение $\mathbf{pc}$ и убедиться, что оно равно нулю. **1052.** $\alpha=40$. **1053.** $(\widehat{\mathbf{st}})=\frac{\pi}{3}$. **1054.** $\text{пр.}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}=\frac{\mathbf{AB}}{B}=2$; $\cos(\widehat{\mathbf{Bm}})=5/_{13}$; $\cos(\widehat{\mathbf{Bn}})=-12/_{13}$. **1055.** 1) Задача не имеет решения, если $\mathbf{a}=0$ и $P\neq 0$. 2) Если $P=0$ и $\mathbf{a}=0$, то за $\mathbf{x}$ можно взять любой вектор. 3) Если $P=0$ и $\mathbf{a}\neq 0$, задача имеет бесчисленное множество решений: за $\mathbf{x}$ можно взять любой вектор, перпендикулярный к $\mathbf{a}$. 4) Если $P\neq 0$ и $a\neq 0$, то существует бесчисленное множество решений. Среди них есть вектор наименьшей длины (коллинеарный $\mathbf{a}$), именно $\mathbf{x}=\frac{P}{a^2}\mathbf{a}$. Все остальные решения получатся из указанного прибавлением к нему любого вектора, перпендикулярного к $\mathbf{a}$ (см. задачу 1039). **1056.** $|\overline{AM}|=6$; $|\overline{AD}|=\frac{12\sqrt{5}}{5}$. Указание. Надо предварительно выразить вектор-медиану и вектор-высоту через стороны треугольника, а потом уже через единичные векторы: $\overline{AM}=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}$ и $\overline{AD}=\overline{AB}+\lambda\cdot\overline{BC}$, где $\lambda$ следует вычислить из условия перпендикулярности $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$. **1057.** $\mathbf{h}=\frac{\mathbf{ab}}{a^2}\mathbf{a}-\mathbf{b}$. **1058.** Первые три пальца левой руки составляют левую тройку, те же пальцы правой руки — правую тройку. **1062.** $[\mathbf{ab}]=\mathbf{c}$; $[\mathbf{bc}]=\mathbf{a}$; $[\mathbf{ca}]=\mathbf{b}$. **1063.** $[\mathbf{ab}]=-\mathbf{c}$; $[\mathbf{bc}]=-\mathbf{a}$; $[\mathbf{ca}]=-\mathbf{b}$. **1064.** $\alpha=-15$. **1067.** Изменить направление вращения вектора $\mathbf{a}$. **1069.** Задача не имеет решения в двух случаях: 1) когда $\mathbf{B}=0$ и $\mathbf{A}\neq 0$ и 2) когда $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ не перпендикулярны друг к другу. Если же $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ взаимно перпендикулярны, то существует бесчисленное множество векторов $\mathbf{X}$, удовлетворяющих условиям задачи. Все они перпендикулярны к $\mathbf{A}$. Среди них есть вектор (перпендикулярный к $\mathbf{B}$) наименьшей длины, а именно, его модуль $|\mathbf{X}|=\frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{B}|}$; все остальные решения получатся из указанного вектора прибавлением к нему любого вектора, параллельного вектору $\mathbf{B}$ (см. задачу 1065). **1071.** Равенства 1) и 2) не верны, так как $|\mathbf{ab}|\neq|\mathbf{ba}|$. Равенство 3) справедливо лишь в случае $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$. **1072.** $[(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})]=2[\mathbf{ba}]$. Это тождество утверждает, что площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма, вдвое больше площади основного параллелограмма. **1073.** $\alpha=a^2b^2$. **1074.** $|[\mathbf{PQ}]|=11$. **1075.** 37,5 кв. ед. **1076.** $CD=3{,}8$. **1077.** $\mathbf{P}=3\mathbf{a}-17\mathbf{b}-4\mathbf{c}$. **1078.** $|\mathbf{Q}|=21$. **1079.** $\sin\varphi=\sqrt{\frac{248}{273}}$. **1080.** $\text{пр.}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}=6/_7$, если $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ составляют правую тройку; $\text{пр.