f непрер. и инъективна на $\langle a, b\rangle$

Обозн.: $m = \inf f(\langle a, b\rangle)$; $M = \sup f(\langle a, b\rangle)$.

Известно $f: \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$

Тогда: 1) f - биекция $f^{-1}: \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$.

2) f^{-1} - строго монотонна.

3) f^{-1} непрерывна.

Д-во: По следствию теоремы Больцано-Коши о промежуточных зн-ях f - строго монотонна.

Пусть $f\uparrow$.

1. По лемме о сохр. промежутка

$f(\langle a; b\rangle)$ - промежуток $= \langle m, M\rangle$

Тогда f - сюръективна $\Rightarrow f$ - биекция и $\exists f^{-1}$

2. Возьмем $y_1, y_2 \in \langle m, M\rangle : y_1 < y_2$.

Тогда $\exists x_1, x_2 \in \langle a; b\rangle : f(x_1) = y_1$; $f(x_2) = y_2$

П., что $x_1 \geq x_2$ тогда $f(x_1) \geq f(x_2)$, т.к. $f\uparrow$,

но $y_1 < y_2$?! $\Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Rightarrow f^{-1}\uparrow$

3. Т.к. f^{-1} строго монот на $\langle m, M\rangle$ и

$f^{-1}(\langle m, M\rangle) = \langle a, b\rangle$ - промет., то по т.

о разрыв. и непрер. монот. ф-ии $\Rightarrow f^{-1}$ - непрер. ■

(2 пункт)