Теорема о существовании топологической сортировки. Цепи, пути, расписания. Теорема о кратчайшем расписании

Руслан Назирович Мокаев

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург, 26.09.2023

Содержание лекции

В предыдущих сериях:

- Бинарные отношения, отношения порядка
- Минимальный, наименьший, максимальный, наибольший элементы в множестве
- Лемма о существовании минимального (максимального) элемента в множестве
- Топологическая сортировка (определение и пример)

Сегодня:

- Теорема о существовании топологической сортировки
- Цепь, путь, расписание
- Теорема о кратчайшем расписании

Теорема о существовании топологической сортировки

Определение: **Топологической сортировкой** множества A, (строго) частично упорядоченного отношением R, называется такой (строгий) линейный порядок Q на A, что $(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in Q$.
Теорема: У любого конечного частично упорядоченного относительно R множества A существует топологическая сортировка.

Док-во: Обозначим $A_0 := A$.
Далее организуем итерационный процесс "упорядочивания" A через конструирование множеств $\{A_i\}$: если $A_i = \varnothing, \forall i \in \mathbb{N}_0, i \leq |A|$, то его топологическая сортировка $T_i = \varnothing$.

Если $A_i \neq \varnothing$ по лемме $\exists$ минимальный элемент $=: m_i$.
Определим $A_{i+1} := A_i \setminus \{m_i\}$, $T_i := \{(m_i, a) \ : \ a \in A_{i+1}\} \cup T_{i+1}$.
Докажем, что T_i является линейным порядком на A_i и *согласовано* с R, то есть $T = T_0$ является топологической сортировкой $A_0 = A$.

Лемма: если $(a, b) \in R$, то $\exists i, j \in 0 : (|A| - 1) : a = m_i, b = m_j$.
Док-во: $\exists$-ие следует их построения T, $i \leq j$ т.к., если $j < i$, то $a \in A_j$, $a \neq b$, но тогда b – не минимальный в A_j, т.к. $(a, b) \in R$.
Заметим, что т.к. $i \leq j$, то $b \in A_i$, то есть $(a, b) \in T$ (согласованность).

□

Рефлексивность: по определению T_i.

Транзитивность: $\forall a, b, c \in A, (a, b) \in T, (b, c) \in T \Rightarrow$ по построению T $\exists i, j, k \in 0 : (|A| - 1)$ такие, что $a = m_i, b = m_j, c = m_k$, причем $i < j$ и $j < k$. Значит $i < k$ и $\Rightarrow c \in A_i \Rightarrow (a, c) \in T$.

Антисимметричность: пусть $\exists a, b \in A : (a, b) \in T, (b, a) \in T \Rightarrow$
по построению T $\exists i, j \in 0 \ldots (|A| - 1) : a = m_i, b = m_j$.
Т.к. $(a, b) \in T, i \leq j$ и т.к. $(b, a) \in T, j \leq i \Rightarrow i = j \Rightarrow a = b$.

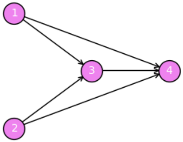
Линейный порядок: $\forall a, b \in A$ $\exists i, j \in 0 \ldots (|A| - 1) : a = m_i, b = m_j$. Если $i < j$, то $(a, b) \in T$, иначе $(b, a) \in T$ по построению T.

Согласованность следует из Леммы.

$\blacksquare$

Пример

Пусть определен частичный порядок R на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

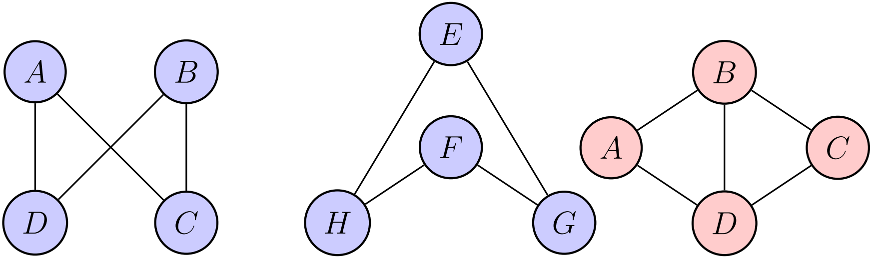


$A_0 = A = \big\{1, 2, 3, 4\big\}$, $m_0 = 1$
$A_1 = A_0 \setminus \{m_0\} = \{2, 3, 4\}$, $T_0 = \big\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\big\} \cup T_1$
$m_1 = 2$, $A_2 = A_1 \setminus \{m_1\} = \{3, 4\}$, $T_1 = \big\{(2, 3), (2, 4)\big\} \cup T_2$
$m_2 = 3$, $A_3 = A_2 \setminus \{m_2\} = \{4\}$, $T_2 = \big\{(3, 4)\big\} \cup T_3$
$T_3 = \varnothing \Rightarrow T = T_0 = \big\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\big\} \cup \big\{(2, 3), (2, 4)\big\} \cup \big\{(3, 4)\big\}$
Другая топологическая сортировка:
$A_0 = A = \big\{1, 2, 3, 4\big\}$, $m_0' = 2$
$A_1' = A_0 \setminus \{m_0'\} = \{1, 3, 4\}$, $T_0' = \big\{(2, 1), (2, 3), (2, 4)\big\} \cup T_1'$
$T_1' = \big\{(1, 3), (1, 4)\big\} \cup T_2'$, $T_2' = \big\{(3, 4)\big\} \cup T_3'$, $T_3' = \varnothing$

Диаграмма Хассе

Диаграмма Хассе – графическое представление конечного частичного упорядоченного множества W. Элементы частично упорядоченного множества изображаются на плоскости в виде точек (вершин графа) таким образом, что

- если $(b, a) \in R$, то a изображается *выше* b;
- между b и a есть ребро (линия), если $(b, a) \in R$ и *не существует* c такого, что $(b, c) \in R$ и $(c, a) \in R$.