}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}=-6/_7$, если $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ составляют левую тройку. **1082.** Указание. Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны, то при вычислении их смешанного произведения можно заменить $\mathbf{c}$ через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т. е. $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$. **1083.** $v=4|([\mathbf{CB}]\mathbf{A})|$. **1084.** 1) $v=25$ куб. ед.; 2) $v=0$. Указание. Второй ответ очевиден, так как из разложения соответствующих векторов **a**, **b** и **c** видно, что они компланарны. **1085.** $h=\frac{49}{\sqrt{323}}$. **1086.** 1) и 3) компланарны; 2) некомпланарны. **1087.** Указание. Воспользоваться формулой разложения двойного векторного произведения. **1089.** a) Равенства равносильны, т. е. из $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ следует, что $\alpha\mathbf{A}=\alpha\mathbf{B}$; из $\alpha\mathbf{A}=\alpha\mathbf{B}$ следует, что $\mathbf{A}=\mathbf{B}$. Другими словами, обе части векторного равенства можно помножить или разделить на один и тот же скаляр. b) Из первого равенства вытекает второе, но не обратно. Помножив равные векторы скалярно на один и тот же вектор, мы получаем равные скаляры, но равные скалярные произведения нельзя «сократить» на общий множитель, так как из равенства $\mathbf{AC}=\mathbf{BC}$ вытекает лишь, что $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{C}=0$, т. е. $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\perp\mathbf{C}$. c) Из первого равенства вытекает второе, но не обратно. Помножив равные векторы на один и тот же третий (векторно), получим равные векторы, но равные векторные произведения нельзя «сокращать» на общий сомножитель. Из равенства $[\mathbf{AC}]=[\mathbf{BC}]$ следует лишь, что $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\parallel\mathbf{C}$. d) Равенства равносильны. **1090.** Указание. Умножить все члены данного векторного равенства на вектор **c** (скалярно) и воспользоваться тем, что смешанное произведение равно нулю, когда два из сомножителей равны. После преобразования получим $[\mathbf{ab}]\mathbf{c}=0$, а это и есть условие компланарности трёх векторов. **1091.** $[\mathbf{ca}]\mathbf{b}=0$. Указание. Полезно, не пользуясь готовыми условиями компланарности трёх векторов, решить задачу, исключив из данного равенства $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ коэффициенты $\lambda$ и $\mu$. Исключение $\lambda$ может быть достигнуто умножением обеих частей равенства векторно на **a**. Исключение $\mu$ может быть достигнуто умножением уже преобразованного равенства на **b** (скалярно). **1092.** $\mathbf{x}=\frac{\alpha\mathbf{b}+[\mathbf{ac}]}{\mathbf{ab}}$. Решение. Умножим обе части второго равенства $[\mathbf{xb}]=\mathbf{c}$ векторно на **a**: $[[\mathbf{xb}]\mathbf{a}]=[\mathbf{ca}]$. Разложим двойное векторное произведение $\mathbf{b}(\mathbf{xa})-\mathbf{x}(\mathbf{ba})=[\mathbf{ca}]$. Заменяя из первого равенства $\mathbf{xa}=\alpha$, получим $\alpha\mathbf{b}-\mathbf{x}(\mathbf{ba})=[\mathbf{ca}]$. Решив это уравнение относительно **x**, получим вышеприведённый ответ. **1093.** $\mathbf{x}=\frac{\alpha[\mathbf{bc}]+\beta[\mathbf{ca}]+\gamma[\mathbf{ab}]}{[\mathbf{ab}]\mathbf{c}}$. Решение. Из данных трёх уравнений стараемся получить такие скалярные произведения, которые равны нулю:

| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r\|l} \mathbf{xa}=\alpha & \cdot\beta \\ (-)\qquad & \\ \mathbf{xb}=\beta & \cdot\alpha \\ \hline \end{array}$ $\mathbf{x}(\alpha\mathbf{b}-\beta\mathbf{a})=0$, т. е. $\mathbf{x}\perp\alpha\mathbf{b}-\beta\mathbf{a}$, | $\begin{array}{r\|l} \mathbf{xb}=\beta & \cdot\gamma \\ (-)\qquad & \\ \mathbf{xc}=\gamma & \cdot\beta \\ \hline \end{array}$ $\mathbf{x}(\beta\mathbf{c}-\gamma\mathbf{b})=0$, т. е. $\mathbf{x}\perp\beta\mathbf{c}-\gamma\mathbf{b}$, |

а если **x** перпендикулярен к двум данным векторам, то он коллинеарен их векторному произведению: $\mathbf{x}=\lambda[(\alpha\mathbf{b}-\beta\mathbf{a})(\beta\mathbf{c}-\gamma\mathbf{b})]=\lambda\cdot\beta\{\alpha[\mathbf{bc}]+\beta[\mathbf{ca}]+\gamma[\mathbf{ab}]\}$. Для определения $\lambda$ умножаем обе части скалярно на **b** и заменяем $\mathbf{xb}=\beta$; тогда получим: $\beta=\lambda\beta\{\alpha[\mathbf{bc}]\mathbf{b}+\beta[\mathbf{ca}]\mathbf{b}+\gamma[\mathbf{ab}]\mathbf{b}\}=\lambda\beta^2([\mathbf{ca}]\mathbf{b})$, откуда $\lambda=\frac{1}{\beta([\mathbf{ca}]\mathbf{b})}=\frac{1}{\beta([\mathbf{ab}]\mathbf{c})}$.

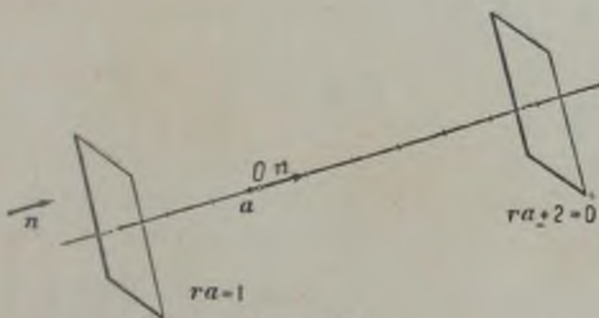
Вставляя это значение $\lambda$ в полученное выражение для **x**, получим вышеприведённый ответ. **1094.** $\mathbf{r}_4=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2$. **1095.** В точке пересечения диагоналей параллелограмма. (Ответ единственный.) Указание. При любом выборе полюса для всякого параллелограмма имеем $\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_4$, т. е. $\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4=2(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_4)$. **1096.** Указание. Середины всех трёх отрезков имеют один и тот же радиус-вектор $\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4}{4}$, где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{r}_4$ обозначают радиусы-векторы вершин тетраэдра. **1097.** Указание. Предварительно вывести формулу для радиуса-вектора центра тяжести треугольника: $\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3}$, где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ — радиусы-векторы вершин при произвольно выбранном полюсе. **1098.** Указание. Обозначив через $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots, \mathbf{r}_n$ радиусы-векторы данных материальных точек (при произвольно выбранном полюсе), предварительно показать, что их центр тяжести определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\ldots+\mathbf{r}_n}{n}$. **1099.** $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\lambda(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)$ или $[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)]=0$. Указание. Условие выражает коллинеарность векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. **1100.** Три точки коллинеарны. **1101.** $\alpha(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)+\beta(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)+\gamma(\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_1)=0$, где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ не равны нулю одновременно. **1102.** $S={}^1/_2\,|[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]|$. **1102*.** Указание. Воспользоваться тем, что площадь треугольника $ABC$ равна нулю. **1103.** $\overline{AB}=6\mathbf{i}-5\mathbf{j}+\mathbf{k}$; $\overline{BC}=-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$; $\overline{CA}=-3\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. **1104.** Нельзя, так как векторы, заданные своими координатами являются свободными векторами. При параллельном перемещении треугольника в пространстве проекции его сторон на оси не меняются. **1105.** $B(6;\ -4;\ 5)$; $C(9;\ -6;\ 10)$; $\overline{CA}\,\{-7;\ 1;\ -7\}$. **1106.** Указание. $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_4$, т. е. стороны $AB$ и $DC$ равны и параллельны. **1106*.** $\mathbf{r}_1'=7\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_2'=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_3'=0$; $\mathbf{r}_4'=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-5\mathbf{k}$. **1107.** $\text{пр}_x\mathbf{a}=X=13$; $\mathbf{a}_y=Y\mathbf{j}=7\mathbf{j}$. **1108.** $(\mathbf{ab})=-20$. **1109.** $a=\sqrt{154}$; $\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{154}}$; $\cos\beta=\frac{8}{\sqrt{154}}$; $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{154}}$. **1110.** $\mathbf{P}\,\{3;\ -9;\ \pm3\sqrt{6}\}$. **1111.** $\mathbf{a}\,\{{}^6/_{11};\ {}^7/_{11};\ -{}^6/_{11}\}$ или $\mathbf{a}\,\{-{}^6/_{11};\ -{}^7/_{11};\ {}^6/_{11}\}$. **1112.** $\mathbf{p}\,\{0;\ -{}^4/_5;\ {}^3/_5\}$ или $\mathbf{p}\,\{0;\ {}^4/_5;\ -{}^3/_5\}$. **1113.** $\mathbf{R}\,\{20;\ 9;\ 12\}$; $R=25$; $\cos\alpha={}^{20}/_{25}$; $\cos\beta={}^9/_{25}$; $\cos\gamma={}^{12}/_{25}$. **1114.** $\alpha=15$; $\gamma=-{}^1/_5$. **1115.** $\mathbf{P}_1\left\{\frac{15}{\sqrt{17}};\ \frac{25}{\sqrt{17}};\ 0\right\}$ и $\mathbf{P}_2\left\{-\frac{15}{\sqrt{17}};\ -\frac{25}{\sqrt{17}};\ 0\right\}$. **1116.** $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{6}$; $\cos B={}^4/_{21}$; $\cos C=\frac{9\sqrt{2}}{14}$. **1116*.** $S=\frac{5}{2}\sqrt{17}$ кв. ед. **1117.** $v=6$ куб. ед. Векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ образуют левую тройку, так как их смешанное произведение есть число отрицательное. **1118.** a) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ некомпланарны; b) $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ компланарны. **1119.** $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0.$

