Лемма. $a>0,\ r_n\in\mathbb{Q},\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}=1$

Д-во: 1) $a=1$: $\forall r_n\ 1^{r_n}=1$ – верно.

2) $a>1$: Возьмем $r_n=\frac{1}{n}$, тогда $a^{r_n}>1$.

Можно представить $a^{\frac{1}{n}}$, как $a^{\frac{1}{n}}=1+\alpha_n$, где $\alpha_n>0$

$a=(1+\alpha_n)^n \geq 1+n\cdot\alpha_n \Rightarrow 0<\alpha_n<\frac{a-1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т° о 2-х милиц. $\alpha_n \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$

Возьмем $r_n=-\frac{1}{n} \Rightarrow a^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Т.к. $a^{\pm\frac{1}{n}} \to 1$, то

$\exists N_0: 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N_0}}<a^{\frac{1}{N_0}}<1+\varepsilon$

Пусть $r_n' \to 0$. Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{N_0}$:

$\exists N: \forall n\geq N\ -\frac{1}{N_0}<r_n'<\frac{1}{N_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N_0}}<a^{r_n'}<a^{\frac{1}{N_0}}<1+\varepsilon$

такой N существует, т.к $|\frac{1}{N_0}|$ – конкретное число

3) $a<1$: $a^{r_n}=\frac{1}{a^{-r_n}} \longrightarrow 1$ по п. 2) ■

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$	$f_0:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$
$f(x)=a^x=\lim\limits_{r\to x} a^r\ (r\in\mathbb{Q})$	$f_0(x)=a^x,\ x\in\mathbb{Q}$

Т. Корректность определения.

$a>0,\ r_n\in\mathbb{Q},\ r_n\xrightarrow{n\to\infty}x$

I. Д-ем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ – конечен, и значит предел не зависит от выбора r_n

Д-во: 1) $a=1$: $\lim\limits_{x\to a} 1=1$ – верно

2) $a>1$

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=x$, то вып. условие Коши:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall m,n>N\ |r_m-r_n|<\varepsilon$

Рассм-м $|a^{r_m}-a^{r_n}|=a^{r_n}|a^{r_m-r_n}-1|$ $*$

[Д-ем вспомогательный факт: $|a^x-1|\leq 2|x|\cdot(a-1)$

при $a>1$ и $x\in\mathbb{Q},\ x\leq 1$.

1) $x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}$

Обозначим $\alpha=a^{\frac{1}{n}}-1 \Rightarrow a=(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha$

Тогда $0<\alpha\leq\frac{a-1}{n}=\frac{1}{n}(a-1)$

Значит при $x=\frac{1}{n}$: $|a^x-1|\leq x(a-1)$

2) $0<x<1 \Rightarrow \exists n: \frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$ (при $x\neq\frac{1}{n}$)

$a^x-1<a^{\frac{1}{n}}-1\leq\frac{1}{n}\cdot(a-1)\leq 2x(a-1)$,

т.к. $2x>\frac{2}{n+1}\geq\frac{1}{n} \Rightarrow 2n\geq n+1 \Rightarrow n\geq 1\ (n\in\mathbb{N})$

3) $-1<x<0$. Пусть $q=-x$

$|a^x-1|=a^x|1-a^{-x}|=a^x|a^q-1|\leq a^x\cdot 2q(a-1)<$

$<1\cdot 2|x|(a-1)$, т.к. $a^x<1$, а $q=-x$]

Вернемся к $*$: $|a^{r_m}-a^{r_n}|=a^{r_n}|a^{r_m-r_n}-1|\leq$

$\leq a^{r_n}\cdot 2|r_m-r_n|(a-1)<a^{r_n}\cdot 2\varepsilon\cdot(a-1)$

Т.к. $r_n\to x$, то r_n – огранич. $\Rightarrow \exists M: a^{r_n}<M$

Тогда по крит. Коши a^{r_n} имеет конечн. предел.

3) $a<1$: $a^{r_n}=\frac{1}{b^{r_n}} \Rightarrow a^{r_n}$ тоже имеет предел.

II Докажем, что предел не зависит от выбора r_n:

Д-во: 1) $a>1$: $r_n\to x$ и $r_n'\to x$ $(r_n, r_n'\in\mathbb{Q})$

Тогда $r_n-r_n'\longrightarrow 0$. Рассм-м $|a^{r_n}-a^{r_n'}|=$

$a^{r_n'}|a^{r_n-r_n'}-1|\leq \underset{\text{огр.}}{a^{r_n'}}\cdot 2|r_n-r_n'|(a-1)\longrightarrow 0$

Тогда a^{r_n} и $a^{r_n'}$ стрем. к одному и тому же

2) $0<a<1$ доказ. заменой $a=\frac{1}{b}$

III $x\in\mathbb{Q} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}=f_0(x)$

Д-во: $r_n=x$ (постоянн. послед.) ■