Цепи и пути

Определение: На множестве A задано отношение R, $\varnothing \neq X \subseteq A$. Отношение $R(X) := R \cap X^2$ называют **сужением** R на X.
Замечание: в результате сужения свойства могут появиться, но не исчезнуть (сужение нерефлексивного может быть рефлексивным).
Определение: **Цепью** на множестве A, (строго) частично упорядоченном R, называют всякое подмножество $X \subseteq A$, линейно упорядоченное сужением $R(X)$.
Определение: **Длиной** цепи называют её мощность.

Определение: Пусть Z – наибольшая по длине цепь, заканчивающаяся в $a \in A$, тогда Z называют **критическим путём** для a.
Определение: Если критический путь для a конечен, то его длину $d(a)$ называют **глубиной** a.
Определение: Пусть A (строго) упорядоченно относительно R, $A \neq \varnothing$, $\{A_1, \dots A_n\}$ – разбиение A, тогда оно называется **расписанием**, если $\forall a, b \in A \; a \neq b$ и $(b, a) \in R$ и $a \in A_k \Rightarrow b \in A_j$, $j < k$.

Теорема о существовании кратчайшего расписания

Теорема: A – конечное, строго частично упорядоченное отношением R множество. Рассмотрим $A_i = \{x \in A : d(x) = i\}, i \in 1 : h$. Тогда $\{A_i\}_{i \in 1:h}$ задает кратчайшее (наименьшей мощности) расписание на A.

Док-во: Для начала рассмотрим какой-то критический путь Z, который заканчивается в z_n. На этом пути есть предыдущий элемент z_{n-1}. Множество $Z \setminus \{z_n\}$ имеет те же свойства, что имеет Z. Для Z наибольшим элементом является z_n, для $Z \setminus \{z_n\}$ наибольший элемент – z_{n-1}.

Покажем, что $d(z_{n-1}) \neq d(z_n)$.

Если $d(z_{n-1}) = d(z_n)$, то $\exists$ критический путь Z', который заканчивается в z_{n-1}. При этом $z_n \notin Z'$, т.к. z_{n-1} – наибольший элемент Z', $(z_{n-1}, z_n) \in R$ и $(z_n, z_{n-1}) \notin R$.

$\Rightarrow d(z_{n-1}) \neq d(z_n)$, $Z \setminus \{z_n\}$ – цепь, которая заканчивается в z_{n-1},
$|Z \setminus \{z_n\}| = d(z_n) - 1 \Rightarrow d(z_{n-1}) = d(z_n) - 1$.

Рассмотрим самый длинный критический путь X. $|X| = h$, т.к. X заканчивается в своем наиб. элементе x_n, $d(x_n) = h = \max_{a \in A} d(a)$. В X все элементы строго линейно упорядочены, тогда $d(x_n) = h$, $d(x_{n-1}) = h - 1$, $d(x_{n-2}) = h - 2$ и т.д. $\Rightarrow \forall i \in 1 : h \; A_i \cap X \neq \varnothing$.

Покажем, что $\{A_i\}_{i \in 1:h}$ – кратчайшее расписание:

1. $\forall i \in 1:h\ A_i \neq \varnothing$ – проверили.
2. $\forall i \neq j \in 1:h\ A_i \cap A_j = \varnothing$ – т.к. глубина элемента определяется единственным образом.
3. $\cup A_i = A$:
   - $\cup A_i \subseteq A$ – очевидно
   - $\cup A_i \supseteq A$ – т.к. $\forall a \in A\ \exists\ d(a) \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{A_i\}_{i \in 1:h}$ – разбиение A.
4. Если $\forall a \neq b \in A\ (b, a) \in R\ \exists\ k \in 1:h$ что $a \in A_k \Rightarrow \exists\ j < k : b \in A_j$. Предположим противное, что $j \geq k$, или $d(b) \geq d(a)$. Рассмотрим критический путь B, который заканчивается в b, $d(b) \geq k$. $a \notin B$, иначе было бы верно, что $\forall a \neq b \in A\ (a, b) \in R$ – противоречит асимметричности. Можем взять $B \cup \{a\}$ – по транзитивности, т.к. $\forall x \in B\ (x, b) \in R$ и $\forall a \neq b \in A\ (b, a) \in R$, то $(x, a) \in R \Rightarrow B \cup \{a\}$ – строго линейно упорядочено $\Rightarrow B \cup \{a\}$ – цепь, заканчивающаяся в $a \Rightarrow d(a) \geq |B \cup \{a\}| \geq k + 1$ – этого быть не может, т.к. $d(a) = k \Rightarrow d(b) < d(a)$.
5. $\{A_i\}_{i \in 1:h}$ – кратчайшее: рассмотрим другое расписание $A'_1, \ldots, A'_s$. X – самая длинная цепь в $A, |X| = h$. Все элементы X должны быть "назначены" в различные элементы расписания в силу строгой линейной упорядоченности X.
$\Rightarrow$ по принципу Дирихле $|X| = h \leq s$.
$\Rightarrow \{A_i\}_{i \in 1:h}$ – кратчайшее расписание на A.