Сравнить полученный результат с ответом задачи 1101 и установить связь между ними. **1120.** $\frac{y_1x-x_1y}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}+\frac{y_2x-x_2y}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=0$. **1121.** $\mathbf{rk}=0$ — уравнение плоскости $(xy)$; $\mathbf{rj}=0$ — уравнение плоскости $(xz)$; $\mathbf{ri}=0$ — уравнение плоскости $(yz)$; $\mathbf{r}=\lambda\mathbf{k}$ — уравнение оси $z$; $\mathbf{r}=\lambda\mathbf{i}$ — уравнение оси $x$; $\mathbf{r}=\lambda\mathbf{j}$ — уравнение оси $y$. **1122.** $\mathbf{r}(\mathbf{i}-8\mathbf{j}+3\mathbf{k})=-8$. **1123.** Первая точка принадлежит указанному геометрическому месту, а вторая — нет. **1124.** $\mathbf{r}^2-2(\mathbf{rr}_1)=0$ или $\mathbf{r}(\mathbf{r}-2\mathbf{r}_1)=0$. **1125.** Радиус-вектор центра $\mathbf{r}_1=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$; длина радиуса $a=7$. **1126.** $\mathbf{r}^2-\mathbf{r}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)+\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2=0$. **1127.** $C\left(\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2}\right)$; $a={}^1/_2\,|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$. **1128.** $\left\{\begin{matrix}\mathbf{r}^2-6\mathbf{ri}=16\\ \mathbf{rk}=0\end{matrix}\right\}$. Примечание. Второе уравнение выражает условие, что все рассматриваемые точки лежат в плоскости $(xy)$; без этого ограничения одно первое уравнение определит сферу с тем же центром и радиусом. **1129.** a) шаровая поверхность с центром $C(-4\mathbf{k})$ и радиусом $a=2$; b) шаровая поверхность с центром $C_1(6\mathbf{j}+8\mathbf{k})$ и радиусом $a=15$. **1130.** $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=a^2$. Указание. Для решения задачи вводим обозначения: $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$. **1131.** $\mathbf{ri}=4$. Данное геометрическое место точек есть плоскость, перпендикулярная к оси $x$ и проходящая через точку $A(4;\ 0;\ 0)$. **1132.** a) Плоскость, перпендикулярная оси $y$ и проходящая через точку $(0;\ -5;\ 0)$; b) плоскость, перпендикулярная оси $z$ и проходящая через точку $(0;\ 0;\ 6)$. **1134.** $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$, где $x$ и $y$ обозначают координаты текущего радиуса-вектора $\mathbf{r}$. **1135.** Прямая, проходящая через точку $A(\mathbf{r}_1)$ параллельно вектору $\mathbf{a}$. **1136.** $|(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\ (\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)|=0$. **1137.** $\mathbf{rr}_1=a^2$. Указание. При выводе этого уравнения пользуемся перпендикулярностью касательной к радиусу, проведённому в точку касания, и тем, что данная точка $A(\mathbf{r}_1)$ лежит на окружности. **1138.** a) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)=0$; b) $\left[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\left(\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3}{2}-\mathbf{r}_2\right)\right]=0$; c) $\mathbf{r}(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)=\frac{1}{2}(\mathbf{r}_3^2-\mathbf{r}_2^2)$; d) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{c}_1+\mathbf{b}_1)=0$, где $\mathbf{c}_1$ — единичный вектор стороны $\overline{AB}$; $\mathbf{c}_1=\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|}$ и $\mathbf{b}_1$ — единичный вектор стороны $\overline{CA}$; $\mathbf{b}_1=\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|}$. **1139.** Нормальными уравнениями являются уравнения 3) и 4). **1140.** См. черт. 157. **1141.** См. черт. 158. **1142.** $\mathbf{r}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i}-\frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j}-\frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}\right)-\frac{5}{\sqrt{14}}=0$. **1143.** $p=3$. **1144.** $p=1$. См. черт. 159. **1145.** $\cos(\widehat{\mathbf{ni}})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(\widehat{\mathbf{nj}})=-\frac{3\sqrt{2}}{10}$; $\cos(\widehat{\mathbf{nk}})=\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **1146.** Точки $A$ и $C$ лежат на данной плоскости, точка $B$ не лежит на ней. **1147.** $P\left(\frac{a}{a^2}\mathbf{a}\right)$, во втором случае $P(p\cdot\mathbf{n})$. Указание. Искомая точка имеет радиус-вектор, коллинеарный $\mathbf{a}$, т. е. $\mathbf{r}_1 = \lambda\mathbf{a}$. Множитель $\lambda$ вычисляется из




Черт. 157.

условия, что точка лежит на плоскости. **1148.** $\mathbf{r}_1 = {}^{10}/_9\,(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ **1149.** $\mathbf{r}\,({}^4/_{13}\mathbf{i} + {}^{12}/_{13}\mathbf{j} - {}^3/_{13}\mathbf{k}) - 4 = 0$ или ${}^4/_{13}x + {}^{12}/_{13}y - {}^3/_{13}z - 4 = 0$, если текущий радиус-вектор выразить через текущие координаты: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. **1150.** $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = (\mathbf{r}\mathbf{n})$; $Ax + By +$




Черт. 158.

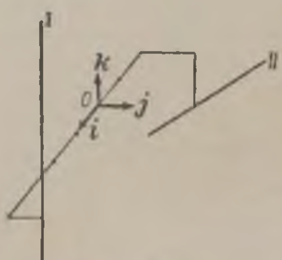
$+ Cz = (\mathbf{r}\mathbf{a})$, где $\mathbf{r}\,\{x, y, z\}$, $\mathbf{n}\,\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ и $\mathbf{a}\,\{A; B; C\}$. **1151.** $\mathbf{r}\,(11\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 9\mathbf{k}) + 15 = 0$. **1152.** $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{r}_1 = 0$ или $\mathbf{r}\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1^2 = 0$. **1153.** $\delta_1 = -\dfrac{28}{\sqrt{65}}$; $\delta_2 = \dfrac{4}{\sqrt{30}}$; $\delta_3 = 0$, т. е. точка лежит на плоскости. **1154.** $\mathbf{r}\,(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) = p_1 - p_2$ и $\mathbf{r}\,(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) = p_1 + p_2$. **1155.** 1) Плоскость проходит через полюс; 2) плоскость параллельна орту $\mathbf{k}$; 3) пло-

225
64
289

скость проходит через полюс и параллельна $\mathbf{i}$, т. е. проходит через ось $x$; 4) плоскость перпендикулярна орту $\mathbf{k}$; 5) плоскость перпендикулярна орту $\mathbf{i}$ и проходит через полюс, т. е. совпадает с координатной плоскостью $(yz)$. **1156.** a) $(\mathbf{ri})-2=0$, b) $\mathbf{r}(\mathbf{j}+\mathbf{k})+4=0$; c) $\mathbf{r}(4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k})+30=0$. **1156*.** a) $\mathbf{rk}=0$; b) $\mathbf{r}(3\mathbf{i}-8\mathbf{j}+\mathbf{k})=41$; c) $\mathbf{r}(2\mathbf{j}+3\mathbf{k})=0$. **1157.** $\mathbf{r}(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k})-3=0$. **1158.** $\mathbf{r}(\mathbf{i}+26\mathbf{j}+11\mathbf{k})=0$. **1159.** $\mathbf{r}(3\mathbf{i}-5\mathbf{j})+14=0$. **1160.** $\mathbf{r}(24\mathbf{i}-5\mathbf{j}-30\mathbf{k})-41=0$. **1161.** $\mathbf{r}(-2\mathbf{i}+36\mathbf{j}+10\mathbf{k})=0$. **1162.** $\mathbf{r}(11\mathbf{i}-5\mathbf{j}+4\mathbf{k})=34$. **1163.** 1) $\frac{a}{\lambda}$; $\frac{a}{\mu}$; $\frac{a}{\nu}$; 2) $\frac{a}{\mathbf{ai}}$; $\frac{a}{\mathbf{aj}}$; $\frac{a}{\mathbf{ak}}$. **1164.** $\mathbf{r}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=10$. **1165.** 1) Плоскости параллельны; 2) $\varphi=\arccos 0{,}7$; 3) $\varphi=\frac{\pi}{2}$. **1166.** $\mathbf{r}(3\mathbf{i}-8\mathbf{j}+\mathbf{k})+7=0$. **1167.** $d=7$. Указание. В данном случае искомое расстояние определяется по формуле $d=p_1+p_2$, так как плоскости лежат по разные стороны от полюса. **1168.** $\mathbf{r}(4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k})=57$ и $\mathbf{r}(4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k})=-3$. **1169.** $\mathbf{r}(23\mathbf{i}+5\mathbf{j}-11\mathbf{k})+15=0$. **1170.** $\mathbf{r}[\mathbf{ab}]=0$. **1171.** $\mathbf{r}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. **1173.** $\mathbf{r}(21\mathbf{i}+4\mathbf{j}+14\mathbf{k})=20$. **1174.** $\mathbf{r}\left(\mathbf{a}-\frac{(\mathbf{ac})}{(\mathbf{bc})}\mathbf{b}\right)=\alpha-\frac{(\mathbf{ac})}{(\mathbf{bc})}\beta$.

Черт. 159.

**1175.** 1) $p_1=13$; 2) $p_2=\frac{3}{14}\sqrt{42}$; 3) $p_3=0$. **1175*.** Прямые лежат в одной и той же плоскости, проходящей через полюс, параллельны между собой и расположены на одинаковом расстоянии, но по разные стороны от полюса. **1176.** $[\mathbf{r}(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k})]=\pm\sqrt{17}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})$. **1177.** $\mathbf{rb}=0$. **1178.** 1) $\mathbf{r}_1=\frac{[\mathbf{ab}]}{\mathbf{a}^2}$; 2) $\mathbf{r}_1=[\mathbf{nN}]$; 3) $\mathbf{r}_1=-0{,}72\mathbf{i}+0{,}04\mathbf{j}+0{,}8\mathbf{k}$. **1179.** 1) $[\mathbf{r}[\mathbf{ab}]]=0$; 2) $[\mathbf{r}(10\mathbf{i}-23\mathbf{j}-\mathbf{k})]=0$. **1180.** $P(2;\ -{}^3/_2;\ -{}^1/_2)$ или, пользуясь иной записью: $\mathbf{r}=2\mathbf{i}-{}^3/_2\mathbf{j}-{}^1/_2\mathbf{k}$. **1181.** См. черт. 160. Указание. Прежде чем строить прямую, надо найти одну из её точек, проще всего основание перпендикуляра, опущенного из полюса на прямую (см. задачу 1180). Для первой прямой: $\mathbf{r}_1=4\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Для второй прямой: $\mathbf{r}_1=-2\mathbf{i}+{}^3/_2\mathbf{j}-{}^3/_2\mathbf{k}$. **1182.** 1) Прямая параллельна орту $\mathbf{i}$, т. е. оси $x$; 2) прямая параллельна орту $\mathbf{j}$, т. е. оси $y$; 3) прямая параллельна орту $\mathbf{k}$, т. е. оси $z$; 4) прямая перпендикулярна орту $\mathbf{k}$, т. е. параллельна плоскости $(xy)$; 5) прямая перпендикулярна орту $\mathbf{i}$, т. е. параллельна плоскости $(yz)$; 6) прямая перпендикулярна орту $\mathbf{j}$, т. е. параллельна плоскости $(xz)$; (7) прямая лежит в плоскости $(yz)$; 8) прямая лежит в плоскости, проходящей через ось $z$. **1183.** 1) $[\mathbf{ra}]=$



Черт. 160.

$=\beta i+\gamma k$; 2) $[ra]=\gamma k$; 3) $[ra]=0$. **1184.** 1) $\delta_1=\sqrt{14}$; 2) $\delta_2=10$; 3) $\delta_3=2\sqrt{41}$. **1185.** $[r(2i-3j+6k)]=18i-10j-11k$. **1186.** $[r(4i+3j+k)]=10i-14j+2k$. **1187.** $[(r-r_1)[a_1a_2]]=0$. **1187*.** $[r, i-j-k]=3(i+2j-k)$. **1188.** 1) $[r(4i-j+2k)]=5i+8j-6k$; 2) $x=2+4\lambda$, $y=1-\lambda$, $z=3+2\lambda$ или $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

**1189.** 1) $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{-6}$; 2) $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{7}$; 3) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z}{-3}$. **1190.** $\frac{x+\frac{\beta}{\nu}}{\lambda}=\frac{y-\frac{\alpha}{\nu}}{\mu}=\frac{z}{\nu}$, если $\nu\neq 0$. Указание. Умножая последовательно обе части данного векторного уравнения скалярно на $i$, $j$ и $k$ и выразив текущий радиус-вектор через текущие координаты, получим три уравнения; $\nu y-\mu z=\alpha$, $-\nu x+\lambda z=\beta$, $\mu x-\lambda y=\gamma$. Если $\nu\neq 0$, первые два уравнения можно переписать в том виде, который дан в ответе. Третье уравнение является их следствием. **1191.** $[ra]=b$, где $a\{m, n, p\}$; $b=[r_1a]=[(x_1i+y_1j+z_1k)(mi+nj+pk)]$; $r\{x, y, z\}$. **1192.** $[r(3i+5j+2k)]=25i-19j+10k$.

**1192*.** $$\delta=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ n & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ p & m\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ m & n\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

**1193.** $[r(5i-3j+3k)]=9i+5j-10k$; $[r(-2i+j-5k)]=i+17j+3k$; $[r(-3i+2j+2k)]=2i-3j+6k$. **1194.** Указание. Пользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. **1196.** Условие параллельности: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{\nu_1}{\nu_2}$. Условие перпендикулярности: $\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0$. **1197.** 1) $[r(-6i+2j+k)]=2i+j+10k$; 2) $[r(5i-17j-13k)]=19i+14j-11k$. **1198.** 1) $\cos\varphi=-\frac{3}{\sqrt{87}}$; 2) $\varphi=\frac{\pi}{2}$. **1199.** $[r(4i-j+5k)]=13(i-j-k)$; $\varphi=\arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{6}\right)$.

**1200.** $\delta=0{,}9\sqrt{3/14}$. **1201.** $[r(-3i-3j+k)]=6i-5j+3k$. Указание. Можно перенести полюс в данную точку, воспользоваться уравнением перпендикуляра, опущенного из полюса на данную прямую (см. задачу 1179), и перейти обратно к старому полюсу. **1202.** $[r[b_1b_2]]=0$. **1203.** $[r(13i+37j+58k)]=37i-245j+148k$. Указание. Можно воспользоваться задачей 1202 и указанием к задаче 1201. **1204.** $\delta=\frac{16}{\sqrt{6}}$. **1204*.** $[r, 11i+11j-22k]=-33i+105j+36k$. **1205.** $\delta=2\sqrt{21}$.

**1205*.** $d = \dfrac{\left\| \begin{matrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{\left|\begin{matrix} n_1 p_1 \\ n_2 p_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} p_1 m_1 \\ p_2 m_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} m_1 n_1 \\ m_2 n_2 \end{matrix}\right|^2}}$. **1206.** 1) Пересекаются в точке $\mathbf{r}\{1;\ -2;\ 0\}$; 2) пересекаются в точке $\mathbf{r}\{-3;\ 5;\ -3\}$. **1206*.** $|[\mathbf{r}\mathbf{i}]| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} |[\mathbf{r}, \mathbf{i} + \mathbf{j}] + \mathbf{i} - \mathbf{j}|$ или $x^2 - y^2 - 2xy - 4z + 2 = 0$, т. е. гиперболический параболоид. **1207.** 1) $\mathbf{r}\{0;\ 0;\ -2\}$; 2) $\mathbf{r}\{2; 3; 1\}$; 3) прямая параллельна плоскости; 4) прямая лежит на плоскости, точка пересечения неопределённа. **1208.** $[\mathbf{r}(5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k})] = 13\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$. **1209.** $\alpha = -1$. **1210.** $\alpha = 4$, $\beta = -8$. **1211.** $[\mathbf{r}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k})] = 6\mathbf{i} - 16\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$. **1212.** $[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{a}] = 0$ или $[\mathbf{r}\mathbf{a}] = [\mathbf{r}_1\mathbf{a}]$. **1213.** $A'(5\mathbf{j} + \mathbf{k})$. **1214.** $\mathbf{r}'\{5;\ -1;\ 0\}$. **1215.** $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{a} = 0$ или $\mathbf{r}\mathbf{a} = \mathbf{r}_1\mathbf{a}$. **1216.** $\mathbf{r}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = 0$. **1217.** $\mathbf{r}(23\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 78$. **1218.** Проходит. **1219.** Лежит. **1220.** $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}] = 0$. У к а з а н и е. Задача равносильна составлению уравнения плоскости по двум точкам и параллельному ей вектору **a** (см. формулу (42) § 3 настоящей главы). **1221.** $\mathbf{r}(-8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 22\mathbf{k}) + 59 = 0$. **1222.** $\mathbf{r}(-11\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 19\mathbf{k}) = 10$. **1223.** $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)[\mathbf{a}\mathbf{A}] = 0$. **1224.** $[\mathbf{r}(7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})] = \mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 29\mathbf{k}$. **1225.** $\mathbf{r}(8\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 48$. **1226.** $\mathbf{r}(17\mathbf{i} - 13\mathbf{j} - 16\mathbf{k}) = 10$. **1227.** $\mathbf{r}(23\mathbf{i} - 16\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) = 153$. У к а з а н и е. Задача сводится к задаче: провести плоскость через данную точку параллельно двум данным векторам. **1228.** $[\mathbf{r}(10\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 19\mathbf{k})] = 7\mathbf{i} - 37\mathbf{j} - 29\mathbf{k}$. У к а з а н и е. Проводим через данную точку $A$ плоскость, перпендикулярную к данной прямой: $\mathbf{r}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 5$; находим точку пересечения её с данной прямой: $B\ (^{32}/_{14}\mathbf{i} - {}^{1}/_{14}\mathbf{j} + {}^{9}/_{14}\mathbf{k})$ и через две точки $A$ и $B$ проводим искомую прямую. **1229.** Удобнее всего искомый перпендикуляр представлять системой двух уравнений, а именно: уравнением плоскости, проходящей через точку перпендикулярно прямой, и плоскости, проходящей через точку и прямую: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{a} = 0$, $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}] = 0$. **1230.** $\mathbf{r}'\{10; 7; 4\}$. **1231.** $\delta = 3$. **1232.** $A'(2\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$. **1233.** $[\mathbf{r}(74\mathbf{i} + 57\mathbf{j} - 110\mathbf{k})] = 220\mathbf{j} + 114\mathbf{k}$.